Les opérations logiques et les ensembles projectifs.

Par

C. Kuratowski (Lwów) et A. Tarski (Varsovie)[1].

Une fonction propositionnelle $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, de n variables réelles, sera dite *projective*, si l'ensemble $\underset{x_1 \dots x_n}{E} \varphi(x_1, \dots, x_n)$[2], c.-à-d. l'ensemble des points de l'espace n-dimensionel qui satisfont à la fonction φ, est projectif[3].

Nous nous proposons de démontrer que *les cinq opérations logiques* (voir N1), *effectuées sur des fonctions projectives* (données en nombre fini), *conduisent toujours à des fonctions projectives.* Cela revient à dire que *tout ensemble de points définissable*[4]) *à l'aide de fonctions propositionnelles projectives est projectif.*

Dans les définitions que l'on rencontre habituellement, surtout en mathématiques classiques, les fonctions φ sont des fonctions projectives de types particulièrement simples: les ensembles $E\varphi$, qui leur correspondent, sont des courbes, surfaces etc. „élémentaires" au sens de l'Analyse (telles que le plan $z = x + y$, le paraboloïde hyperbolique $z = xy$, la surface $z = x^y$, l'ensemble des entiers positifs etc.). Toutes ces définitions définissent donc des ensembles projectifs; il est, d'autre part, remarquable que l'on peut nommer à l'aide de ces fonctions „élémentaires" des ensembles non-mesurables B, des fonctions non-représentables analytiquement, des ensembles projectifs de classe arbitraire[1]).

Pour nommer des ensembles non-projectifs (de façon explicite) il est donc indispensable de se servir, outre les variables réelles, des variables d'un type supérieur: qui admettent comme valeurs des ensembles de points[2]).

On voit ainsi que la notion d'ensemble projectif de M. Lusin s'impose d'une façon naturelle, lorsqu'on veut étudier les ensembles (ou fonctions) qui peuvent être nommés effectivement.

[1]) Les principaux résultats de cette note furent communiqués à la Soc. Pol. de Math. (Section de Lwów) aux séances du 10. VI et 15. X 1930.

[2]) Notation de M. Lebesgue. Si, par ex., $\varphi(x, y, z)$ signifie l'équation $z = x + y$, l'ensemble $\underset{x,y,z}{E}(z = x + y)$ est le plan donné par cette équation; si $\varphi(x, y) \equiv (x < y)$, l'ensemble $\underset{x,y}{E}(x < y)$ est la moitié supérieure du plan XY déterminée par la diagonale $x = y$.

[3]) Un ensemble de points est dit, selon M. Lusin, *projectif*, lorsqu'il s'obtient à partir d'un ensemble fermé, en effectuant deux opérations (un nombre fini de fois): 1° la projection orthogonale, 2° le passage au complémentaire.

[4]) Il s'agit ici des définitions *explicites* (cf. N4) et „arithmétiques" (ou „élémentaires") au sens établi dans la note précédente de M. Tarski (pp. 228 et 235). On rapprochera le théorème en question du théorème p. 239, énoncé sans employer la notion de fonction propositionnelle.

1. Notation logique. Formules de permutation.

α et β désignant deux propositions, α' désigne la négation de α, $\alpha + \beta$ la somme logique (= „α ou β"), $\alpha \cdot \beta$ le produit logique (= „α et β").

$\varphi(x)$ désignant une fonction propositionnelle, $\sum_x \varphi(x)$ veut dire: „il existe un x tel que $\varphi(x)$"; $\prod_x \varphi(x)$ veut dire: „quel que soit x, on a $\varphi(x)$"[3]).

A et B désignant deux ensembles de nombres réels et A_x désignant un ensemble dépendant d'un paramètre x, on a les équivalences évidentes:

$$(1) \qquad (x \in A)' \equiv (x \in A')$$

$$(2) \qquad (x \in A) + (x \in B) \equiv x \in (A + B)$$

[1]) Nous reviendrons sur ces problèmes à une autre occasion.

[2]) Les ensembles définissables non-projectifs sont donc d'ordre $n \geqslant 2$ au sens de la note précédente.

[3]) par ex. $\prod_x \sum_y (x < y)$ veut dire que pour chaque x il existe un y tel que $x < y$. La condition pour qu'une fonction $f(x)$ soit bornée s'exprime de cette façon: $\sum_y \prod_x |f(x)| < y$.

