Sur les ensembles définissables de nombres réels I.

Par

Alfred Tarski (Varsovie).

Les mathématiciens, en général, n'aiment pas à opérer avec la notion de définissabilité, leur attitude envers cette notion étant méfiante et réservée. Les raisons de cette aversion sont tout à fait claires et compréhensibles. D'abord le sens de la notion considérée n'est point bien précisé: un objet donné se laisse définir ou non, suivant le système déductif dans lequel on l'étudie, suivant les règles de définir que l'on a à observer et selon les termes que l'on admet comme primitifs. Il n'est donc loisible de se servir de la notion de définissabilité que dans un sens relatif; cette circonstance a été souvent négligée dans les considérations, et c'est là où est la source des nombreuses contradictions, dont l'exemple classique est fourni par l'antinomie bien connue de Richard[1]). La méfiance des mathématiciens envers la notion considérée se trouve enfin renforcée par une opinion assez courante suivant laquelle cette notion dépasse les limites proprement dites des mathématiques: le problème d'en préciser le sens, d'écarter les confusions et les malentendus qui s'y rattachent, d'en établir les propriétés fondamentales appartiendrait à une autre branche de la Science — à la Métamathématique.

Je tacherai de convaincre dans cet article le lecteur que l'opinion qui vient d'être citée n'est pas tout à fait juste. Sans doute la conception habituelle de la notion de définissabilité est de nature métamathématique. Je crois cependant d'avoir trouvé une méthode générale qui permet — avec une réstriction dont il sera question

[1]) Cf. A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, III Aufl., Berlin 1928, surtout le chap. 4; on peut y trouver aussi des données bibliografiques précises.

plus loin à la fin du § 1 — de réconstruire cette notion dans le domaine des mathématiques; cette méthode est également appliquable à certaines autres notions qui présentent le caractère métamathématique. Les notions ainsi réconstruites ne différent en rien des autres notions mathématiques et ne peuvent par suite éveiller des craintes ou des doutes; leur étude rentre complètement dans le domaine des raisonnements mathématiques normaux. En outre, il me semble que cette méthode permet d'aboutir à certains résultats que l'on ne réussirait pas d'obtenir, si l'on opérait uniquement avec la conception métamathématique des notions étudiées.

Une déscription tout à fait générale et abstraite de la méthode en question comporterait certaines difficultés techniques et, donnée d'emblée, manquerait de cette clarté que je veux lui donner. C'est pourquoi je préfère d'abord de la restreindre dans cet article à un cas spécial, particulièrement important au point de vue des questions qui intéressent actuellement les mathématiciens: je vais notamment analyser ici la notion de définissabilité par rapport à une seule catégorie d'objets, à savoir, aux ensembles de nombres réels Mes considérations auront par endroits l'allure d'ésquisse: je vais me contenter de construire des définitions précises, soit en omettant les conséquances qui en découlent, soit en les présentant sans démonstration. Le motif qui me fait renoncer pour le moment à développer entièrement le sujet est surtout celui que je ne veux pas causer de retard dans la publication des autres travaux liés génétiquement à l'idée directrice des considérations qui suivent[1]). Pour le même motif je remets à l'avenir la publication des résultats acquis a l'aide de la même méthode dans diverses autres recherches[2]).

[1]) Cf. les articles: C. Kuratowski et A. Tarski, *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*; C. Kuratowski, *Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques* — à paraître dans ce volume.

[2]) J'ai trouvé la méthode en question en 1929 et je l'ai exposée dans une conférence intitulée *Über definierbare Mengen reeller Zahlen*, tenue le 15. XII. 1930 dans la Soc. Pol. de Math., Section de Lwów; un peu plus tôt, à savoir le 12. VI. 1930, M. Kuratowski y a signalé dans sa conférence *Über eine geometrische Auffassung der Logistik* certains résultats obtenus par nous deux à l'aide de la même méthode (cf. les comptes-rendus dans les Ann. de la Soc. Pol. de Math. IX).

Il est à noter à ce propos qu'une méthode analogue peut être appliquée avec profit pour préciser diverses notions dans le domaine de la Métamathématique,

§ 1. La notion d'ensembles définissables de nombres réels au point de vue métamathématique.

Le problème posé dans l'article présent appartient au fond au type des problèmes qui se sont déjà présentés à maintes reprises au cours des recherches mathématiques. Notre intérêt se porte sur un terme dont nous nous rendons compte plus au moins précis quant à son contenu intuitif, mais dont la signification n'a pas été jusqu'à présent (tout au moins dans le domaine des mathématiques) établie d'une façon rigoureuse. Nous cherchons donc à construire une définition de ce terme qui, tout en satisfaisant aux postulats de la riguer méthodologique, saisirait en même avec justesse et précision la signification „trouvée" du terme. C'étaient bien les problèmes de cette nature que résolvaient les géomètres qui établissaient pour la prémière fois le sens des termes „mouvement", „ligne", „surface" ou „dimension"; ici je me pose un problème analogue qui concerne le terme „ensemble définissable de nombres réels".

Bien entendu, il ne faut pas pousser trop loin cette analogie: là il s'agissait de saisir les intuitions spatiales, acquises par voie empirique dans la vie courante, intuitions par la nature des choses vagues et confuses — ici entrent en jeu les intuitions plus claires et conscientes, celles de nature logique, relevant d'un autre domaine de la Science, à savoir, de la Métamathématique; là il y avait la nécessité de choisir une des plusieurs significations incompatibles qui s'imposaient, tandis qu'ici ce qu'il y a d'arbitraire dans l'acte d'établir le contenu du terme en question se réduit presque à zéro.

