et si l'équation

$$\Omega(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \alpha) \equiv 0$$

admet une et une seule „racine" (pour α), on peut dire que cette équation définit α *implicitement*.

Un type très fréquent de définitions implicites présentent les définitions *par induction* (finie ou transfinie).

A l'aide des définitions implicites on peut sortir du domaine des ensembles projectifs. Elles conduisent à une nouvelle classe d'ensembles, „ensembles implicitement projectifs", qu'il serait intéressant d'étudier.

Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Je me propose d'exposer dans cette note une méthode qui permettra, dans bien des cas, d'évaluer d'une façon *mécanique* la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points donné, dès que la définition de cet ensemble sera écrite à l'aide des symboles logiques (expliqués dans la note précédente de M. Tarski et de moi).

La portée de cette méthode concerne non-spécialement les espaces euclidiens, mais, en général, les espaces complets séparables [2]). Elle est applicable, en particulier, à des espaces fonctionnels, à des espaces de sous-ensembles fermés d'un espace compact etc.

1. Espaces métriques. Définitions [3]).

On appelle espace *métrique* un ensemble $\mathcal{X}$ où la distance $|x-y|$ est définie, de sorte que $|x-x|=0$, $|x-y|=|y-x|\geqslant 0$ pour $x \neq y$, $|x-y|+|y-z|\geqslant|x-z|$.

Un espace est dit *séparable*, lorsqu'il contient une partie dense, finie ou dénombrable. Un espace métrique est dit *complet*, lorsque toute suite satisfaisant au critère de Cauchy est convergente; il est dit *compact*, si chaque suite contient une sous-suite convergente.

[1]) Les principaux résultats de cette note ont été présentés à la Soc. Pol. de Math. le 17. X. 1930 (à Varsovie) et le 21. II. 1931 (à Lwów).

[2]) Elle est parfois aussi applicable à des espaces non-complets; mais alors, en général, on doit rénoncer à considérer la notion d'ensemble projectif. Cf. ma note „*Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques*", ce volume.

[3]) Voir, par ex. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin 1927, § 20.

Dans cette note *tous les espaces considérés seront toujours supposés complets séparables.*

2. Produit de deux espaces métriques.

$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces métriques, on appelle *produit* (combinatorique) $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$[1]) l'ensemble des paires (x, y) où $x\in\mathcal{X}$ et $y\in\mathcal{Y}$ et où la distance de deux points $z=(x, y)$ et $z_1=(x_1, y_1)$ est définie par la formule:

$$|z-z_1|=\sqrt{|x-x_1|^2+|y-y_1|^2}.$$

En vertu de cette définition l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ est métrique. De plus, si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des espaces séparables, complets, compacts resp., il en est de même de $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

Il importe de remarquer que, si $z=(x, y)$ et $z_1=(x_1, y_1)$ la condition $z=\lim z_n$ équivaut à: $x=\lim x_n$ et $y=\lim y_n$.

Nous appellerons $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ les *„axes“* de l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, x et y les *„coordonnées“* du point $z=(x, y)$; C étant un ensemble situé dans l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, „la projection de C parallèle à l'axe Y“ est l'ensemble des „abscisses“ des points (x, y) de C, c. à d. L'ensemble $\underset{x}{E}\underset{y}{\Sigma}(x, y)\in C$[2]).

La projection est une opération *continue.*

La notion d'un produit $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ s'introduit d'une façon analogue[3]).

3. Ensembles boréliens et projectifs[4]).

On appelle *ensembles boréliens* les ensembles qui s'obtiennent à partir des ensembles fermés (resp. ouverts) à l'aide de deux opérations: addition et multiplication dénombrable. On classe ces ensembles de cette façon: on appelle ensembles $\mathbf{F}$ les ensembles fermés, ensembles $\mathbf{F}_\sigma$ les sommes dénombrables d'ensembles $\mathbf{F}$, ensembles $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$ les produits dénombrables (partie commune) d'ensembles

[1]) qu'il ne faut pas confondre avec „produit de deux ensembles“ = leur partie commune.

[2]) cf. la proposition (12) de la note précédente.

[3]) On considère aussi des produits infinis; voir § 4.

[4]) Hausdorff, l. c. p. 178 et N. Lusin, *Ensembles analytiques*, Paris 1930, chap. V.

$\mathbf{F}_\sigma$ et, en général, ensembles $\mathbf{F}_\alpha$ (pour un nombre transfini $\alpha<\Omega$) les produits resp. sommes dénombrables d'ensembles de classes inférieures, suivant que α est pair ou impair.

D'une façon analogue, les ensembles ouverts sont dits des ensembles $\mathbf{G}$, les produits dénombrables d'ensembles $\mathbf{G}$ sont des $\mathbf{G}_\delta$ (= les complémentaires d'ensembles $\mathbf{F}_\sigma$) etc.

Les ensembles boréliens sont dits ensembles *projectifs* de classe 0, ou ensembles $\mathbf{L}_0$. Les ensembles $\mathbf{L}_1$, ou ensembles $\mathbf{A}$ („analytiques“), sont les images continues des ensembles $\mathbf{L}_0$. Les ensembles $\mathbf{L}_2$, ou ensembles $\mathbf{CA}$, sont les complémentaires des ensembles $\mathbf{L}_1$. D'une façon générale: les $\mathbf{L}_{2n}$ sont des complémentaires des $\mathbf{L}_{2n-1}$ et les $\mathbf{L}_{2n+1}$ sont des images continues des $\mathbf{L}_{2n}$.

En vue des applications il sera utile de se servir des notations suivantes.

Soit $\mathbf{X}$ un symbole variable qui désigne une quelconque des classes boréliennes ou projectives. Nous dirons qu'un ensemble M est $\mathbf{CX}$, si son complémentaire est $\mathbf{X}$; qu'il est $\mathbf{X}_\sigma$, resp. $\mathbf{X}_\delta$, s'il est somme resp. produit (partie commune) d'une infinité dénombrable d'ensembles $\mathbf{X}$; qu'il est $\mathbf{PX}$ s'il est une image continue d'un ensemble $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}$ désignant ici une classe projective; qu'il est $\mathbf{X}_1\dotplus\mathbf{X}_2$, resp. $\mathbf{X}_1\mathring{\cdot}\mathbf{X}_2$[1]), s'il est somme resp. partie commune de deux ensembles dont l'un est $\mathbf{X}_1$ et l'autre est $\mathbf{X}_2$.

Ainsi, par ex. $\mathbf{CF}=\mathbf{G}$, $\mathbf{PF}=\mathbf{PL}_0=\mathbf{A}$, $\mathbf{P}(\mathbf{X}_\sigma)=(\mathbf{PX})_\sigma$, $(\mathbf{L}_n)_\sigma==\mathbf{L}_n=(\mathbf{L}_n)_\delta$[2]).

Nous allons nous servir, à présent, des notations et des formules de la note précédente (NN 1 et 2).

Soit $\varphi(x)$ une fonction propositionnelle (une „condition“) dont la variable x parcourt un espace complet séparable $\mathcal{X}$. Il résulte directement des formules (7)—(11) que:

(1) *si* $\underset{x}{E}\,\varphi(x)$ *est* $\mathbf{X}$, $\underset{x}{E}\,(\varphi(x))'$ *est* $\mathbf{CX}$,

(2) *si* $\underset{x}{E}\,\varphi(x)$ *est* $\mathbf{X}$ *et* $\underset{x}{E}\,\psi(x)$ *est* $\mathbf{Y}$, $\underset{x}{E}\,(\varphi(x)+\psi(x))$ *est* $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ *et* $\underset{x}{E}\,(\varphi(x)\cdot\psi(x))$ *est* $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$,

[1]) Pour des raisons typographiques, nous écrirons $+$ et $\cdot$ au lieu de $\dotplus$ et $\mathring{\cdot}$. On se rappellera que la proposition „M est un $\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2$“ *ne veut pas* dire que M est un $\mathbf{X}_1$ *ou* un $\mathbf{X}_2$, mais que — conformément au texte — M est somme d'un ensemble $\mathbf{X}_1$ et d'un ensemble $\mathbf{X}_2$.

[2]) Théorème de M. Sierpiński (dans le cas de variable réelle), Fund. Math. XIII, p. 239.