(3) $$(x \in A) \cdot (x \in B) \equiv x \in A \cdot B$$

(4) $$\sum_x (t \in A_x) \equiv t \in \sum_x A_x$$

(5) $$\prod_x (t \in A_x) \equiv t \in \prod_x A_x$$

les symboles: $' + \cdot \Sigma$ et Π désignant dans le membre gauche les cinq opérations logiques et dans le membre droit les opérations de la Théorie des ensembles (complémentaire, somme, partie commune).

En tenant compte de la formule

(6) $$t \in \underset{x}{E}\, \varphi(x) \equiv \varphi(t)$$

qui définit l'opération E, on déduit facilement des formules précédentes les identités:

(7) $$\underset{x}{E}\,(\varphi(x))' = (\underset{x}{E}\, \varphi(x))'$$

(8) $$\underset{x}{E}\,(\varphi(x) + \psi(x)) = \underset{x}{E}\, \varphi(x) + \underset{x}{E}\, \psi(x)$$

(9) $$\underset{x}{E}\,(\varphi(x) \cdot \psi(x)) = \underset{x}{E}\, \varphi(x) \cdot \underset{x}{E}\, \psi(x)$$

(10) $$\underset{x}{E} \sum_y \varphi(x, y) = \sum_y \underset{x}{E}\, \varphi(x, y)$$

(11) $$\underset{x}{E} \prod_y \varphi(x, y) = \prod_y \underset{x}{E}\, \varphi(x, y).$$

A titre d'exemple, démontrons la formule (10):

D'après (6): $t \in \underset{x}{E} \sum_y \varphi(x, y) \equiv \sum_y \varphi(t, y)$. En désignant par A_y l'ensemble $\underset{x}{E}\, \varphi(x, y)$, on a selon (6): $\varphi(t, y) \equiv t \in \underset{x}{E}\, \varphi(x, y) \equiv t \in A_y$, d'où d'après (4):

$$\sum_y \varphi(t, y) \equiv \sum_y t \in A_y \equiv t \in \sum_y A_y \equiv t \in \sum_y \underset{x}{E}\, \varphi(x, y).$$

2. Dualité logico-mathématique.

Les formules (7)—(11) montrent que l'opération E peut être permutée avec chacune des cinq opérations logiques, chacune d'elles changeant le sens logique en sens mathématique (ou vice-versa). On voit ainsi que, si la fonction propositionnelle $\alpha(x)$ s'obtient des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ (de variables différentes ou non) en effectuant les cinq opérations logiques, l'ensemble $\underset{x}{E}\, \alpha(x)$ s'obtient de *la même façon* des ensembles $\underset{x}{E}\, \varphi_1, \ldots, \underset{x}{E}\, \varphi_k$ [1]).

Ceci reste encore vrai, lorsque α est une fonction de *plusieurs* variables, car les formules précédentes se généralisent immédiatement en remplaçant la variable x par un système de n variables [2]).

La dualité logico-mathématique sera exprimée dans la suite encore sous une autre forme, en tenant compte de la proposition suivante qui attribue à l'opération logique Σ une *interprétation géométrique*:

(12) *L'ensemble* $\underset{x}{E} \sum_y \varphi(x, y)$ *est la projection de l'ensemble* $\underset{xy}{E}\, \varphi(x, y)$ *parallèle à l'axe* Y.

En effet, selon (6):

$$x_0 \in \underset{x}{E} \sum_y \varphi(x, y) \equiv \sum_y \varphi(x_0, y) \equiv \sum_y [(x_0, y) \in \underset{xy}{E}\, \varphi(x, y)]$$

et la dernière proposition veut dire qu'il existe un point à abscisse x_0 qui appartient à l'ensemble $\underset{xy}{E}\, \varphi(x, y)$; autrement dit, que x_0 appartient à la projection de cet ensemble sur l'axe X.

Exemples.

1) Soit A l'ensemble de nombres entiers. On définit la fonction „entier de x“, $\mathcal{E}(x)$ de cette façon:

[1]) Cela justifie l'emploi des mêmes symboles en deux sens, logique et mathématique, sans danger de malentendu. On voit aussi que le passage de la fonction propositionnelle $\alpha(x)$ à l'ensemble $\underset{x}{E}\, \alpha(x)$ n'est qu'une *autre façon de lire* l'expression qui définit $\alpha(x)$.