Je commencerai donc par présenter au lecteur le contenu du terme à envisager, et notamment tel qu'on l'entendait jusqu'à présent en Métamathématique. Les remarques que je vais faire à ce sujet ne sont point indispensables pour les considérations qui vont suivre — pas plus que la conaissance empirique des lignes et surfaces ne l'est pas pour une théorie mathématique de ces notions. Elles nous permetteront toutefois de nous emparer plus facilement des constructions, exposées aux §§ ultérieurs, et, avant tout, de juger si elles répondent en effet à la signification „trouvée" de la notion. Je me bornerai d'ailleurs à esquisser brièvement cette matière, sans me soucier trop de la précision et de la rigueur des énoncés.

p. ex celle de proposition vraie ou de fonction propositionnelle universellement valable („allgemeingültig"). Cf. mon ouvrage *Pojęcie prawdy w naukach dedukcyjnych* (*La notion de vérité dans les sciences déductives*, en polonais), C. R. d. séances de la Soc. d. Sc. et d. L. de Varsovie XXIV, 1931, Classe III, — à paraître prochainement aussi dans une des langues internationales; cf. aussi Ruch filozoficzny (Mouvement philosophique) XII, qui contient des comptes-rendus de mes deux conférences sur le même sujet du 8. X. 1930 à la Section Logique de la Soc. Phil. de Varsovie et du 16. XII. 1930 à la Soc. Pol. Phil. de Lwów.

Comme il a été dit, la notion de définissabilité doit être relativisée toujours au système déductif dans lequel on conduit la recherche. Or, dans notre cas, il est assez indifférent lequel des systèmes possibles d'Arithmétique des nombres réels sera choisi pour l'objet de la discussion. On pourrait p. ex., on le sait, fonder l'Arithmétique comme un certain chapitre de la Logique mathématique, privé par cela même des propres axiomes et des propres termes primitifs. Il en sera cependant plus avantageux de traiter ici l'Arithmétique comme une science déductive indépendante, constituant en quelque sorte une „sur-bâtisse" de la Logique.

On s'imaginera la construction de cette science plus au moins de la façon suivante: on admet comme base un système de la Logique mathématique et, sans en altérer les règles des démonstrations et des définitions, on en enrichit l'ensemble de termes primitifs et d'axiomes par l'adjonction de ceux spécifiques de l'Arithmétique. Comme base pareille pourrait nous servir p. ex. le système developpé dans l'oeuvre *Principia Mathematica* par MM. Whitehead et Russell [1]). Afin d'éviter des complications inutiles il est cependant commode de soumettre ce système à des simplifications préalables, et surtout d'en appauvrir le langage, tout en ayant soin de ne pas en détruire la faculté d'exprimer toute idée qui se laisserait formuler dans le système primitif. Les modifications porteraient donc sur les points suivants: la théorie des types ramifiée serait remplacée par celle simplifiée de sorte que l'axiome de réducibilité se trouverait rejeté [2]), et en même temps on adopterait l'axiome d'extensibilité; tous les termes constants, exceptés les termes primitifs, seraient à éliminer du système; enfin, nous supprimerions les variables propositionnelles et les variables parcourant les relations bi- et polynomes [3]).

[1]) Vol, I—III, Cambridge, 1925—27

[2]) Cf. L. Chwistek, *Über die Hypothesen der Mengenlehre*, Math. Zeitschr. 25, 1926 p. 439; R. Carnap, *Abriss der Logistik*, Wien 1929, pp. 19—22.

[3]) Une relation binome arbitraire R peut être remplacée dans tout raisonnement par l'ensemble des couples ordonnés $[x, y]$ vérifiant la formule $x R y$; les couples ordonnés se laissent aussi interpréter comme certains ensembles (Cf. C. Ku-

En vertu de ce dernier point, on n'aura dans le système simplifié que des variables qui parcourent les individus, c.-à-d. les objets d'ordre 1 (et en particulier les nombres réels, qui sont à traiter comme des individus), les ensembles (les classes) d'individus, c.-à-d. les objets d'ordre 2, les ensembles (les familles) de ces ensembles, c.-à-d. les objets d'ordre 3 etc. Il est désirable en outre de fixer avec exactitude la forme des signes, dont nous croyons nous servir comme des variables, et, notamment, de le faire suivant l'ordre des objets qu'elles représentent; ainsi on pourrait convenir d'employer les signes „$x'_{\prime}$“, „$x''_{\prime}$“, ... „$x^{(k)}_{\prime}$“, ... comme variables d'ordre 1, „$x'_{\prime\prime}$“, „$x''_{\prime\prime}$“, ... „$x^{(k)}_{\prime\prime}$“, ... comme variables d'ordre 2 et, d'une façon générale, les signes „$x'_{(l)}$“, „$x''_{(l)}$“, ... „$x^{(k)}_{(l)}$“, ... comme variables d'ordre l, parcourant les objets du même ordre [1]).

Comme termes primitifs du système de la Logique, il est commode d'adopter le signe de la négation „$-$“, ceux de la somme logique „$+$“ et du produit logique „$\cdot$“, les quantificateurs: général „Π“ et particulier „Σ“, enfin le signe „ϵ“ d'appartenance d'un élement à un ensemble; le sens de ces signes n'exige plus de commentaires [2]). Il faut ensuite ajouter à ce système les termes primitifs spécifiques de l'Arithmétique des nombres réels; comme tels peuvent servir, on le sait, trois signes „υ“, „μ“ et „σ“, qui suffisent pour définir toutes les notions de cette Science: les fonctions propositionnelles „$\upsilon(x^{(k)}_{\prime})$“, „$\mu(x^{(k)}_{\prime}, x^{(l)}_{\prime})$“ et „$\sigma(x^{(k)}_{\prime}, x^{(l)}, x^{(m)}_{\prime})$“ veulent dire respectivement autant que „$x^{(k)}_{\prime} = 1$“, „$x^{(k)}_{\prime}$ *et* $x^{(l)}_{\prime}$ *sont des nombres réels tels que* $x^{(k)}_{\prime} \leqslant x^{(l)}_{\prime}$“ et „$x^{(k)}_{\prime}$, $x^{(l)}_{\prime}$ *et* $x^{(m)}_{\prime}$ *sont des nombres réels tels que* $x^{(k)}_{\prime} = x^{(l)}_{\prime} + x^{(m)}_{\prime}$“.

ratowski, *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles*, Fund. Math. 2, 1921, p. 171; L. Chwistek, *Neue Grundlagen der Logik und Mathematik*, Math. Zeitschr. 30, p. 722). On peut éliminér d'une façon analogue les relations polynomes. Quant aux variables propositionnelles, M. J. v. Neumann s'en passe complètement dans son ouvrage: *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, Math. Zeitschr. 26, pp. 1–46.

[1]) Je n'emploie les symboles „$x^{(k)}_{\prime}$“, ..., „$x'_{(l)}$“, ..., „$x^{(k)}_{(l)}$“, ... que comme modèles: dans tout cas particulier au lieu des indices „(k)“ et „(l)“ il y aura un nombre convenables de petits traits.

