Soit Z l'ensemble des fonctions f pour lesquelles la série (^), converge vers $f(x)$ pour chaque x. En symboles:

$$(f \epsilon Z) \equiv \prod_x \prod_k \sum_n \prod_m |s_{n+m}(f, x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}$$

où $s_n(f, x)$ désigne la n-ème somme partielle de la série (^).

La fonction $s_n(f, x)$ étant une fonction continue (des arguments f et x), l'ensemble $\underset{xf}{E}|s_{n+m}(f, x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}$ est fermé. Par conséquent, Z est $\mathbf{CPC}(\mathsf{F}_{\delta\sigma\delta}) = \mathbf{CA}$ (relativement à l'espace $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ où $\mathscr{X} =$ l'intervalle 01 et $\mathscr{Y} =$ l'ensemble des nombres réels). [1])

Remarque. Dans le calcul fonctionnel on considère aussi des définitions de distance entre fonctions (continues ou non), différentes de celle adoptée au début de ce § [2]). Dans ces cas encore notre méthode est applicable, pourvue que la définition de la distance conduise à un espace complet séparable.

[1]) Il serait intéressant de reconnaître si cette évaluation de Z est la „meilleure" (même dans le cas de série de Fourier).

[2]) Voir par ex. M. Fréchet: *Espaces abstraits*, pp. 87—96, Paris 1928.

Sur l'ensemble des continus péaniens.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

M. Kuratowski a démontré par l'application d'une méthode générale [1]), que l'ensemble des continus péaniens et l'ensemble d'arcs simples d'un espace compact E est dans l'espace 2^E de classe $F_{\sigma\delta}$ au plus. Je me propose de démontrer que dans le cas où E est le cube-unité de l'espace euclidien à 3 dimensions (c.-à-d. le cube $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1$; $0 \leqslant z \leqslant 1$) ces ensembles sont *exactement de classe* $F_{\sigma\delta}$, c.-à-d. ne sont pas de classe inférieure.

Ce résultat est une conséquence du suivant.

Soit A un $F_{\sigma\delta}$ contenu dans l'intervalle I_0: $0 \leqslant x \leqslant 1$. Il existe un continu K, contenu dans le cube-unité et une décomposition semi-continue [2]) *de K possédant les propriétés suivantes: a) toute tranche de cette décomposition est une tranche de continuité; b) l'hyperespace de la décomposition est homéomorphe avec I_0; c) cette homéomorphie peut être établie de manière que toute tranche qui correspond à un point de A est un arc simple et toute tranche qui correspond à un point de $I_0 - A$ est un continu non-péanien.*

On a: $A = \prod_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{lk}$ les A_{lk} étant fermés et $A_{lk} \subset A_{l,k+1}$. Posons

$$r_{lk}(x) = \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l+2k+1}} \varrho(x, A_{lk}) \tag{1}$$

$$s_{lk}(x) = \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l+2k}} \varrho(x, A_{lk}) \tag{2}$$

et soit G_{lk} l'ensemble de points (x, y) du plan $z = 0$, déterminé

[1]) Ce volume, p. 269.

[2]) Comp. Kuratowski: Fund. Math. XI, p. 169—185 en part. p. 174—178.

par les inégalités:

(3) $$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad r_{ik}(y) < y < s_{ik}(x).$$

On a pour $x \in A_{ik}$:

(4) $$\frac{1}{2^i} = r_{ik}(x) = s_{ik}(x)$$

et pour x non $\in A_{ik}$:

(5) $$\frac{1}{2^i} \leqq s_{i,k+1}(x) < r_{ik}(x) < s_{ik}(x) \leqq \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+2k}} < \frac{1}{2^{i-1}}$$

il en résulte que $G_{ik} \times G_{jl} = 0$ sauf dans le cas: $i = j$, $k = l$.

Définissons pour $0 \leqslant y \leqslant 1$ la fonction $f(x, y)$ par les formules:

(6) $$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2^{i-1}} \qquad \text{pour } \frac{1}{2^i} < y \leqq \frac{1}{2^{i-1}} \text{ et } (x, y) \text{ non} \in \sum_{k=1}^{\infty} G_{ik}$$

(7) $$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} \sin\left[\frac{\pi(y - r_{ik}(x))}{s_{ik}(x) - r_{ik}(x)}\right] \qquad \text{pour } (x, y) \in G_{ik}$$

(8) $$f(x, y) = 1 \qquad \text{pour } y = 0.$$

Soit K_1 l'ensemble de points (x, y, z) tels que $z = f(x, y)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, et K_2 l'ensemble-somme de tous les rectangles: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = \frac{1}{2^i}$, $1 - \frac{1}{2^{i-1}} \leqslant z \leqslant 1 - \frac{1}{2^i}$. Posons $K = K_1 + K_2$. Soit $K(t)$ la section de K par le plan $x = t$.

On vérifie sans peine que pour $\lim_{n=\infty} t_n = t_0$ on a $\lim_{n=\infty} K(t_n) = K(t_0)$, donc les ensembles $K(t)$ sont des tranches de continuité d'une décomposition semicontinue. La correspondance entre t et $K(t)$ est une homéomorphie, enfin $K(t)$ est un arc simple pour $t \in A$, et un continu non-péanien pour $t \in I_0 - A$.

Warszawa, 12/III 1931.

Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Dans la théorie de Baire des fonctions de variable réelle on supposait primitivement que le domaine de variation de l'argument ainsi que celui de variation de la valeur de la fonction est l'ensemble des nombres réels. Dans les recherches ultérieures sur les fonctions mesurables B on s'est débarrassé (Hahn, Hausdorff) de l'hypothèse que les arguments soient réels, en supposant seulement qu'ils parcourent un espace métrique arbitraire. Si l'on savait, d'une façon analogue, se débarrasser de l'hypothèse que les valeurs soient réelles, la théorie des fonctions mesurables B deviendrait un chapitre de la Topologie et son champ d'applications s'élargirait de façon manifeste.

Dans cet ordre d'idées je vais démontrer plusieurs théorèmes sur les fonctions mesurables B (ainsi que sur les fonctions jouissant de la propriété de Baire), en supposant que les arguments et les valeurs de la fonction appartiennent à des espaces métriques [2]). En généralisant les théorèmes connus, j'ai tâché, en même temps, de simplifier leurs démonstrations.

Définitions. Les ensembles fermés et ouverts sont dits des ensembles de classe 0 multiplicative et additive resp. Les produits (resp. les sommes) dénombrables d'ensembles de classes $< \alpha$ sont dits de classe α multiplicative (resp. additive).

[1]) Les principaux résultats de cette note ont été communiqués à la Soc Pol. de Math. (Section de Lwów) le 29 Nov. 1930.

[2]) Dans le même ordre d'idées, voir les notes: S. Banach *Théorème sur les ensembles de première catégorie*, ma note *La propriété de Baire dans les espaces métriques*, Fund. Math. 16, ainsi que la note qui va suivre de M. Banach.