(3) *si pour chaque n naturel* $\underset{x}{E}\,\varphi_n(x)$ *est* $\mathbf{X}$ [1]), $\underset{x}{E}\underset{n}{\Sigma}\,\varphi_n(x)$ *est* $\mathbf{X}_\sigma$ *et* $\underset{x}{E}\underset{n}{\Pi}\,\varphi_n(x)$ *est* $\mathbf{X}_\delta$.

Soit $\mathcal{Y}$ un espace complet séparable (différent ou non de $\mathcal{X}$) et admettons que la variable y parcourt cet espace. On a les propositions suivantes:

(4) *si* $\underset{xy}{E}\,\psi(x,y)$ *est* $\mathbf{X}$, $\underset{x}{E}\underset{y}{\Sigma}\,\psi(x,y)$ *est* $\mathbf{PX}$ *et* $\underset{x}{E}\underset{y}{\Pi}\,\psi(x,y)$ *est* $\mathbf{CPCX}$,

(5) *si* $\underset{x}{E}\,\varphi(x)$ *est* $\mathbf{X}$, $\underset{xy}{E}\,\varphi(x)$ *l'est également* [2]).

En effet, d'après la proposition (12) de la note précédente, l'ensemble $\underset{x}{E}\underset{y}{\Sigma}\,\psi(x,y)$ est la projection de l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\psi(x,y)$ „parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$“, il est donc une image continue de celui-ci. Or, l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\psi(x,y)$ étant un $\mathbf{X}$ relativement à l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, qui est complet séparable (ce qui est ici essentiel!), son image continue, $\underset{x}{E}\underset{y}{\Sigma}\,\psi(x,y)$ est $\mathbf{PX}$ relativement à l'espace $\mathcal{X}$ [3]).

La deuxième partie de la proposition (4) est une conséquence immédiate de la formule de de Morgan: $\underset{x}{\Pi}\,\varphi(x) = [\underset{x}{\Sigma}(\varphi(x))']'$.

4. Evaluation de X pour un ensemble donné.

Les propositions (1)—(5) du N 3 permettent de reconnaître d'après la définition d'un ensemble à quelle classe borélienne ou projective cet ensemble appartient [4]).

Supposons, en effet, qu'on ait donné un système (fini) d'espaces complets séparables et un système de fonctions propositionnelles dont les variables (différentes ou non pour les différentes fonctions) parcourent les espaces du système donné; ces fonctions peuvent en outre dépendre d'une (ou plusieurs) variable qui parcourt les entiers positifs et qui sera considérée comme l'indice de la fonction. Le système de ces fonctions peut donc être imaginé sous la forme:

$$\beta_{m,n,\dots}(x,\dots,t),\ \dots\ \delta_{k,l,\dots}(x,\dots,z).$$

Supposons que l'ensemble

$$\underset{x\dots t}{E}\,\beta_{m,n,\dots}(x,\dots,t) \text{ est un } \mathbf{Y}\ ^{1)},$$

. . . .

$$\underset{x\dots z}{E}\,\delta_{k,l,\dots}(x,\dots,z) \text{ est un } \mathbf{Z}.$$

Dans ces hypothèses, si la fonction propositionnelle $\alpha(x)$ s'obtient en effectuant les opérations logiques sur les fonctions $\beta,\dots,\delta$, la classe $\mathbf{X}$ de l'ensemble $\underset{x}{E}\,\alpha(x)$ s'obtient de *la même façon* des symboles $\mathbf{Y},\dots,\mathbf{Z}$ (en remplaçant l'opération par $\mathbf{C}$, $\underset{n}{\Sigma}$ par σ, $\underset{n}{\Pi}$ par δ, $\underset{y}{\Sigma}$ par $\mathbf{P}$ et $\underset{y}{\Pi}$ par $\mathbf{CPC}$).

Cela se généralise directement au cas où α est une fonction de plusieurs variables.

La démonstration s'obtient par induction finie (cf. la démonstration du théorème, p. 246).

Remarques.

1. *Si M est un ensemble fermé situé dans l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ et si l'espace $\mathcal{Y}$ est compact, la projection de M parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$ est un ensemble fermé.*

Soit, en effet, P la projection de M. Il s'agit de prouver que, si $x=\lim x_n$ et $z_n=(x_n,y_n)\in M$, on a $x\in P$. Or, $\mathcal{Y}$ étant compact il existe une suite $y_{k_1}, y_{k_2},\dots$ convergente: $\lim y_{k_n}=y$, d'où $\lim z_{k_n} = (x,y)$. L'ensemble M étant fermé, il vient: $(x,y)\in M$, d'où $x\in P$.

Ainsi, dans l'hypothèse que l'espace Y est *compact*, on pourra se servir, au lieu de la proposition (4), de la proposition plus avantageuse suivante:

(6) *si* $\underset{xy}{E}\,\psi(x,y)$ *est* $\mathbf{F}$, $\underset{x}{E}\underset{y}{\Sigma}\,\psi(x,y)$ *l'est également*,

[1]) on suppose ici que $\mathbf{X}$ ne dépend pas de n, mais on pourrait se débarrasser de cette hypothèse sans difficulté. Il faudrait pour cela prolonger la suite des classes projectives $\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1,\dots$ dans le transfini ($<\Omega$).

[2]) Voir p. 245, note [2]) Cf. Lusin l. c. et Sierpiński l. c.

[3]) D'après un théorème fondamental de la théorie d'ensembles projectifs.

[4]) La méthode que nous exposons ici ne donne pas moyen pour reconnaître si l'évaluation de $\mathbf{X}$ est la „meilleure“, c. à d. si la classe à laquelle on parvient est, parmi les classes qui contiennent l'ensemble en question, la *première* dans l'échelle des classes boréliennes et projectives. Car un même ensemble peut avoir plusieurs définitions qui conduisent à des résultats plus ou moins précis.

[1]) Nous supposons que $\mathbf{Y}$ ne dépend pas des indices; cf. la note [1]), p. 252.

d'où on conclut que:

(7) *si* $\underset{xy}{E}\,\psi(x,y)$ *est* F_σ, $\underset{x}{E}\,\underset{y}{\Sigma}\,\psi(x,y)$ *l'est également* [1],

(8) *si* $\underset{xy}{E}\,\psi(x,y)$ *est* G *ou* G_δ, $\underset{x}{E}\,\underset{y}{\Pi}\,\psi(x,y)$ *l'est aussi (respectivement).*

2. La distinction que nous avons faite des variables naturelles parmi les autres variables, tient au fait — qu'en vue des applications — il est plus avantageux de considérer l'ensemble $\underset{x}{E}\,\underset{n}{\Sigma}\,\psi(x,n)$ comme somme dénombrable (en vertu de la formule de permutation p. 242 (10): $\underset{x}{E}\,\underset{n}{\Sigma}\,\psi(x,n)=\underset{n}{\Sigma}\,\underset{x}{E}\,\psi(x,n)$) que de le considérer comme projection de l'ensemble $\underset{xn}{E}\,\psi(x,n)$. Car X_σ est „inférieur ou égal" à PX (par ex., dans les espaces complets, F_σ est inférieur à $\mathsf{PF}=\mathsf{A}$).

Par contre, si la variable y parcourt un ensemble indénombrable, on considèrera l'ensemble $\underset{x}{E}\,\underset{y}{\Sigma}\,\psi(x,y)$ comme projection de l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\psi(x,y)$, car on ne sait rien sur la somme indénombrable d'ensembles X; exception faite du cas où $\mathsf{X}=\mathsf{G}$, c. à d. où l'ensemble $\underset{x}{E}\,\psi(x,y)$ est ouvert (pour chaque y). Dans ce cas la somme est un ensemble ouvert et on considère y comme indice (comme dans le cas de variable naturelle) et l'on applique la formule de permutation; ici il n'est plus nécessaire que l'ensemble parcouru par y soit un espace métrique (puisque y est considéré comme indice et non comme „coordonnée") [2].

D'une façon analogue, si $\underset{x}{E}\,\psi(x,y)$ est fermé quel que soit y, on se sert de la formule $\underset{x}{E}\,\underset{y}{\Pi}\,\psi(x,y)=\underset{y}{\Pi}\,\underset{x}{E}\,\psi(x,y)$.

APPLICATIONS.

Je vais appliquer à présent la méthode exposée tout-à-l'heure à la démonstration de plusieurs théorèmes qui ont été démontrés à l'aide de différentes méthodes et parfois par des raisonnements de longueur considérable.