[2]) Les signes „Π“ (resp. „Σ“) et „$\cdot$“ (resp. „$+$“) ne sont pas indispensables, car ils se laissent définir à l'aide des autres signes. Au fond, le signe „ϵ“ est aussi superflu, car au lieu des expressions telles que „$x \epsilon X$“ („*x est un élément de l'ensemble X*“) on pourrait employer les expressions équivalentes de la forme „$X(x)$“ („*x a la propriété X*“, resp. „*x remplit la condition X*“); je préfère toutefois de me conformer ici au langage courant des travaux mathématiques.

En dehors des variables et des constantes il est nécessaire d'avoir dans le système les signes techniques, à savoir, les parenthèses: la gauche „(“ et la droite „)“. De ces trois sortes des signes les expressions les plus diverses peuvent être formées. Une catégorie particulièrement importante des expressions constituent les ainsi dites fonctions propositionnelles [1]). Pour préciser cette notion, nous distinguons en premier lieu les fonctions propositionnelles primaires, à savoir, les expressions du type „$(x^{(k)}_{(m)} \epsilon x^{(l)}_{(m+1)})$,“ „$\upsilon(x^{(k)}_{\prime})$“, „$\mu(x^{(k)}_{\prime}, x^{(l)}_{\prime})$“ et „$\sigma(x^{(k)}_{\prime}, x^{(l)}_{\prime}, x^{(m)}_{\prime})$“. Puis, nous considérons certaines opérations sur les expressions, dites opérations fondamentales; ce sont: l'opération de négation, qui fait correspondre à une expression donnée „p“ sa négation „$\overline{p}$“, les opérations d'addition et de multiplication logiques, qui consistent à former de deux expressions données „p“ et „q“ leur somme logique „$(p+q)$“ et leur produit logique „$(p \cdot q)$“; enfin les opérations de généralisation et de particularisation, à l'aide desquelles on forme de l'expression „p“ et de la variable „$x^{(k)}_{(l)}$“ celles „$\prod\limits_{x^{(k)}_{(l)}} p$“ et „$\sum\limits_{x^{(k)}_{(l)}} p$“, c. à. d. la généralisation, resp. la particularisation de l'expression „p“ par rapport à la variable „$x^{(k)}_{(l)}$“. Nous appelons fonctions propositionnelles toutes les expressions qui s'obtiennent des fonctions primaires, en effectuant sur elles dans un ordre quelconque un nombre (fini) arbitraire des fois les cinq opérations fondamentales; en d'autres mots, l'ensemble de toutes les fonctions propositionnelles est le plus petit ensemble d'expressions qui contient comme éléments toutes les fonctions primaires et qui est clos par rapport aux opérations sus-indiquées. Voici quelques exemples des fonctions propositionnelles:

$$\sum_{x''_{\prime}} \sigma(x''_{\prime}, x'_{\prime}, x''_{\prime}),\quad \prod_{x'_{\prime}} ((x'_{\prime} \epsilon x'_{\prime\prime}) + (x'_{\prime} \epsilon x''_{\prime\prime})),\quad \sum_{x'_{\prime\prime\prime}} \prod_{x'_{\prime\prime}} (x'_{\prime\prime} \epsilon x'_{\prime\prime\prime}).$$

A ce mode de notation (qui s'écarte manifestement de la symbolique des *Principia Mathematica* [2])) nous apportons en pratique

[1]) Je tiens à souligner que j'emploie constamment le terme „fonction propositionnelle“ comme un terme métamathématique, désignant les expressions d'une catégorie (car on interprète parfois ce terme dans un sens logique, en lui attribuant une signification semblable à celles des termes „propriété“, „condition“ ou „classe“).

[2]) et qui se rapproche par contre de celle de Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Bd. I—III, Leipzig 1890—1905.

plusieurs simplifications. Ainsi, nous emploierons respectivement comme variables des trois ordres inférieurs le signes „$x^{(k)}$“, „$X^{(k)}$“ et „$\mathfrak{X}^{(k)}$“; au lieu de „x'“, „x''“, „x'''“, „x''''“ nous écrivons de plus „x“, „y“, „z“, „u“ et de même pour les deux ordres immédiatement supérieurs. Aux négations des fonctions propositionnelles primaires nous donnons la forme: „$(x^{(k)}_{(m)} \bar{\epsilon}\, x^{(l)}_{(m+1)})$“, „$\bar{v}(x^{(k)})$“, $\bar{\mu}(x^{(k)}, x^{(l)})$“ et „$\bar{\sigma}(x^{(k)}, x^{(l)}, x^{(m)})$“. Enfin, faisant abstraction de la manière automatique d'employer les parenthèses, appliquée plus haut dans la construction des fonctions propositionnelles [1]), nous omettons les parenthèses partout où il n'y a pas lieu à un malentendu.

On peut classer les fonctions propositionnelles selon l'ordre des variables qui y figurent: la fonction qui contient au moins une variable d'ordre n, sans en contenir d'ordres supérieurs, est dite fonction propositionnelle d'ordre n; ainsi p. ex. nous reconnaissons successivement dans les exemples donnés plus haut les fonctions d'ordre 1, 2 et 3. Parmi les variables qui entrent en composition d'une fonction propositionnelle donnée, on peut distinguer les variables libres (réelles) et liées (apparentes); la distinction précise entre ces deux catégories ne présente pas de difficultés [2]). Ainsi p. ex. dans la fonction „$\prod_{x}((x \bar{\epsilon}\, Y) + (x \epsilon Z))$“ les signes „$Y$“ et „$Z$“ figurent comme des variables libres et „x“ comme une variable liée. Les fonctions propositionnelles tout à fait dépourvues des variables libres, comme p. ex. l'expression „$\sum_{X}\prod_{x}(x \bar{\epsilon} X)$“, portent le nom de propositions.