[2]) le cas $n = 0$ y compris; dans ce cas $\varphi(x)$ devient une proposition et, en désignant par 0 et 1 sa valeur logique (c. à d. le „faux“ ou le „vrai“) et en employant les mêmes symboles pour désigner l'ensemble vide et l'espace des nombres réels resp., on a:

$$(x \in 0) \equiv 0, \quad (x \in 1) \equiv 1, \quad \underset{x}{E}\, 0 = 0, \quad \underset{x}{E}\, 1 = 1.$$

$$[y = \mathcal{E}(x)] \equiv (y \in A) \cdot (y \leqslant x) \cdot (x < y + 1).$$

Par conséquent (form. 9):

$$\underset{xy}{\boldsymbol{E}}[y = \mathcal{E}(x)] = \underset{xy}{\boldsymbol{E}}(y \in A) \cdot \underset{xy}{\boldsymbol{E}}(y \leqslant x) \cdot \underset{xy}{\boldsymbol{E}}(x < y + 1).$$

On voit ainsi que „l'image géométrique" de la fonction $y = \mathcal{E}(x)$ est la partie commune de trois ensembles: 1° ensemble formé de droites horizontales à ordonnées entières, 2° demi-plan $y \leqslant x$, 3° demi-plan $x < y + 1$.

2) On a évidemment: $(x \geqslant 0) \equiv \underset{y}{\Sigma}(x = y^2)$. Par conséquent, l'ensemble des nombres non-négatifs $= \underset{x}{\boldsymbol{E}}(x \geqslant 0) = \underset{x}{\boldsymbol{E}}\underset{y}{\Sigma}(x = y^2) =$ $=$ projection parallèle à l'axe Y de la parabole $\underset{xy}{\boldsymbol{E}}(x = y^2)$.

3) Exprimons en symboles le fait que, si x est un nombre rationnel $(x \in R)$, il est de la forme y/z où y et z sont des entiers dont le deuxième est non-nul:

$$R = \underset{x}{\boldsymbol{E}}\underset{y}{\Sigma}\underset{z}{\Sigma}(y \in A) \cdot (z \in A) \cdot (xz = y) \cdot (z \neq 0).$$

L'ensemble $\underset{xyz}{\boldsymbol{E}}(y \in A) \cdot (z \in A) \cdot (xz = y) \cdot (z \neq 0)$ est, selon (9), la partie commune de 4 ensembles: de l'ensemble formé des plans $\underset{xyz}{\boldsymbol{E}}(y \in A)$, de l'ensemble formé des plans $\underset{xyz}{\boldsymbol{E}}(z \in A)$, du paraboloïde hyperbolique $y = xz$, de l'espace entier diminué du plan $z = 0$. En projetant cet ensemble d'abord sur le plan XY et puis sur l'axe X, on obtient, conformément à (12), l'ensemble R.

Remarques.

1) Dans tout ce qui précède l'hypothèse que les variables $x, y, z, \ldots$, parcourent l'ensemble des nombres réels n'est nullement essentiel. On pouvait supposer que x parcourt un ensemble *arbitraire* X, y un ensemble Y, différent ou non de X, z un ensemble Z etc. Le plan euclidien XY devrait alors être remplacé par le „produit combinatorique" des ensembles X et Y, c. à d. par l'ensemble des paires (x, y), où $x \in X$ et $y \in Y$ (d'une façon analogue, le produit combinatorique de X, Y, Z est l'ensemble de „points" (x, y, z), où $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$). La notion de projection s'impose alors d'elle-même.

2) D'après (12) à l'opération logique Σ correspond une opération géométrique *continue*. C'est à ce fait que tiennent des nombreuses applications topologiques du calcul logique (voir la note suivante de M. Kuratowski).

3) Quant à l'opération Π, on voit facilement que l'ensemble $\underset{x}{\boldsymbol{E}}\underset{y}{\Pi}\varphi(x, y)$ se compose de tous les x_0 tels que la droite $x = x_0$ est entièrement contenue dans l'ensemble $\underset{xy}{\boldsymbol{E}}\varphi(x, y)$. Cette opération géométrique n'étant pas, en général, continue, il est souvent plus avantageux de la ramener à l'opération Σ par la formule de de Morgan (généralisée):

$$\underset{x}{\Pi}\varphi(x) \equiv [\underset{x}{\Sigma}(\varphi(x))']'. \tag{13}$$

qui généralise la formule bien connue: $\alpha \cdot \beta \equiv (\alpha' + \beta')'$.

On voit ainsi que les cinq opérations logiques considérées se laissent réduire à trois: négation, somme, opération $\underset{x}{\Sigma}$.