[1]) Si $\underset{xy}{E}\,\psi(x,y)$ est G_δ, $\underset{x}{E}\,\underset{y}{\Sigma}\,\psi(x,y)$ peut être non-borélien (même dans le cas où $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=$ l'intervalle 01).

[2]) Voir § 2, IV.

Les espaces $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ etc. seront supposés des espaces complets séparables arbitraires. En conséquence, plusieurs de nos énoncés généraliseront les théorèmes qui n'étaient établis que pour le cas de l'espace linéaire ou euclidien.

Le calcul conduira, en général, à la „meilleure" évaluation de X (dans le sens de p. 252, note [4])); pour s'en convaincre, on consultera les ouvrages cités.

§ 1. Problèmes concernant l'espace $\mathcal{X}$ ou l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

I. Accessibilité rectilinéaire [1]).

Soit M un ensemble situé dans l'espace $\mathcal{X}$. On dit qu'un point x est rectilinéairement accessible par rapport à M, en symboles $x\,\epsilon\,M_a$, lorsqu'il existe un segment rectiligne xy qui n'a avec M que le point x en commun.

Il s'agit du problème suivant: *M étant un ensemble* (de classe borélienne ou projective) X, *quelle est la classe de l'ensemble M_a* [2]).

La condition pour que le point z appartienne au segment xy étant donnée par l'égalité: $|x-z|+|z-y|=|x-y|$ [3]), la définition de M_a s'écrit comme suit:

$$(x\,\epsilon\,M_a)\equiv(x\,\epsilon\,M)\cdot\underset{y}{\Sigma}\{(y\neq x)\cdot\underset{z}{\Pi}\,[(|x-z|+|z-y|=|x-y|)\cdot(z\neq x)\rightarrow$$
$$\rightarrow(z\,\epsilon\,M)']\}\equiv(x\,\epsilon\,M)\cdot\underset{y}{\Sigma}\{(y\neq x)\cdot\underset{z}{\Pi}\,[(|x-z|+|z-y|\neq|x-y|)+$$
$$+(z=x)+(z\,\epsilon\,M)']\}\;{}^{4}).$$

Comme on voit, cette définition s'obtient à l'aide des fonctions propositionnelles suivantes:

$$\beta(x)\equiv(x\,\epsilon\,M),\quad\gamma(x,y)\equiv(x=y),\quad\delta(x,y,z)\equiv(|x-z|+|z-y|=|x-y|).$$

Or, l'ensemble $\underset{x}{E}\,\beta(x)=M$ est X, $\underset{xy}{E}\,\gamma(x,y)$ est F et, en vertu de la continuité de la fonction $|x-y|$, l'ensemble $\underset{xyz}{E}\,\delta(x,y,z)$ est F.

[1]) Cf. aussi § 3, I.

[2]) Cf. le problème de P. Urysohn, Fund. Math. V, p. 337, probl. 29.

[3]) Dans les espaces non-euclidiens le „segment" peut, bien entendu, ne pas être congruent à un intervalle de nombres réels.

[4]) Nous remplaçons l'*inclusion*: „α entraîne β", par „$\alpha'+\beta$". Cf. p. 245, [4]).

Par conséquent, l'ensemble M_a est $\mathbf{X}\cdot\mathbf{P}[\mathbf{G}\cdot\mathbf{CPC}(\mathbf{G}+\mathbf{F}+\mathbf{CX})]=$ $=\mathbf{X}\cdot\mathbf{P}[\mathbf{G}\cdot\mathbf{CP}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{X})]$ [1]).

Notre problème est ainsi résolu. En particulier:

1°: si l'espace $\mathcal{X}$ est compact et M est un $\mathbf{F}_\sigma$, c. à d. que $\mathbf{X}=\mathbf{F}_\sigma$: il vient $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{F}_\sigma=\mathbf{F}_\sigma$ et selon (7) $\mathbf{PF}_\sigma=\mathbf{F}_\sigma$, donc M_a est $\mathbf{F}_\sigma\cdot\mathbf{P}(\mathbf{G}_\delta)$, donc un ensemble analytique [2]);

2°: si $\mathbf{X}=\mathbf{A}$, M_a est, comme on calcule facilement, $\mathbf{PCA}$ [3]); d'une façon plus générale, si $\mathbf{X}=\mathbf{L}_{2n+1}$, M_a est $\mathbf{L}_{2n+3}$.

II. Points maxima.

Soit $\mathcal{J}$ l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$. Soit M un ensemble situé dans l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{J}$. On dit (avec M. Mazurkiewicz) qu'un point (x, t) est un point maximum de l'ensemble M, en symboles: $(x, t)\in M_m$, lorsque parmi les points d'„abscisse" x ce point est d'ordonnée maxima. Il vient

$$[(x, t)\in M_m]\equiv[(x, t)\in M]\cdot\prod_{t_1}[((x, t_1)\in M)'+(t_1\leqslant t)].$$

L'ensemble $\underset{tt_1}{E}(t_1\leqslant t)$ étant évidemment fermé, on voit aussitôt que, si M est un $\mathbf{X}$, M_m est $\mathbf{X}\cdot\mathbf{CPC}(\mathbf{CX}+\mathbf{F})=\mathbf{X}\cdot\mathbf{CP}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{G})$.

En particulier, si M est un ensemble borélien, M_m est $\mathbf{CA}$ [4]); si M est analytique, M_m est $\mathbf{A}\cdot\mathbf{CA}$ [5]), une différence de deux ensembles analytiques.

Désignons par M_p la projection de M_m sur l'axe $\mathcal{X}$. Supposons que l'ensemble M soit $\mathbf{F}_\sigma$. L'ensemble M_m étant dans ce cas $\mathbf{F}_\sigma\cdot\mathbf{G}_\delta$, M_p est $\mathbf{A}$; mais ce n'est pas la „vraie" classe de l'ensemble M_p. On verra que M_p est un $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$ [6]).

Soit, en effet, $M=F_1+F_2+\dots$ une série d'ensembles fermés croissants. Par définition, $x\in M_p$ lorsque dans l'ensemble $\underset{t}{E}(x, t)\in M$, supposé non-vide, existe le plus grand nombre t; autrement dit, lorsque, à partir d'un certain indice n, il n'existe pour aucun $m>n$, dans l'ensemble $\underset{t}{E}(x, t)\in F_m$, un nombre qui soit plus grand que *tous* les nombres de l'ensemble $\underset{t}{E}(x, t)\in F_n$. En symboles:

$$(x\in M_p)\equiv\{\sum_t(x,t)\in M\}\cdot\sum_n\prod_k\prod_t\{((x,t)\in F_{n+k})\to\sum_{t_1}[((x,t_1)\in F_n)\cdot(t\leqslant t_1)]\}.$$

M_p est donc $\mathbf{PF}_\sigma\cdot[\mathbf{CPC}(\mathbf{G}+\mathbf{P}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}))]_{\delta\sigma}=\mathbf{G}_{\delta\sigma}$ (selon (8)).

Dans le même ordre d'idées on considère l'ensemble suivant:

$$(t\in M_u)\equiv\prod_{xt_1}\{(t\leqslant t_1)+((x, t)\in M)'+((x, t_1)\in M)'\}.$$

Donc, si M est $\mathbf{X}$, M_u est $\mathbf{CPC}(\mathbf{F}+\mathbf{CX}+\mathbf{CX})=\mathbf{CP}(\mathbf{G}\cdot\mathbf{X})$.
En particulier, si $\mathbf{X}=\mathbf{F}_\sigma$ et $\mathcal{X}$ est compact, M_u est $\mathbf{G}_\delta$; si $\mathbf{X}=\mathbf{A}$, M_u est $\mathbf{CA}$ [1]).

III. Crible de M. Lusin.

Soit, comme auparavant, $M\subset\mathcal{X}\times\mathcal{J}$. On considère l'ensemble M_{cr} (l'ensemble „criblé" par M) qui se compose de tous les points x tels que l'ensemble $\underset{t}{E}[(x, t)\in M]$ n'est pas bien ordonné (selon la grandeur de ses éléments) [2]), c. à d. qu'il existe un nombre réel t_0 qui soit limite d'une suite décroissante d'éléments de $\underset{t}{E}[(x, t)\in M]$.

En symboles:

$$(x\in M_{cr})\equiv\sum_{t_0}\prod_n\sum_t\left(t_0<t<t_0+\frac{1}{n}\right)((x, t)\in M).$$

Donc, si M est $\mathbf{X}$, M_{cr} est $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{G}\cdot\mathbf{X}))_\delta$ [3]). Car $\underset{t}{E}\left(t_0<t<t_0+\frac{1}{n}\right)$ est $\mathbf{G}$ pour n fixe.