Pour achever la construction du système formel d'Arithmétique, que j'esquisse ici, il faudrait à son tour énoncer explicitement les propositions (aussi bien celles du caractère logique général que celles qui présentent le caractère spécifique de l'Arithmétique) que

[1]) Ce mode est dû à M. Lewis (cf. son livre *A survey of symbolic logic*, Berkeley 1918, p. 357). En utilisant l'idée de M. Łukasiewicz, on pourrait d'ailleurs éviter complètement l'introduction des parenthèses dans le système en question: il suffirait à ce but d'employer, au lieu des expressions du type „$(x \epsilon X)$“, „$v(x)$“, „$\mu(x, y)$“, „$\sigma(x, y, z)$“, „$(p + q)$“ et „$(p \cdot q)$“ celles „$\epsilon x X$“, „$v x$“, „$\mu x y$“, „$\sigma x y z$“, „$+ p q$“ et „$\cdot p q$“ (cf. J. Łukasiewicz und A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, C. R. de séances de la Soc. d. Sc. et d. L. de Varsovie XXIII, 1930, Classe III, p. 33, resp. p. 3 de l'extrait).

[2]) Cf. p. ex. D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin 1928, p. 52—54; cf. aussi mon ouvrage, cité ici dans la note [2]), pp. 211—212.

l'on veut admettre comme axiomes et puis formuler les règles de déduction (démonstration), à l'aide desquelles il serait possible de former à partir des axiomes d'autres propositions dites thèses du système. La solution de ces questions ne causerait plus d'embarras; si je renonce à les analyser ici, c'est par ce qu'elles sont sans grande importance pour les considérations en cours [1]).

Plaçons nous maintenant au point de vue métamathématique. Pour chaque système déductif il se laisse construire, comme on sait, une science particulière, à savoir le „métasystème“, dans lequel on soumet à l'examen le système donné. Dans le domaine du métasystème entrent, par conséquent, tous les termes tels que „variable d'ordre n“, „fonction propositionnelle“, „variable libre de la fonction propositionnelle donnée“, „proposition“ etc., c.-à-d. les termes qui désignent les expressions individuelles du système considéré, les ensembles de ces expressions et les relations entre elles. D'autre part, rien ne nous empêche de faire entrer dans le métasystème l'ensemble des notions d'Arithmétique, donc en particulier celle de nombre réel, d'ensemble de nombres réels etc. En opérant avec ces deux catégories de termes (et avec les termes logiques généraux), on pourrait tenter de préciser le sens de la locution suivante „la suite finie donnée d'objets remplit (vérifie) la fonction propositionnelle donnée“. Une exécution correcte de cette tâche comporte des difficultés beaucoup plus considérables qu'elles ne paraissent d'abord, et nous ne savons jusqu'à présent de les surmonter complètement. Cependant, sous quelle forme et dans quelle mesure qu'on réussisse à résoudre ce problème, le sens intuitif de la locution envisagée paraît clair et univoque; il suffit donc de l'illustrer ici sur quelques exemples particuliers. Ainsi p. ex. la fonction „$X \epsilon \mathfrak{X}$“ est remplie par les suites — et seulement par elles — à deux termes, dont le premier terme est un ensemble d'individus X et le second une famille de tels ensembles $\mathfrak{X}$ qui contient X comme élément; la fonction „$\sigma(x, y, z)$“, resp. „$v(x) \cdot v(y) \cdot \mu(y, z)$“ est vérifiée par toutes les suites composées de trois nombres réels x, y et z où $x = y + z$, resp. $x = 1 = y \leqslant z$; la fonction „$\sum_{z}\sum_{u}(\sigma(x, y, z) \cdot \mu(u, z) \cdot v(u))$“ est remplie par les suites à deux termes

[1]) En ce qui concerne les axiomes du caractère logique et les règles de déduction, cf. mon ouvrage précité.

x et y, étant des nombres réels, où $x \geqslant y+1$; la fonction „$\sigma(x,y,y)+$ $+\overline{\sigma}(x,y,y)$“ est remplie par toute suite formée de deux individus, et la fonction „$(x \epsilon X)\cdot(x \overline{\epsilon} X)$“ n'est vérifiée par aucune suite; enfin, une fonction sans variables libres, c.-à.-d. une proposition, est soit remplie par la suite „vide“, soit n'est remplie par aucune suite, selon que cette proposition est vraie ou fausse. Comme on voit de ces exemples, dans toutes les situations où nous disons qu'une suite finie donnée vérifie la fonction propositionnelle donnée, il se laisse établir une correspondance biunivoque entre les termes de la suite et les variables libres qui figurent dans la fonction; en même temps l'ordre de tout objet qui constitue un terme de la suite est égal à celui de la variable correspondante. D'une importance toute spéciale est pour nous le cas particulier de la notion envisagée où la fonction propositionnelle contient une seule variable libre. Les suites qui vérifient une telle fonction se composent également d'un seul terme: au lieu des suites nous pouvons donc parler tout simplement des objets (étant des termes uniques des suites correspondantes) et dire qu'ils remplissent (vérifient) la fonction donnée. Ainsi p. ex. la fonction „$\sum\limits_{X}(x \epsilon X)$“ est vérifiée par tout individu arbitraire, la fonction „$\sum\limits_{x}(x \epsilon X)$“ par un ensemble arbitraire d'individus, excepté l'ensemble vide; la fonction „$\sigma(x,x,x)$“ par le seul individu, à savoir par le nombre réel 0, et la fonction „$\sum\limits_{y}(\mu(y,x)\cdot\sigma(y,y,y))$“ par les nombres réels non-négatifs et seulement par eux.

Revenons pour un instant sur le problème de formuler une définition correcte de la notion considérée. La méthode de construction la plus naturelle semble être ici celle de la recurrence: on dit, quelles sont les suites qui remplissent des fonctions primaires, puis, on établit la façon dont se comporte la notion „remplir“ envers chacune des opérations fondamentales. Cependant, quelle méthode qu'on ne choisisse, le problème posé présente des difficultés essentielles, liées à la théorie des types, que nous sommes évidemment contraints d'admettre — dans une forme ou dans l'autre — même sur le terrain du métasystème. Si l'on emploie notamment le terme „suite finie“ pour désigner simultanément les objets tels que les couples ordonnés[1]), les triples ordonnés etc., il ne peut plus y être question d'une définition uniforme du „remplissement d'une fonction par une suite“, les suites étant alors des objets des types les plus divers et de la structure logique la plus variée[2]). Et même si l'on admet l'interprétation du terme „suite finie“ telle que

1) Au sens des *Principia Mathematica* (Vol. I, p. 366).