4) Aux mêmes opérations se ramène aussi la relation d'implication: „α entraîne β", en symboles „$\alpha \rightarrow \beta$". Car:

$$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha' + \beta)$$

3. Ensembles et fonctions propositionnelles projectifs.

Les ensembles projectifs jouissent des propriétés fondamentales suivantes [1]):

a) le complémentaire d'un ensemble projectif est projectif,

b) la somme (ainsi que le produit) de deux ensembles projectifs est un ensemble projectif,

c) si $\underset{x}{\boldsymbol{E}}\varphi(x)$ est projectif, $\underset{xy}{\boldsymbol{E}}\varphi(x)$ l'est également [2]),

d) la projection d'un ensemble projectif est un ensemble projectif.

[1]) Voir par ex. N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, pp. 276—7.

[2]) L'ensemble $\underset{xy}{\boldsymbol{E}}\varphi(x)$ s'obtient en faisant passer une droite verticale par chaque point de l'ensemble $\underset{x}{\boldsymbol{E}}\varphi(x)$.

Nous déduirons de là, à l'aide des formules (7)—(9), (12), le théorème principal de cette note:

Les cinq opérations logiques effectuées sur des fonctions propositionnelles projectives conduisent toujours à des fonctions propositionnelles projectives.

D'abord, on peut conformément à 3) réduire les cinq opérations à trois: négation, somme et opération $\sum\limits_x$.

Or, 1°: si la fonction $\varphi(x)$ est projective, l'ensemble $\underset{x}{E}\varphi(x)$ l'est également; donc selon a): $(\underset{x}{E}\varphi(x))'$ est projectif, d'où d'après (7): $\underset{x}{E}(\varphi(x))'$ l'est également, ce qui veut dire que la fonction $(\varphi(x))'$ est projective.

2°: soit $\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \psi(x_{k_1}, \dots, x_{k_j}) + \chi(x_{l_1}, \dots, x_{l_m})$, les indices $k_1, \dots, k_j, l_1, \dots, l_m$ étant $\leqslant n$ [1]; les fonctions ψ et χ étant supposées projectives, on conclut de c) que les ensembles $\underset{x_1 \dots x_n}{E}\psi(x_{k_1}, \dots, x_{k_j})$ et $\underset{x_1 \dots x_n}{E}\chi(x_{l_1}, \dots, x_{l_m})$ sont projectifs et, comme selon (8):

$$\underset{x_1 \dots x_n}{E}\varphi(x_1, \dots, x_n) = \underset{x_1 \dots x_n}{E}\psi(x_{k_1}, \dots, x_{k_j}) + \underset{x_1 \dots x_n}{E}\chi(x_{l_1}, \dots, x_{l_m}),$$

on conclut de b) que φ est une fonction projective.

3°: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ étant supposée une fonction projective, il s'agit de prouver que $\sum\limits_{x_k}\varphi(x_1, \dots, x_n)$ l'est également [2]. Ceci est évident en cas où $k > n$, car dans ce cas $\sum\limits_{x_k}\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Supposons donc que $k \leqslant n$. Or, d'après (12), l'ensemble $\underset{x_1 \dots x_{k-1}\, x_{k+1} \dots x_n}{E}\ \sum\limits_{x_k}\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est une projection orthogonale de l'ensemble $\underset{x_1 \dots x_n}{E}\varphi(x_1, \dots, x_n)$; c'est donc, en raison de d) un ensemble projectif, c. q. f. d.

Exemples et remarques.

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction propositionnelle projective de deux variables. L'ensemble $M = \underset{xy}{E}\varphi(x, y)$ est donc un ensemble projectif plan. Soit Q l'ensemble con-

[1]) par ex. $\varphi(x, y, z) \equiv \psi(x, y) + \chi(y, z)$.

[2]) Si $k = n = 1$, c'est une proposition. Or, chaque proposition est une fonction propositionnelle projective, puisque l'espace entier ainsi que l'ensemble vide sont des ensembles projectifs. Cf. p. 243, note [2]).

stitué par la réunion de toutes les droites contenues dans M. En symboles:

$$(x, y) \in Q \equiv \sum_{abc}\{(ax + by = c) \cdot (a^2 + b^2 \neq 0) \cdot \prod_{uv}[(au + bv = c) \rightarrow \varphi(u, v)]\}\ ^{1)}.$$

L'ensemble $\underset{abcxy}{E}(ax + by = c)$ étant un ensemble fermé (dans l'espace à 5 dimensions) et l'ensemble $\underset{ab}{E}(a^2 + b^2 = 0)$ étant composé d'un seul point $(0, 0)$, il résulte directement de notre théorème que Q est un ensemble projectif [2]).