(page 256)

[1]) et l'on prouve facilement que cela équivaut à $\mathbf{PCP}(\mathbf{F}.\mathbf{G}.\mathbf{X})$.

[2]) Théorème de Nikodym-Urysohn. $\mathbf{A}$ est la „vraie" classe de M_a (il existe même sur le plan un ensemble $\mathbf{F}$ pour lequel M_a est non-borélien). Voir: O. Nikodym, Fund. Math. 7 et 11 et Ann. Soc. Pol. Math. 7; P. Urysohn, Proc. Akad. Amsterdam 28.

[3]) O. Nikodym, Fund. Math. 7.

[4]) S. Mazurkiewicz, Fund. Math. 10, p. 172.

[5]) W. Sierpiński, Fund. Math. 11, p. 291.

[6]) Théorème de M. Sierpiński, Fund. Math. 17, p. 81.

(page 257)

[1]) Cf. les théor. de MM. Mazurkiewicz et Sierpiński, Fund. Math. 8, p. 167 et vol. 15, p. 290.

[2]) Dans le cas, où $\mathcal{X}$ est l'ensemble des nombres réels, cela veut dire que la droite verticale d'abscisse x rencontre l'ensemble M en un ensemble qui n'est pas bien ordonné.

[3]) Ce qui équivaut à $\mathbf{P}(\mathbf{G}\cdot\mathbf{X})_\delta$. On parvient directement à ce résultat, en employant les notations du § 4. Notamment, ξ désignant une suite variable, $\xi\in I^{\aleph_0}$, il vient:

$$(x\in M_{cr})\equiv\sum_\xi\prod_n(\xi^{(n+1)}<\xi^{(n)})\cdot[(x, \xi^{(n)})\in M].$$

En particulier, si M est analytique, M_{cr} l'est également. Plus généralement, si $\mathbf{X} = \mathbf{L}_{2n+1}$, M_{cr} l'est aussi [1]).

IV. Ensembles denses-en-soi.

Soit M un ensemble situé dans le produit de deux espaces: $M \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. L'espace $\mathcal{X}$ étant séparable, soit $p_1, p_2, \dots, p_m, \dots$ une suite de points dense dans lui. Soit

$$(*) \qquad R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$$

la suite de toutes les sphères ouvertes de rayon rationnel et ayant pour centre un des points p_m.

Considérons l'ensemble M_d de tous les y tels que l'ensemble $\underset{x}{E}[(x,y) \in M]$ soit dense-en-soi; autrement dit, que chaque sphère qui contient un point de $\underset{x}{E}[(x,y) \in M]$ en contienne au moins deux; cette sphère pouvant évidemment être supposée une sphère de la suite (*), il vient:

$$(y \in M_d) \equiv \prod_n \{\prod_x [((x,y) \in M)' + (x \in R_n)'] + \sum_{x_1 x_2} (x_1 \in R_n) \cdot (x_2 \in R_n) \cdot ((x_1, y) \in M) \cdot ((x_2, y) \in M) \cdot (x_1 \neq x_2)\}.$$

Par conséquent, si M est $\mathbf{X}$, M_d est $[\mathbf{CPC}(\mathbf{CX}+\mathbf{F}) + \mathbf{P}(\mathbf{G}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{G})]_\delta = [\mathbf{CP}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{G}) + \mathbf{P}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{G})]_\delta$.

En particulier, si $\mathbf{X} = \mathbf{F}_\sigma$, et $\mathcal{X}$ est compact, M_d est $(\mathbf{CF}_\sigma + \mathbf{F}_\sigma)_\delta = \mathbf{F}_{\sigma\delta}$ [2]).

V. Opérations de M. Hausdorff.

M. Hausdorff considère des opérations du genre suivant [3]). Soit $A_1, A_2, \dots$ une suite d'ensembles donnée et soit B un ensemble de nombres irrationnels contenus entre 0 et 1. Soit

$$\xi = \frac{1|}{|\xi^{(1)}} + \dots + \frac{1|}{|\xi^{(n)}} + \dots$$

le développement du nombre irrationnel $0 < \xi < 1$ en fraction continue.

[1]) N. Lusin: *Ensembles analytiques*, p. 180 et 287. W. Sierpiński, Fund. Math. 12, p. 1 et vol. 17, p. 30.

[2]) Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 8, p. 370. M. Sierpiński montre (Mathematica v. 5, p. 53) qu'en cas où $\mathbf{X} = \mathbf{L}_0$, il résulte directement d'un théorème de M. Lusin (l. c. p. 259) que M_d est $\mathbf{A}$.

[3]) Op. cit.

M. Hausdorff considère l'ensemble H tel que

$$(x \in H) \equiv \sum_\xi \{(\xi \in B) \cdot \prod_{mn} [(m = \xi^{(n)}) \rightarrow (x \in A_m)]\}.$$

On voit aussitôt que, si chaque A_m est $\mathbf{X}$ et si B est $\mathbf{Y}$, H est $\mathbf{P}(\mathbf{Y}\cdot(\mathbf{G}+\mathbf{X})_\delta)$ (on tient compte de la continuité de la fonction $\xi^{(n)}$). En particulier, *si* $\mathbf{X} = \mathbf{A} = \mathbf{Y}$, *l'ensemble H est analytique.*

VI. Ensembles linéaires dans les espaces vectoriels.

Supposons que l'espace (complet séparable) $\mathcal{X}$ soit un espace vectoriel, c. à d. que la somme $x+y$ de ses éléments soit définie ainsi que la multiplication ax (par un nombre réel a), ces opérations étant assujeties aux conditions habituelles de l'algèbre [1]). En particulier: ce sont des opérations continues.

On appelle linéaire tout ensemble qui avec x et y contient $ax+by$, quels que soient les nombres réels a et b.

Z étant un ensemble arbitraire ($\subset \mathcal{X}$), désignons par Z_L le plus petit ensemble linéaire contenant Z. Par conséquent $Z_L = Z_0 + Z_1 + \dots$, où $Z_0 = Z$ et où

$$(x \in Z_n) \equiv \sum_{abyz} (x = ay + bz)\,(y \in Z_{n-1})\,(z \in Z_{n-1}).$$

On voit aussitôt que l'ensemble $\underset{abxyz}{E}(x = ay + bz)$ est fermé. On en conclut que, si Z_{n-1} est analytique, Z_n l'est également. Donc, *si Z est analytique, il en est de même de Z_L* [2]).

§ 2. Espace $2^{\mathcal{X}}$.

Nous supposons dans les §§ 2 et 3 que l'espace $\mathcal{X}$ est *compact*. Désignons [3]) par $2^{\mathcal{X}}$ l'ensemble composé de tous les sous-ensembles non-vides et fermés de $\mathcal{X}$. On attribue à $2^{\mathcal{X}}$ le caractère d'un

[1]) Voir S. Banach, Fund. Math. III, p. 135.

[2]) Problème de M. Mazur.

[3]) par analogie à la potence $2^{\mathfrak{m}}$ dans la théorie des nombres cardinaux (puissance de la famille de *tous* les sous-ensembles d'un ensemble donné de puissance $\mathfrak{m}$; les ensembles ayant la même fermeture sont ici „identifiés").

espace métrique et compact, en définissant la distance entre deux de ses éléments-ensembles A et B de cette façon [1]):

dist. $(A, B) =$ le plus grand des nombres $\max\limits_{x \epsilon A} \varrho(x, B)$ et $\max\limits_{y \epsilon B} \varrho(y, A)$,

où $\varrho(x, B) = \min\limits_{y \epsilon B} |x - y|$ [2]).

On prouve facilement que:

(i) *les ensembles* $\underset{xA}{E}(x \epsilon A)$, $\underset{AB}{E}(A \subset B)$, $\underset{AB}{E}(A \cdot B \neq 0)$, $\underset{ABC}{E}(C = A + B)$ *sont fermés (la dernière de ces propositions veut dire que la fonction* $A + B$ *est continue).*

(ii) *en faisant correspondre à chaque point* x *l'ensemble composé de ce point, on définit une fonction continue:* $A = (x)$,

(iii) *le diamètre de* A, *c. à d. le nombre* $\delta(A) = \max\limits_{x, y \epsilon A} |x - y|$, *est une fonction continue de la variable* A.