2) Au fond nous sommes ici en présence non pas d'une seule notion de suite, mais d'une infinité de notions analogues ou — si l'on veut — d'une notion „systématiquement ambigüe“.

nous l'adopterons dans les §§ suivants et qui, d'ailleurs, n'est non plus univoque au point de vue typical (bien qu'à un moindre dègré que la précédente), on voit surgir encore une nouvelle complication, consistant en ce que tous les termes de la suite donnée doivent être des objets d'un même ordre, pendant qu'il peut y avoir dans la fonction propositionnelle des variables libres de plusieurs ordres différents. On peut néanmoins échapper à tous ces obstacles, pourvu de restreindre le domaine du discours à des fonctions propositionnelles, dont l'ordre ne dépasse pas un nombre naturel quelconque n donné d'avance; une idée de la méthode de construction qu'il faut alors appliquer est donnée par le procédé employé dans le § 3 de cet article. J'ignore, par contre, une voie qui permettre d'éviter les difficultés susindiquées dans le cas le plus général. Mais ce qui est plus grave, c'est que je ne sais pas le faire même dans divers cas particuliers de la notion considérée, cas dépourvus de toutes ambigüité typicale; ainsi p. ex. je ne sais pas définir correctement le sens de la locution particulièrement importante pour le contexte actuel „l'individu donné vérifie la fonction propositionnelle donnée (qui contient une certaine variable d'ordre 1 comme la seule variable libre)“, lorsque dans la fonction considérée peuvent figurer des variables liées d'ordres aussi élévés que l'on veut. Il n'y aurait donc à l'heure actuelle qu'une seule issue qui nous reste: étant donnée l'évidence et la lucidité intuitive de la notion considérée, l'ajouter à des notions primitives du métasystème et d'établir le mode de s'en servir par des axiomes et des règles convenables de déduction. Or, pour maintes raisons, d'ailleurs facilement acceptables, une telle solution ne paraît pas tout à fait satisfaisante[1]).

On peut faire correspondre d'une façon univoque à toute fonction propositionnelle à m variables libres l'ensemble de toutes les suites à m termes qui la remplissent, et, dans le cas où $m=1$, l'ensemble des objets correspondants. Par conséquent, une fonction qui contient comme la seule variable libre une variable d'ordre 1 détermine un certain ensemble d'individus, qui peut être, en particulier, celui de certains nombres réels. Les ensembles ainsi déterminés par des fonctions propositionnelles sont juste-

1) Si, sans nous décider d'ajouter la notion de remplissement aux notions primitives du métasystème, nous étions parvenus en même temps à montrer, qu'il est impossible d'introduire cette notion par aucune voie différente, nous serions amenés, en tenant compte des considérations ultérieures de ce §, à des conclusions assez inattendues: il en résulterait notamment que la notion de définissabilité ne se laisse pas préciser dans toute son étendue même sur le terrain de la Métamathématique et que nous n'en savons nous débarasser sur ce terrain que des mêmes cas particuliers qui se laissent reconstruire déjà dans la Mathématique.

Les problèmes traités dans le texte sont discutés de plus près dans mon ouvrage, cité ici p. 211—212 note[2]); j'y construis en particulier une définition précise du remplissement d'une fonction par une suite par rapport à des systèmes déductifs où l'ordre des fonctions propositionnelles est borné supérieurement.

ment des ensembles définissables dans le système considéré d'Arithmétique; on peut distinguer parmi eux les ensembles d'ordre 1, 2 etc., conformément à l'ordre des fonctions qui les déterminent.

La définition métamathématique des ensembles définissables, basée sur la notion de remplissement (des fonctions propositionnelles par les objets), prend donc la forme suivante:

L'ensemble X est un ensemble définissable, resp. ensemble définissable d'ordre n, lorsqu'il existe une fonction propositionnelle, resp. fonction propositionnelle tout au plus [1]) *d'ordre n, qui contienne une certaine variable d'ordre 1 comme la seule variable libre et qui satisfait en même temps à la condition: pour que $x \in X$, il faut et il suffit que x remplisse cette fonction.*

Comme exemples des ensembles définissables au sens de la définition qui précède — et notamment de ceux d'ordre 1 — peuvent servir: l'ensemble composé du seul nombre 0, celui de tous les nombres positifs, celui de tous les nombres x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et beaucoup d'autres; les fonctions qui déterminent respectivement ces ensembles sont: „$\sigma(x, x, x)$", „$\bar{\sigma}(x, x, x) \cdot \sum_{y} (\mu(y, x) \cdot \sigma(y, y, y))$", „$\sum_{y} \sum_{z} (\mu(y, x) \cdot \sigma(y, y, y) \cdot \mu(x, y) \cdot v(z))$" etc. Un exemple relativement simple de l'ensemble définissable d'ordre 2, dont on peut démontrer qu'il n'est pas d'ordre 1, est fourni par l'ensemble de tous les nombres naturels (y compris 0), déterminé par la fonction propositionnelle „$\prod_{X} (\sum_{y} (\sigma(y, y, y) \cdot (y \bar{\epsilon} X)) + \sum_{y} \sum_{z} \sum_{t} (\sigma(z, y, t) \cdot v(t) \cdot (y \epsilon X) \cdot (z \bar{\epsilon} X)) + (x \epsilon X))$". On peut multiplier indéfiniment des exemples pareils: tout ensemble particulier des nombres, auquel on a affaire dans les mathématiques, est un ensemble définissable, puisque nous n'avons d'autre moyen d'introduire individuellement un ensemble donné dans le domaine des considérations que celui de construire la fonction propositionnelle qui le détermine, et cette construction constitue par elle-même la preuve de la définissabilité de cet ensemble. D'autre part, il n'est pas difficile de montrer que la famille de tous les ensembles définissables (de-même que celle des fonctions qui les déterminent) n'est que dénombrable, tandis que la famille de tous les ensembles de nombres est indénombrable; il en suit déjà l'existence des ensembles indéfinissables. Plus encore: les ensembles définissables se laissent numéroter (c.-à-d. ranger dans une suite infinie ordinaire): en appliquant la méthode de la diagonale, on peut par conséquent définir dans le métasystème un ensemble concret qui ne soit pas définissable dans le système-même. Il n'y a évidemment aucune trace d'une antinomie quelconque, et ce fait ne paraîtra point paradoxal à qui se rend bien compte du caractère relatif de la notion de définissabilité.