On voit ainsi que l'opération qui déduit Q de M ne nous fait pas sortir du domaine d'ensembles projectifs. C'ést le cas de la plupart des opérations que l'on a considérées en mathématiques; pour s'en convaincre il suffit d'écrire leurs définitions en symboles logiques.

En ce qui concerne l'énoncé du théorème du N 3, il est à remarquer que, si au lieu de supposer que les fonctions propositionnelles données sont projectives on fait des hypothèses plus restrictives, la fonction qui s'en obtient peut aussi être caractérisée de façon plus précise (par ex. que l'ensemble E qui lui correspond est mesurable B ou fermé etc.). On en trouvera des exemples dans la note suivante de M. Kuratowski. Un exemple de même genre est fourni par un théorème contenu implicitement dans la note précédente de M. Tarski [3]). Appelons notamment, „linéaire" toute fonction propositionnelle qui s'obtient par l'addition et multiplication effectuées à partir des fonctions propositionnelles de la forme $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ ou > 0, f désignant un polynôme de dégré 1 à coefficients entiers. Alors la propriété d'être une fonction propositionnelle linéaire est invariante relativement aux cinq opérations logiques considérées. En particulier, les ensembles de nombres réels définis à l'aide de fonctions linéaires sont des sommes finies d'intervalles (fermés ou ouverts) à extrémités rationnelles.

4. Définitions implicites.

Jusqu'ici nous avons supposé que la fonction „inconnue" α s'obtient d'un système de fonctions données $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, en exécutant sur elles des opérations logiques; le type de cette définition est

$$\alpha \equiv \Omega(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Ce sont les définitions proprement dites, ou définitions *explicites*.

Si l'on exécute les cinq opérations logiques considérées, ainsi que le changement de variables [4]) sur le système $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ augmenté de la fonction inconnue α

[1]) Q peut aussi être défini de cette façon:

$$(x, y) \in Q \equiv \sum_t \prod_{uv}\{[(u - x)\sin t = (v - y)\cos t] \rightarrow \varphi(u, v)\}.$$

[2]) qui peut, d'ailleurs, être non-mesurable B lorsque M est ouvert. Voir Nikodym et Sierpiński, Fund. Math. 7, p. 259.

[3]) voir les démonstrations des th. 1 et 2, pp. 232—233.

[4]) par. ex., si l'on passe de $\varphi(x, y)$ à $\varphi(x, z)$.

et si l'équation

$$\Omega(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \alpha) \equiv 0$$

admet une et une seule „racine" (pour α), on peut dire que cette équation définit α *implicitement*.

Un type très fréquent de définitions implicites présentent les définitions *par induction* (finie ou transfinie).

A l'aide des définitions implicites on peut sortir du domaine des ensembles projectifs. Elles conduisent à une nouvelle classe d'ensembles, „ensembles implicitement projectifs", qu'il serait intéressant d'étudier.

Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques[1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Je me propose d'exposer dans cette note une méthode qui permettra, dans bien des cas, d'évaluer d'une façon *mécanique* la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points donné, dès que la définition de cet ensemble sera écrite à l'aide des symboles logiques (expliqués dans la note précédente de M. Tarski et de moi).

La portée de cette méthode concerne non-spécialement les espaces euclidiens, mais, en général, les espaces complets séparables[2]). Elle est applicable, en particulier, à des espaces fonctionnels, à des espaces de sous-ensembles fermés d'un espace compact etc.

1. Espaces métriques. Définitions[3]).

On appelle espace *métrique* un ensemble $\mathcal{X}$ où la distance $|x-y|$ est définie, de sorte que $|x-x|=0$, $|x-y|=|y-x|\geqslant 0$ pour $x\neq y$, $|x-y|+|y-z|\geqslant|x-z|$.

Un espace est dit *séparable*, lorsqu'il contient une partie dense, finie ou dénombrable. Un espace métrique est dit *complet*, lorsque toute suite satisfaisant au critère de Cauchy est convergente; il est dit *compact*, si chaque suite contient une sous-suite convergente.

[1]) Les principaux résultats de cette note ont été présentés à la Soc. Pol. de Math. le 17. X. 1930 (à Varsovie) et le 21. II. 1931 (à Lwów).

[2]) Elle est parfois aussi applicable à des espaces non-complets; mais alors, en général, on doit rénoncer à considérer la notion d'ensemble projectif. Cf. ma note *„Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques"*, ce volume.

[3]) Voir, par ex. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin 1927, § 20.