I. Ensembles parfaits.

Soit $\mathfrak{P}$ la famille des ensembles parfaits (contenus dans $\mathcal{X}$). Pour qu'un ensemble A soit parfait, il faut et il suffit que chaque sphère R_n de la suite (*) qui contient un point de A en contienne au moins deux. Donc

$$(A \epsilon \mathfrak{P}) \equiv \prod_n \prod_x [AR_n \neq (x)] \equiv \prod_n \prod_x \{((x) \subset AR_n)' + (AR_n \subset (x))'\} \equiv$$
$$\equiv \prod_n \prod_x \{(x \epsilon A)' + (x \epsilon R_n)' + [A \subset (x) + \mathcal{X} - R_n]'\}.$$

Or, la fonction $(x) + \mathcal{X} - R_n$ étant, pour n fixe, selon (i) et (ii) une fonction continue de x, on conclut de (i) que l'ensemble $\underset{A}{E}[A \subset (x) + \mathcal{X} - R_n]$ est fermé [3]). Par conséquent, $\mathfrak{P}$ est $(\mathbf{CPC}(\mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{G}))_\delta$ et comme (voir form. 8, p. 254) $\mathbf{CPCG}_\delta = \mathbf{G}_\delta$, $\mathfrak{P}$ *est* $\mathbf{G}_\delta$ [4]).

[1]) Les variables qui parcourent $2^{\mathcal{X}}$ seront désignés par des majuscules; les minuscules parcourent l'espace $\mathcal{X}$.

[2]) F. Hausdorff, l. c., § 28.

[3]) Car F étant un ensemble fermé et $f(t)$ une fonction continue, l'ensemble $\underset{t}{E}(f(t) \epsilon F)$ est fermé. D'une façon générale, si $\underset{x}{E}\varphi(x)$ est $\mathbf{X}$, $\underset{t}{E}\varphi(f(t))$ l'est également.

[4]) Théorème et démonstration de M. Banach.

II. Ensembles dénombrables.

Soit ϑ la famille des ensembles dénombrables. D'après le théorème de Cantor-Bendixson, chaque ensemble fermé indénombrable contient un ensemble parfait. Par conséquent:

$$(A \epsilon \vartheta)' \equiv \sum_B (B \subset A) \quad (B \epsilon \mathfrak{P}).$$

Donc $2^{\mathcal{X}} - \vartheta$ est $\mathbf{P}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_\delta) = \mathbf{A}$, d'où ϑ est $\mathbf{CA}$ [1]).

III. Applications aux fonctions continues et aux ensembles analytiques.

Soit $y = f(x)$ une fonction continue qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$. On voit aussitôt que *l'ensemble* $\underset{xy}{E}[y = f(x)]$ *est fermé* (dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$). Considérons l'ensemble A_f de tous les y tels que l'ensemble $\underset{x}{E}[y = f(x)]$ soit indénombrable ou, ce qui revient au même, qu'il contienne un sous-ensemble parfait. En symboles:

$$y \epsilon A_f \equiv \sum_P (P \epsilon \mathfrak{P}) \cdot (P \subset \underset{x}{E}[f(x) = y]) \equiv$$
$$\equiv \sum_P \{(P \epsilon \mathfrak{P}) \cdot \prod_x [(x \epsilon P)' + (f(x) = y)]\}.$$

L'ensemble A_f est donc $\mathbf{P}\{\mathbf{G}_\delta \cdot \mathbf{CPC}(\mathbf{G} + \mathbf{F})\}$, donc un ensemble *analytique* [2]).

Le théorème précédent reste vrai lorsque on remplace la condition „$y = f(x)$" par la condition plus générale: „$(x, y) \epsilon M$" où M est un ensemble fermé. Nous allons voir que, plus généralement encore: on peut supposer que M est *analytique* (nous supposerons ici que, l'espace $\mathcal{Y}$ est compact).

Dans ce cas, en effet, M est la projection orthogonale d'un ensemble $\mathbf{G}_\delta$, désignons le par W, situé dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{J}$ (où $\mathcal{J}$ dénote l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$). Remarquons encore que, si la

[1]) Théorème de M. Hurewicz, Fund. Math. 15, pp. 4—17, qui a montré aussi que ce résultat est précis, c. à d: que la famille ϑ n'est pas borélienne; c'est un des plus simples exemples d'ensembles non-boréliens.

Cf. aussi § 4, III.

[2]) Problème de M. Banach, résolu par MM. Mazurkiewicz et Sierpiński Fund. Math. 6, p. 161.

projection d'un $\mathbf{G}_\delta$ contient un ensemble parfait, l'ensemble $\mathbf{G}_\delta$ contient un ensemble fermé dont la projection contient un ensemble parfait [1]). Par conséquent, si A désigne l'ensemble des y tels que l'ensemble $\underset{x}{\boldsymbol{E}}[(x, y) \epsilon M]$ soit indénombrable, on a

$$y \epsilon A \equiv \sum_P \sum_F \{(P \epsilon \mathfrak{P}) \cdot (F \subset W) \cdot \prod_x [(x \epsilon P) \rightarrow \sum_t ((x, y, t) \epsilon F)]\} \equiv$$
$$\equiv \sum_P \sum_F \{(P \epsilon \mathfrak{P}) \cdot \prod_z [(z \epsilon F)' + (z \epsilon W)] \cdot \prod_x [(x \epsilon P)' + \sum_t ((x, y, t) \epsilon F)]\}$$

(z est un point variable et F un sous-ensemble fermé variable de l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{T}$).

Il en résulte que A est $\mathbf{PP}\{\mathbf{G}_\delta \cdot \mathbf{CPC}(\mathbf{G} + \mathbf{G}_\delta) \cdot \mathbf{CPC}(\mathbf{G} + \mathbf{PF})\}$ et en tenant compte du fait que tous les espaces considérés sont compacts, on en conclut (cf. form. (7), (8), p. 254), que A est analytique [2]).

IV. Continus.

Par définition, un ensemble (fermé) X n'est pas un continu, s'il se laisse décomposer en deux ensembles fermés (non-vides) Y et Z tels que $YZ = 0$. Dans ce cas, il existe un ensemble ouvert G tel que $Y \subset G$ et $\overline{G} \cdot Z = 0$, donc que $X \cdot \overline{G} - G = 0$.

Désignons par $\mathfrak{L}$ la famille des continus. Il vient (G désignant un ensemble ouvert variable):

$$(X \epsilon \mathfrak{L})' \equiv \sum_G (XG \neq 0) \cdot (X - \overline{G} \neq 0) \cdot (X\overline{G} - G = 0).$$

Or, l'ensemble $\underset{X}{\boldsymbol{E}}(XG \neq 0)$, comme égal à $\underset{X}{\boldsymbol{E}}(X \subset \mathcal{X} - G)'$, est ouvert selon (i). Il en est de même de l'ensemble $\underset{X}{\boldsymbol{E}}(X - \overline{G} \neq 0) = \underset{X}{\boldsymbol{E}}(X \subset \overline{G})'$. Enfin (i) implique que l'ensemble $\underset{X}{\boldsymbol{E}}(X \cdot \overline{G} - G = 0)$ est ouvert, puisque $\overline{G} - G$ est fermé.

Par conséquent, l'ensemble $\mathfrak{L}' = \sum_G \{\underset{X}{\boldsymbol{E}}(XG \neq 0) \cdot \underset{X}{\boldsymbol{E}}(X - \overline{G} \neq 0) \cdot$

[1]) Voir. par ex., Lusin, *Ensembles analytiques*, p. 150. D'une façon générale, toute fonction qui transforme un espace complet séparable de façon continue en un ensemble indénombrable, transforme de façon *bicontinue* un ensemble parfait et compact. Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 15, p. 128.

[2]) Théorème de MM. Mazurkiewicz et Sierpiński, l. c.

$\cdot \underset{X}{\boldsymbol{E}}(X\overline{G} - G = 0)\}$, comme somme [1]) d'ensembles ouverts, est ouvert Autrement dit, $\mathfrak{L}$ *est fermé* [2]).

§ 3. Espace des continus $\mathfrak{L}$.

En vertu du théorème précédent la famille $\mathfrak{L}$ des sous-continus d'un espace compact $\mathcal{X}$ peut elle-même être considérée comme espace compact. C'est ce que nous ferons dans ce §. Nous désignerons les variables qui parcourent l'espace $\mathfrak{L}$ par C, K, L.