[1]) Il est facile de montrer que l'on peut supprimer ici les mots „tout au plus" sans modifier l'étendue de la notion à définir.

Dans la suite, je chercherai à reconstruire partiellement dans la Mathématique même la notion qui vient d'être précisée. Il est visible à priori qu'il ne peut y être question d'une reconstruction mathématique totale de la notion de définissabilité: en effet, si c'était possible, nous pourrions encore, en appliquant la méthode de la diagonale, définir dans le système-même de l'Arithmétique un ensemble de nombres, qui ne soit pas définissable dans ce système, et nous nous trouverions cette fois en présence de l'antinomie authentique de Richard. Pour les mêmes raisons il est impossible de définir dans la Mathématique la notion générale d'ensemble définissable d'ordre n; en d'autres mots, il est impossible de construire une fonction, qui fasse correspondre à tout nombre naturel n la famille de tous les ensembles définissables d'ordre n. Je vais montrer par contre que l'on peut par des moyens purement mathématiques reconstruire les notions d'ensembles définissables d'ordre 1, 2, 3..., généralement n, où à la place de „n" se trouve un symbole constant quelconque dénotant un nombre naturel fixe et écrit dans le système décimal (ou autre) de numération.

L'idée de la reconstruction est en principe tout à fait simple. Le point du départ est donné par le fait que toute fonction propositionnelle détermine l'ensemble de toutes les suites finies qui la remplissent. Au lieu de la notion métamathématique de fonction propositionnelle, on peut se servir par conséquent de son substratum mathématique, à savoir de la notion d'ensemble de suites. J'introduirai donc en premier lieu les ensembles de suites qui sont déterminés par les fonctions propositionnelles primaires; puis, je définirai certaines opérations sur des ensembles de suites qui correspondent à cinq opérations fondamentales sur des expressions. Enfin, imitant la définition de la fonction propositionnelle, je préciserai la notion des ensembles définissables d'ordre n de suites; cette notion nous conduira facilement à celle d'ensembles définissables d'ordre n d'individus.

La construction tout entière sera réalisée en détails pour le cas $n=1$ et en grands traits pour $n=2$; je crois qu'après cet exposé la méthode de construction pour les valeurs plus élevées de n ne comportera plus de doutes, même dans les détails les plus petits.

§ 2. Les ensembles définissables d'ordre 1 au point de vue mathématique.

Comme domaine des considérations de ce § et du suivant peut nous servir un des systèmes connus de la Logique mathématique, comprenant en particulier le Calcul des classes, la Logique des relations et l'Arithmétique des nombres réels, ou bien — si l'on veut — un système de Logique avec un système d'Arithmétique, construit axiomatiquement sur lui. On peut utiliser à ce but p. ex. le système de la Logique des *Principia Mathematica*; il faudrait alors y remplacer la théorie des types ramifiée par celle simplifiée [1]).

La plupart des symboles, qui seront employés, se rencontrent universellement dans des travaux de la Théorie des Ensembles. En particulier, les symboles „O" et „$\{x, y, \dots z\}$" désigneront respectivement l'ensemble vide et l'ensemble composé d'éléments $x, y, \dots z$ en nombre fini: le symbole „$\underset{x}{E}\varphi(x)$" désignera celui de tous les objets x qui remplissent la condition φ. Le symbole „Nt" servira pour désigner l'ensemble de tous les nombres naturels (le zéro exclus) et le symbole „Rl" — celui de tous les nombres réels.

En outre, lorsque j'ai à revenir sur les considérations du § précédent, j'emploierai les signes logiques et arithmétiques qui y ont été convenus [2]).

L'instrument principal des recherches sera constitué ici par les suites finies de nombres réels et par les ensembles de telles suites.

[1]) Je passe complètement outre les autres simplifications du système, décrites au § 1, car elles seraient ici très incommodes.

[2]) Ainsi les symboles „$+$" et „$\cdot$" seront employés dans plusieurs sens différents: à savoir comme signes logiques, comme ceux de la Théorie des Ensembles et comme ceux d'Arithmétique. Je ne crois pas que ce fait puisse donner lieu à des erreurs dans les limites de cet article.

Quant à la notion de suite finie, je l'envisage ici de plus près, afin d'éviter tout malentendu possible.

Soit r une relation binome arbitraire. Par le domaine de la relation r, en symboles $D(r)$, je vais entendre l'ensemble $\underset{x}{E}$ (*il existe un y tel que xry*); de-même le contre-domaine $\mathfrak{a}(r)$ sera défini par la formule: $\mathfrak{a}(r) = \underset{y}{E}$ (*il existe un x tel que xry*). La relation r porte le nom de relation univoque (resp. uniplurivoque) ou fonction, lorsque pour tous x, y et z les formules: xrz et yrz entraînent constamment l'égalité $x=y$.

J'appelle suite finie toute relation univoque s où $\mathfrak{a}(s)$ est un sous-ensemble fini de Nt; l'ensemble de toutes les suites finies sera désigné par „Sf". Ce x unique, qui vérifie la formule xsk pour la suite donnée s et pour le nombre naturel k, sera dit k-ème terme de la suite s ou terme à indice k de la suite s et désigné par „s_k". Il n'est point indispensable (contrairement à l'interprétation habituelle de la notion de suite finie) que l'ensemble $\mathfrak{a}(s)$ soit un segment de l'ensemble Nt: une suite s peut p. ex. admettre son second terme, sans en admettre le premier. Lorsqu'on a $s \varepsilon Sf$ et $D(s) \subset Rl$, la suite s est dite suite finie de nombres réels Comme il suit de ces conventions, aux suites finies et même à celles de nombres réels appartient en particulier la relation vide, c.-à-d. telle que $D(r) = O = \mathfrak{a}(r)$.

Deux relations r et s sont identiques, en symboles $r=s$, lorsque les formules xry et xsy sont équivalentes, quels que soient x et y; en particulier, l'identité des suites r et s est caractérisée par les conditions: $\mathfrak{a}(r) = \mathfrak{a}(s)$ et $r_k = s_k$ pour tout $k \varepsilon \mathfrak{a}(r)$. Je désigne par le symbole „$r/_X$" (où r est une relation arbitraire et X un ensemble quelconque) toute relation t qui satisfait à la condition: pour x et y arbitraires on a xty, lorsque on a à la fois xry et $y \varepsilon X$. On en conclut que $s \varepsilon Sf$ implique toujours $s/_X \varepsilon Sf$: $s/_X$ est notamment une suite „choisie" de la suite s, c.-à-d. composée de tous les termes de la suite s dont les indices appartiennent à l'ensemble X. Réciproquement, la suite s pourrait être appellée „prolongement" de la suite $s/_X$.

Je vais m'occuper à présent des ensembles de suites finies. J'introduis avant tout les notions de domaine et de contredomaine d'un ensemble de suites (ou de relations arbitraires) S, en symboles $D(S)$ et $\mathfrak{a}(S)$; je les définis par formules:

Définition 1. a) $D(S) = \sum_{s \epsilon S} D(s)$;

b) $\mathit{\alpha}(S) = \sum_{s \epsilon S} \mathit{\alpha}(s)$;

Contredomaines des ensembles de suites finies sont évidemment les ensembles finis de nombres naturels.

Je distinguerai ici à son tour une catégorie d'ensembles de suites bien importante pour nous, à savoir les e n s e m b l e s h o m o g è n e s:

Définition 2. *S est un e n s e m b l e h o m o g è n e d e s u i t e s (ou de relations arbitraires), lorsque $\mathit{\alpha}(s) = \mathit{\alpha}(S)$ pour tout $s \epsilon S$.*

Tous les ensembles de suites dont nous aurons affaire dans ces considérations seront des ensembles homogènes.

Ceci s'explique par le fait que j'opère ici avec des ensembles de suites comme avec des correspondants mathématiques des fonctions propositionnelles; or, tous les ensembles de suites, déterminés par des fonctions propositionnelles, se composent de suites ayant le même contredomaine: ils sont donc homogènes au sens de la déf. 2 (cf. à ce propos § 1).

L'ensemble homogène le plus vaste de suites à contredomaine donné N est l'ensemble R_N, déterminé par la formule:

Definition 3. $R_N = Sf \cdot \underset{s}{E}(\mathit{\alpha}(s) = N)$.

A tout ensemble homogène S de suites on peut faire correspondre un ensemble fini $N \subset Nt$ tel que $S \subset R_N$, en posant notamment: $N = \mathit{\alpha}(S)$; excepté le cas de $S = 0$, cette correspondance est univoque. Inversement, lorsque $S \subset R_N$, S est un ensemble homogène de suites et on a (de nouveau sauf le cas où $S = 0$) $\mathit{\alpha}(S) = N$.

Je définis ensuite certains ensembles spéciaux de suites U_k, $M_{k,l}$ et $S_{k,l,m}$, que j'appellerai e n s e m b l e s p r i m a i r e s:

Définition 4. a) $U_k = R_{\{k\}} \cdot \underset{s}{E}(s_k = 1)$;

b) $M_{k,l} = R_{\{k,l\}} \cdot \underset{s}{E}(s_k \epsilon Rl,\ s_l \epsilon Rl \ \text{et}\ s_k \leqslant s_l)$;

c) $S_{k,l,m} = R_{\{k,l,m\}} \cdot \underset{s}{E}(s_k \epsilon Rl,\ s_l \epsilon Rl,\ s_m \epsilon Rl \ \text{et}\ s_k = s_l + s_m)$.

Ainsi les ensembles primaires sont des ensembles de suites déterminés par les fonctions propositionnelles primaires d'ordre 1: „$\upsilon(x^{(k)})$", „$\mu(x^{(k)}, x^{(l)})$" et „$\sigma(x^{(k)}, x^{(l)}, x^{(m)})$".

Ceci dit, j'introduis cinq o p é r a t i o n s f o n d a m e n t a l e s sur les ensembles de suites: c o m p l é m e n t a t i o n, a d d i t i o n et m u l t i p l i c a t i o n, ainsi que s o m m a t i o n et p r o d u i s a t i o n p a r r a p p o r t a u x k-è m e s t e r m e s; les résultats de ces opérations seront désignés respectivement par les symboles „$\overset{\circ}{\overline{S}}$", „$S \overset{\circ}{+} T$", „$S \overset{\circ}{\cdot} T$", „$\overset{\circ}{\underset{k}{\Sigma}} S$" et „$\overset{\circ}{\underset{k}{\Pi}} S$". Toutes ces opérations donnent toujours comme résultat les ensembles homogènes de suites.

Définition 5. $\overset{\circ}{\overline{S}} = R_{\mathit{\alpha}(S)} - S$.

Définition 6. a) $S \overset{\circ}{+} T = R_{\mathit{\alpha}(S)+\mathit{\alpha}(T)} \cdot \underset{u}{E}(u/_{\mathit{\alpha}(S)} \epsilon S \ \text{ou}\ u/_{\mathit{\alpha}(T)} \epsilon T)$;

b) $S \overset{\circ}{\cdot} T = R_{\mathit{\alpha}(S)+\mathit{\alpha}(T)} \cdot \underset{u}{E}(u/_{\mathit{\alpha}(S)} \epsilon S \ \text{et}\ u/_{\mathit{\alpha}(T)} \epsilon T)$.

Comme il résulte de ces définitions, l'ensemble $\overset{\circ}{\overline{S}}$ se compose de toutes les suites dont le contredomaine $= \mathit{\alpha}(S)$ et qui n'appartiennent pas à l'ensemble S; l'ensemble $S \overset{\circ}{+} T$, resp. $S \overset{\circ}{\cdot} T$, est formé de toutes les suites à contredomaine $= \mathit{\alpha}(S) + \mathit{\alpha}(T)$, et dont on peut choisir (par une réduction convenable du contredomaine) soit une suite de l'ensemble S, soit une suite de l'ensemble T, resp. les deux suites pareilles à la fois. Ainsi p. ex. $\overset{\circ}{\overline{U_1}} \overset{\circ}{+} M_{2,3}$ est l'ensemble de toutes les suites s composées de trois nombres réels s_1, s_2 et s_3 tels que l'on ait $s_1 \neq 1$ ou $s_2 \leqslant s_3$; $M_{1,2} \overset{\circ}{\cdot} M_{2,3} \overset{\circ}{\cdot} S_{3,4,4}$ est l'ensemble de toutes les suites s à quatre termes s_1, s_2, s_3 et s_4 vérifiant la formule: $s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 = 2 . s_4$.