I. Accessibilité topologique.

Soit M un ensemble situé dans l'espace $\mathcal{X}$. On dit qu'un point x est topologiquement accessible par rapport à M, en symboles $x \epsilon M_t$, lorsqu'il existe un continu C qui ne se réduit pas à un seul point et que $C \cdot M = x$. Autrement dit:

$$(x \epsilon M_t) \equiv (x \epsilon M) \cdot \sum_C \{(C \neq x) \cdot \prod_y [(y \epsilon C)(y \neq x) \rightarrow (y \epsilon M)']\}.$$

Donc si M est $\mathbf{X}$, M_t est $\mathbf{X} \cdot \mathbf{P}[\mathbf{G} \cdot \mathbf{CPC}(\mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{CX})]$, donc $\mathbf{PCP}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{X})$ (cf. p. 256).

En particulier, si $\mathbf{X} = \mathbf{F}_\sigma$, l'ensemble M_t est *analytique* [3]).

Si l'on impose à C la condition d'être un segment rectiligne, on retrouve le théor. I du § 1. Car la famille des segments rectilignes (les points individuels y compris) étant fermée, cette condition n'altère pas le caractère de la définition de l'ensemble M_t.

II. Continus indécomposables.

Un continu C est dit indécomposable, lorsqu'il ne se laisse pas décomposer en deux continus différents de lui, c. à d. lorsque

$$\prod_{KL} [(C = K + L) \rightarrow (C = K) + (C = L)].$$

La famille des continus indécomposables est donc $\mathbf{CPC}(\mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{F})$, donc $\mathbf{G}_\delta$.

[1]) cf. p. 254, remarque 2.

[2]) Théorème de M. Painlevé.

[3]) Théorème de P. Urysohn, Proc. Akad. Amsterdam 28

III. Propriétés héréditaires.

Si une famille $\mathfrak{M}$ de continus constitue un ensemble $\mathbf{G}_\delta$ *(relativement à l'espace $\mathfrak{L}$), alors la famille de tous les continus C tels que chaque sous-continu de C appartient à $\mathfrak{M}$ constitue également un* $\mathbf{G}_\delta$.

Car cette dernière condition veut dire que

$$\Pi_K[(K\subset C)\to(K\in\mathfrak{M})].$$

En particulier, *la famille $\mathfrak{K}$ des continus dont chaque sous-continu est indécomposable est* $\mathbf{G}_\delta$ [1]).

La décomposition de l'ensemble $\mathfrak{K}'$ en une série d'ensembles fermés est donnée par la formule: $\mathfrak{K}'=\sum_n \mathfrak{A}_n$, où

$$(C\in\mathfrak{A}_n)\equiv\sum_{xKL}\Big\{(K+L\subset C)\,(KL\neq 0)\Big[\Big(\varrho(x,K)\geqslant\frac{1}{n}\Big)\,(x\in L)+\\+\Big(\varrho(x,L)\geqslant\frac{1}{n}\Big)\,(x\in K)\Big]\Big\}$$

$\varrho(x,A)$ désignant $\min_{y\in A}|x-y|$.

Or, comme montre M. Mazurkiewicz, dans le cas où l'espace $=$ un cercle, chacun des ensembles $\mathfrak{A}_n$ est non-dense. Donc $\mathfrak{K}'$ est de I-re catégorie. De là on conclut, à l'aide du théorème de Baire, qu'il existe sur le plan des continus dont chaque sous-continu est indécomposable (et qui ne se réduisent pas à des points individuels, puisque ces derniers constituent dans l'espace $\mathfrak{L}$ aussi un ensemble non-dense) [2]).

Ainsi, la méthode de M. Mazurkiewicz employée pour démontrer l'existence d'éléments de la classe $\mathfrak{K}$ consiste à prouver que le complémentaire de $\mathfrak{K}$ est somme d'une série d'ensembles fermés et non-denses. Le champ d'applications de cette méthode est très vaste (voir aussi § 5, II).

IV. Coupures de l'espace.

Un ensemble fermé X est dit une coupure de l'espace, s'il existe deux points x et y situés en dehors de X et tels que chaque continu C qui les unit passe par X. Les points x et y pouvant être entourés de deux sphères R_m et R_n de la suite (*) p. 258, disjointes de X, il vient:

[1]) Théor. de M. Mazurkiewicz, Fund. Math. 16, p. 151.

[2]) Le premier exemple de ce genre fut construit par M. Knaster, Fund. Math. 3, p. 247.

$$\text{„}X\text{ est une coupure“}\equiv\sum_{mn}\{(XR_m=0)\,(XR_n=0)\,\Pi_C[(CX\neq 0)+\\+(CR_m=0)+(CR_n=0)]\}.$$

Les ensembles $\underset{X}{E}(XR_m=0)$, $\underset{CX}{E}(CX\neq 0)$ et $\underset{C}{E}(CR_m=0)$ étant fermés selon (i), on voit aussitôt que la famille des coupures constitue un $\mathbf{F}_\sigma$ [1]).

V. Autres applications.

On prouve que la famille des continus *uni-cohérents* est $\mathbf{G}_\sigma$, que les familles des *arcs simples*, des *courbes simples fermées* des *dendrites*, sont des $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$. Nous reviendrons à ces énoncés dans Fund. Math. 18. (voir aussi § 4, V).

§ 4. Espace $\mathcal{X}^{\aleph_0}$, des suites infinies.

Soit $\mathcal{X}$ un espace complet séparable. Désignons par $\mathcal{X}^{\aleph_0}$ la famille de toutes les suites infinies

$$\xi=\xi^{(1)},\ \xi^{(2)},\dots,\ \xi^{(n)},\dots$$

extraites de $\mathcal{X}$ [2]). Définissons la distance de deux suites ξ et η par la formule de M. Fréchet:

$$|\xi-\eta|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{|\xi^{(n)}-\eta^{(n)}|}{1+|\xi^{(n)}-\eta^{(n)}|}.$$

L'espace $\mathcal{X}^{\aleph_0}$, ainsi métrisé, est un espace complet séparable. Grâce à ce fait, notre méthode d'„évaluation“ est applicable à cet espace aussi.

On voit facilement que

(a) *la condition pour qu'une suite variable converge vers une suite limite est que la „n-ème coordonnée“ de la suite variable tende vers la n-ème coordonnée de la suite limite; en symboles:*

$$\{\xi=\lim_{k=\infty}\xi_k\}\equiv\Pi_n[\xi^{(n)}=\lim_{k=\infty}\xi_k^{(n)}];$$

[1]) Cf. C. Zarankiewicz, Fund. Math. 9, p. 163 et W. L. Ayres, Fund. Math. 16, p. 134.

[2]) C'est une extension de la notion de „produit combinatorique“ d'espaces au cas d'une suite *infinie* d'espaces (tous identiques).

(b) *la n-ème coordonnée de la suite ξ, c.-à-d. le point $\xi^{(n)}$, est une fonction continue de l'argument ξ.*

I. Suites convergentes.

L'espace $\mathcal{X}$ étant complet, la condition pour qu'une suite ξ soit convergente est la suivante („condition de Cauchy"):

$$\prod_k \sum_m \prod_i \left\{|\xi^{(m+i)} - \xi^{(m)}| \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Les fonctions $\xi^{(n)}$ étant continues selon (a), l'ensemble

$$\underset{\xi}{E}\, |\xi^{(m+i)} - \xi^{(m)}| \leqslant \frac{1}{k}$$

est fermé (pour i, m, k fixes). Par conséquent, la famille Γ des suites convergentes est $\mathbf{F}_{\delta\sigma\delta}$, est donc $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$.

De là résulte que $f_n(t)$, $n=1,2,\dots$ étant une suite de fonctions continues (définies sur un espace arbitraire T), l'ensemble Z des points t pour lesquels la suite est convergente est $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$. Car désignons par $\xi(t)$ la suite $f_1(t), f_2(t),\dots$; il vient $Z = \underset{t}{E}\, \xi(t) \in \Gamma$, et la fonction $\xi(t)$ étant continue selon (a), Z et $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$ [1]).

Un théorème analogue concerne le cas où les fonctions $f_n(t)$ sont des fonctions mesurables B de classe α (en général, discontinues).

II. Suites d'images continues.

Soit $f_n(x)$, $n=1,2,\dots$, une fonction qui transforme l'ensemble X_n ($\subset \mathcal{X}$) en un ensemble Y_n ($\subset \mathcal{Y}$). Soit $P = \prod_n Y_n$. Donc $y \in P$, lorsqu'il existe une suite $x_1, x_2, \dots$ telle que $x_n \in X_n$ et $y = f_n(x_n)$. En symboles:

$$(y \in P) \equiv \sum_\xi \prod_n (\xi^{(n)} \in X_n)\ (y = f_n(\xi^{(n)})).$$

Cette formule peut, en particulier, servir pour prouver que *la partie commune d'une infinité dénombrable d'ensembles analytiques est*

[1]) Théorème de M. H. Hahn. Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 270, dont la démonstration peut être exprimée par la formule:

$$(t \in Z) \equiv \prod_k \sum_m \prod_i |f_{m+i}(t) - f_m(t)| \leqslant \frac{1}{k}.$$

analytique. En effet, on pose, dans ce cas, $X_n = \mathcal{X} =$ l'ensemble des nombres irrationnels; par conséquent, l'expression $(\xi^{(n)} \in X_n)$, de la formule précédente, peut être omise. La fonction $f_n(\xi^{(n)})$ étant selon (b) continue, l'ensemble $\underset{\xi y}{E}\, y = f_n(\xi^{(n)})$ est fermé, donc l'ensemble P, comme projection d'un ensemble fermé, est analytique.

Une application analogue de la formule précédente permet de démontrer d'une simple façon que la propriété d'être un ensemble projectif de classe $\mathbf{L}_n$ est multiplicative [1]).

III. Suites denses-en-soi.

Une suite ξ est dense-en-soi, lorsque chaque $\xi^{(n)}$ est point d'accumulation des termes $\neq \xi^{(n)}$. En symboles:

$$(\xi \in \Delta) \equiv \prod_{nk} \sum_m \left\{0 < |\xi^{(n)} - \xi^{(m)}| < \frac{1}{k}\right\}.$$

L'ensemble Δ est donc un $\mathbf{G}_\delta$.

Nous appliquerons ce théorème aux „cribles clairsemés" de M. Lusin. Soit, notamment, M un ensemble situé dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ et considérons l'ensemble M_c de tous les y tels que l'ensemble $\underset{x}{E}\,(x, y) \in M$ ne soit pas clairsemé, c. à d. qu'il contienne une partie dense-en-soi (dénombrable). En symboles:

$$(y \in M_c) \equiv \sum_\xi \{(\xi \in \Delta) \cdot \prod_n [(\xi^{(n)}, y) \in M]\}.$$

Donc, si M est $\mathbf{X}$, M_c est $\mathbf{P}(\mathbf{G}_\delta \cdot \mathbf{X}_\delta)$. En particulier, si M est analytique, M_c l'est également [2]).

Le théorème précédent peut être aussi appliqué pour prouver d'une simple façon que la famille ϑ des sous-ensembles fermés dénombrables, donc clairsemés, d'un espace compact $\mathcal{X}$ constitue un ensemble $\mathbf{CA}$ dans l'espace $2^{\mathcal{X}}$. Car

$$(A \in \vartheta)' \equiv \sum_\xi \{(\xi \in \Delta) \cdot \prod_n (\xi^{(n)} \in A)\}.$$

Donc ϑ' est $\mathbf{P}(\mathbf{G}_\delta \cdot \mathbf{F}_\delta) = \mathbf{A}$. (Cf. § 2, II).

[1]) Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. 13, p. 239.

[2]) Théorème de M. Lusin, *Ensembles analytiques*, p. 182.

IV. »Deuxième principe« de M. Lusin.

Soient $\mathcal{X}=$ l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $R = r_1, r_2, \ldots,$ la suite des nombres rationnels de cet intervalle. M et N étant deux sous-ensembles de R, posons $M \leq N$, lorsque M est semblable à une partie de N (ordonnée selon la grandeur de ses éléments), c-à-d. lorsqu'il existe une suite de nombres réels $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots,$ contenant tous les éléments de M et une suite $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots,$ contenue dans N telles que la condition $\xi^{(i)} < \xi^{(j)}$ entraîne $\eta^{(i)} < \eta^{(j)}$. En symboles:

$$(^0) \quad M \leq N \equiv \sum_{\xi\eta}\{\prod_m [r_m \epsilon M \to \sum_n (\xi^{(n)} = r_m)] \cdot \prod_k (\eta^{(k)} \epsilon N) \cdot \prod_{ij} [(\xi^{(i)} < \xi^{(j)}) \to \to (\eta^{(i)} < \eta^{(j)})]\}.$$

Passons, à présent, à la démonstration du „deuxième principe". Il s'agit de prouver que, *A et B étant deux ensembles analytiques* ($\subset \mathcal{X}$), *il existe deux ensembles D et H tels que*

$$A - B \subset D, \quad B - A \subset H, \quad D \cdot H = 0, \quad D \text{ et } H \text{ sont } \mathbf{CA}\,^{1)}.$$

Or, d'après un théorème général de M. Lusin [2]), il existe dans le produit $\mathcal{X} \times R$ un ensemble U (le „crible" de A), $\mathbf{F}_\sigma$ (relativement au carré $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$), tel que

$$(x \epsilon A) \equiv \{\text{l'ensemble } M_x = \underset{y}{E}[(x, y) \epsilon U] \text{ n'est pas bien ordonné}\}.$$

D'une façon analogue, soit V un $\mathbf{F}_\sigma$ situé dans $\mathcal{X} \times R$ et tel que

$$(x \epsilon B) \equiv \{\text{l'ensemble } N_x = \underset{y}{E}[(x, y) \epsilon V] \text{ n'est pas bien ordonné}\}.$$

Posons:

$$D = (\mathcal{X} - B) \cdot (\mathcal{X} - \underset{x}{E}(M_x \leq N_x)), \quad H = (\mathcal{X} - A) \cdot (\mathcal{X} - \underset{x}{E}(N_x \leq M_x)).$$

D et H sont les ensembles cherchés. Car, d'abord, si $x \epsilon A - B$, l'ensemble M_x n'est pas un ensemble bien ordonné, tandisque N_x en est un; on ne peut donc avoir $M_x \leq N_x$; par conséquent $x \epsilon \mathcal{X} - \underset{x}{E}(M_x \leq N_x)$. Ainsi $A - B \subset \mathcal{X} - \underset{x}{E}(M_x \leq N_x)$ et, en multipliant cette inclusion par $A - B \subset \mathcal{X} - B$, il vient $A - B \subset D$. Par raison de symétrie: $B - A \subset H$.

[1]) l. c. p. 210.
[2]) l. c. p. 193.

D'autre part, si $x \epsilon (\mathcal{X} - B) \cdot (\mathcal{X} - A)$, les ensembles N_x et M_x sont bien ordonnés. On a donc, soit $M_x \leq N_x$, soit $N_x \leq M_x$. On ne peut donc avoir $x \epsilon [\mathcal{X} - \underset{x}{E}(M_x \leq N_x)] \cdot [\mathcal{X} - \underset{x}{E}(N_x \leq M_x)]$. Par conséquent $D \cdot H = 0$.

Enfin pour démontrer que D est $\mathbf{CA}$, il suffit évidemment de démontrer que l'ensemble $\underset{x}{E}(M_x \leq N_x)$ est $\mathbf{A}$. Or, en tenant compte de (^{0}), on a:

$$M_x \leq N_x \equiv \sum_{\xi\eta}\{\prod_m [(x, r_m) \epsilon U \to \sum_n (\xi^{(n)} = r_m)] \cdot \prod_k [(x, \eta^{(k)}) \epsilon V] \cdot \prod_{ij} [(\xi^{(i)} < \xi^{(j)}) \to (\eta^{(i)} < \eta^{(j)})]\}.$$

On voit aussitôt que l'ensemble $\underset{x}{E}(M_x \leq N_x)$ est $\mathbf{P}[(\mathbf{G}_\delta + \mathbf{F}_\sigma)_\delta \cdot \mathbf{F}_{\sigma\delta} \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G})_\delta]$, donc $\mathbf{A}$.

V. Continus péaniens.

On appelle péanien chaque continu C qui est une image continue de l'intervalle. Cette condition équivaut à celle (de M. Sierpiński) que, pour chaque $\epsilon > 0$, C soit somme d'un nombre fini de continus de diamètres $\leqslant \epsilon$; ou encore: qu'il existe une suite infinie de continus telle que C soit somme d'un nombre fini parmi eux et que chacun d'eux ait le diamètre $\leqslant \epsilon$.

Pour exprimer cette condition en symboles, désignons par $\mathcal{X}$ l'espace compact dans lequel C est situé, par $\mathfrak{L}$ l'espace des sous-continus de $\mathcal{X}$ et par Ξ une suite variable d'éléments de $\mathfrak{L}$ (donc Ξ parcourt l'espace $\mathfrak{L}^{\aleph_0}$). La condition en question s'exprime alors de cette façon:

$$\prod_k \sum_\Xi \sum_n \left\{\left(C = \sum_{i=1}^{n} \Xi^{(i)}\right) \cdot \prod_m \left[\delta(\Xi^{(m)}) \leqslant \frac{1}{k}\right]\right\}.$$

Or, la fonction $\Xi^{(i)}$ et la somme (finie) étant continues (selon (b) et (i)), on en conclut que l'ensemble $\underset{\Xi C}{E}(C = \sum_{i=1}^{n} \Xi^{(i)})$ est fermé. Il en est de même de l'ensemble $\underset{\Xi}{E}\left[\delta(\Xi^{(m)}) \leqslant \frac{1}{k}\right]$, puisque le diamètre est une fonction continue (selon (iii)). Par conséquent, la famille des continus péaniens est relativement à l'espace $\mathfrak{L}$ un $(\mathbf{PF}_\sigma)_\delta$, donc un $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$ [1]) (car $\mathfrak{L}$ étant compact, $\mathfrak{L}^{\aleph_0}$ l'est également).

§ 5. Espace fonctionnel: $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

Soit $\mathcal{X}$ un espace compact et $\mathcal{Y}$ un espace complet séparable. Désignons [2]) par $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ l'ensemble de toutes les fonctions continues $f(x)$ définies pour chaque $x \in \mathcal{X}$ et dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{Y}$. Définissons la distance entre deux fonctions par la formule:

$$|f_1 - f_2| = \max_{x \in \mathcal{X}} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

L'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, ainsi métrisé, est un espace complet séparable [3]). On voit facilement que

(α) *la condition pour qu'une suite de fonctions converge dans l'espace* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ *est qu'elle converge uniformément (dans le sens habituel du mot)*;

(β) *la fonction* $y = f(x)$, *considérée comme fonction de deux variables* f *et* x, *est continue; autrement dit: si la suite* $f_n(x)$ *converge uniformément vers* $f_0(x)$ *et* $\lim_{n=\infty} x_n = x_0$, *alors* $\lim_{n=\infty} f_n(x_n) = f_0(x_0)$.

I. Fonctions biunivoques.

La condition pour que la fonction f soit biunivoque s'exprime de cette façon:

$$\prod_{x_1 x_2} [f(x_1) = f(x_2)] \rightarrow (x_1 = x_2).$$

Selon (β) l'ensemble $\underset{f x_1 x_2}{E} [f(x_1) = f(x_2)]$ est fermé. En tenant compte du fait que l'espace $\mathcal{X}$ est compact, on en conclut aussitôt que l'ensemble des fonctions biunivoques (donc bicontinues) est un $\mathbf{G}_\delta$.

[1]) Ce théorème est dû à M. Mazurkiewicz. Voir aussi la note suivante de M. Mazurkiewicz.

[2]) Par analogie à l'opération m^n de la théorie des nombres cardinaux.

[3]) Cf. K. Borsuk, ce volume, p. 165.

II. Nombres dérivés de Dini.

M. Banach m'a aimablement communiqué une application de la méthode exposée ici à un problème concernant les nombres dérivés. Soient notamment $\mathcal{X}$ = l'intervalle 01, $\mathcal{Y}$ = l'espace des nombres réels; la condition pour que la fonction $y = f(x)$, continue et périodique (de période 1), possède en un point (au moins) les deux nombres dérivés droits finis, s'exprime par la formule:

$$\sum_n \sum_x \prod_{h>0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqslant n.$$

Or, la fonction $f(x)$ étant continue, l'ensemble $\underset{xf}{E}\left\{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant n\right\}$ est fermé (pour h et n fixes). Par conséquent, l'ensemble $\underset{xf}{E} \prod_{h>0} \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant n$, comme égal à $\prod_{h>0} \underset{xf}{E} \left\{\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant n\right\}$, est aussi fermé et il en est encore de même de sa projection parallèle à l'axe des x, c.-à-d. de l'ensemble $A_n = \underset{f}{E} \sum_x \prod_{h>0} \left\{\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant n\right\}$. L'ensemble A_n étant non-dense (dans l'espace fonctionnel $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$), on en conclut que $\sum_n A_n$ est de I-re catégorie, ce qui implique en vertu du théorème de Baire l'existence des fonctions qui n'appartiennent pas à $\sum_n A_n$; ce sont donc certainement des *fonctions continues qui ne possèdent de dérivée en aucun point* [1]).

III. Développements orthogonaux.

L'application suivante est aussi due à M. Banach.

Soit $c_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, un système de fonctions continues donné (par ex. un système orthogonal). A chaque fonction continue $f(x)$ $0 \leqslant x \leqslant 1$, faisons correspondre la série

$$(\wedge) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \int_0^1 f(t)\, c_n(t)\, dt$$

(le „développement orthogonal" de la fonction f).

[1]) Voir S. Banach, Studia Math. 3

Soit Z l'ensemble des fonctions f pour lesquelles la série (^), converge vers $f(x)$ pour chaque x. En symboles:

$$(f \epsilon Z) \equiv \prod_x \prod_k \sum_n \prod_m |s_{n+m}(f, x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}$$

où $s_n(f, x)$ désigne la n-ème somme partielle de la série (^).

La fonction $s_n(f, x)$ étant une fonction continue (des arguments f et x), l'ensemble $\underset{xf}{E}|s_{n+m}(f, x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}$ est fermé. Par conséquent. Z est $\mathbf{CPC}(\mathbf{F}_{\delta\sigma\delta}) = \mathbf{CA}$ (relativement à l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ où $\mathcal{X} =$ l'intervalle 01 et $\mathcal{Y} =$ l'ensemble des nombres réels). [1])

Remarque. Dans le calcul fonctionnel on considère aussi des définitions de distance entre fonctions (continues ou non), différentes de celle adoptée au début de ce § [2]). Dans ces cas encore notre méthode est applicable, pourvue que la définition de la distance conduise à un espace complet séparable.

[1]) Il serait intéressant de reconnaître si cette évaluation de Z est la „meilleure" (même dans le cas de série de Fourier).

[2]) Voir par ex. M. Fréchet: *Espaces abstraits*, pp. 87—96, Paris 1928.

Sur l'ensemble des continus péaniens.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

M. Kuratowski a démontré par l'application d'une méthode générale [1]), que l'ensemble des continus péaniens et l'ensemble d'arcs simples d'un espace compact E est dans l'espace 2^E de classe $F_{\sigma\delta}$ au plus. Je me propose de démontrer que dans le cas où E est le cube-unité de l'espace euclidien à 3 dimensions (c.-à-d. le cube $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1$; $0 \leqslant z \leqslant 1$) ces ensembles sont *exactement de classe* $F_{\sigma\delta}$, c.-à-d. ne sont pas de classe inférieure.

Ce résultat est une conséquence du suivant.

Soit A un $F_{\sigma\delta}$ contenu dans l'intervalle I_0: $0 \leqslant x \leqslant 1$. Il existe un continu K, contenu dans le cube-unité et une décomposition semi-continue [2]) *de K possédant les propriétés suivantes: a) toute tranche de cette décomposition est une tranche de continuité; b) l'hyperespace de la décomposition est homéomorphe avec I_0; c) cette homéomorphie peut être établie de manière que toute tranche qui correspond à un point de A est un arc simple et toute tranche qui correspond à un point de $I_0 - A$ est un continu non-péanien.*

On a: $A = \prod_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{lk}$ les A_{lk} étant fermés et $A_{lk} \subset A_{l,k+1}$. Posons

$$r_{lk}(x) = \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l+2k+1}} \varrho(x, A_{lk}) \tag{1}$$

$$s_{lk}(x) = \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l+2k}} \varrho(x, A_{lk}) \tag{2}$$

et soit G_{lk} l'ensemble de points (x, y) du plan $z = 0$, déterminé

[1]) Ce volume, p. 269.

[2]) Comp. Kuratowski: Fund. Math. XI, p. 169—185 en part. p. 174—178.