Les opérations de complémentation, d'addition et de multiplication, qui viennent d'être introduites, se rapprochent des opérations correspondantes de l'Algèbre des Ensembles et présentent beaucoup de propriétés formelles analogues, surtout dans le domaine des ensembles homogènes; ainsi p. ex. elles remplissent les l o i s c o m m u t a t i v e, a s s o c i a t i v e et les d e u x l o i s d i s t r i b u t i v e s, la l o i d e D e - M o r g a n: $\overset{\circ}{\overline{S \overset{\circ}{+} T}} = \overset{\circ}{\overline{S}} \overset{\circ}{\cdot} \overset{\circ}{\overline{T}}$, les formules: $S \overset{\circ}{+} 0 = S$, $S \overset{\circ}{\cdot} 0 = 0$, $S \overset{\circ}{\cdot} \overset{\circ}{\overline{S}} = 0$ et plusieurs autres.

Cette correspondance n'est gâtée que par un seul détail, à savoir, qu'il n'existe aucun ensemble ayant exactement les mêmes propriétés formelles que l'ensemble universel *1* de l'Algèbre des Ensembles et qu'il existe beaucoup d'ensembles différents S tels que $\overset{\circ}{\overline{S}} = 0$ (parmi les ensembles homogènes tous les ensembles du type R_N présentent cette propriété), tandis que $\overset{\circ}{\overline{0}}$ est un ensemble spécial, à savoir R_0, composé d'un seul élément — de la relation vide. En conséquence, la formule: $S \overset{\circ}{+} \overset{\circ}{\overline{S}} = T \overset{\circ}{+} \overset{\circ}{\overline{T}}$ n'est pas remplie d'une façon générale, la l o i d e l a d o u b l e c o m p l é m e n t a t i o n: $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{S}}}} = S$ est en défaut dans le cas ou $\overset{\circ}{\overline{S}} = 0$, la d e u x i è m e loi de De-Morgan: $\overline{S \overset{\circ}{\cdot} T} = \overset{\circ}{\overline{S}} \overset{\circ}{+} \overset{\circ}{\overline{T}}$ exige l'hypothèse: $S \overset{\circ}{\cdot} T \neq 0$ etc. Au point de vue pratique, ce fait n'entraîne pas trop d'inconvénients: au lieu de l'ensemble 1, on peut se servir d'habitude de celui $\overset{\circ}{\overline{0}}$, qui possède une série de propriétés analogues, p. ex.: $S \overset{\circ}{+} \overset{\circ}{\overline{0}} = S \overset{\circ}{+} \overset{\circ}{\overline{S}}$, $S \overset{\circ}{\cdot} \overset{\circ}{\overline{0}} = S$ etc.

Si nous nous bornions à n'envisager que les sous-ensembles d'un R_N quelconque, en admettant: $R_N = 1$, et ne changions qu'en un seul point la déf. 5, à savoir, en posant: $\overset{\circ}{\overline{0}} = 1$, les opérations $\overset{\circ}{\overline{S}}$, $S \overset{\circ}{+} T$ et $S \overset{\circ}{\cdot} T$ coïncideraient entièrement, comme il est facile d'apercevoir, avec celles qui leur correspondent dans l'Algèbre des Ensembles.

Les opérations d'addition et de multiplication se laissent étendre facilement à un nombre fini arbitraire (et même à l'infinité) d'ensembles de suites; les résultats de ces opérations généralisées peuvent être désignés respectivement par les symboles „$S_1 \overset{\circ}{+} S_2 \overset{\circ}{+} \ldots \overset{\circ}{+} S_n$“ et „$S_1 \overset{\circ}{\cdot} S_2 \overset{\circ}{\cdot} \ldots \overset{\circ}{\cdot} S_n$“.

Définition 7. a) $\mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} S = R_{\alpha(S)-\{k\}} \cdot \mathop{E}_{s}$ *(il existe une suite $t \in R_{\alpha(S)}$ vérifiant les formules: $t_{\alpha(S)} = s$ et $t \in S$)*;

b) $\mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} S = R_{\alpha(S)-\{k\}} \cdot \mathop{E}_{s}$ *(pour toute suite $t \in R_{\alpha(S)}$ la formule: $t/_{\alpha(S)} = s$ entraîne la formule: $t \in S$).*

Soit S un ensemble homogène arbitraire de suites. Si $k \bar{\in} \alpha(S)$, les ensembles $\mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} S$ et $\mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} S$ coïncident, d'après la définition qui précède, avec l'ensemble S. Si, par contre, $k \in \alpha(S)$, alors $\mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} S$ est l'ensemble de toutes les suites qui s'obtiennent de celles de l'ensemble S par l'omission des k-èmes termes, et l'ensemble $\mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} S$ se compose de toutes les suites ne contenant pas les k-èmes termes et dont tout prolongement par l'adjonction du k-ème terme appartient à l'ensemble S. Ainsi p. ex. on constate aussitôt que l'ensemble $\mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{2} (M_{2,1} \overset{\circ}{\cdot} S_{2,2,2})$ est formé de toutes les suites qui se composent d'un seul terme s_1 étant un nombre réel non-négatif; l'ensemble $\mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{3} (S_{1,2,3} \overset{\circ}{\cdot} S_{2,1,3})$ est composé de toutes les suites à deux termes identiques $s_1 = s_2$; $\mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{2} M_{1,2}$ est un ensemble vide, et $\mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{3} (\overset{\circ}{\overline{U}}_3 \overset{\circ}{+} S_{1,2,3})$ est l'ensemble de toutes les suites s à deux termes où $s_1 = s_2 + 1$.

Les lois qui expriment les propriétés formelles des opérations $\mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} S$ et $\mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} S$ et les relations entre ces opérations et celles précédement examinées sont tout à fait analogues, surtout en ce qui concerne les ensembles homogènes, aux lois de le Logique sur les

quantificateurs „Σ“ et „Π“, les signes de la négation, de la somme et du produit logiques. A titre d'exemple, j'en mentionne les formules: $\mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} \mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{l} S = \mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{l} \mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} S$, $\mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} \mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{l} S = \mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{l} \mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} S$, $\mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} \mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{l} S \subset \mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{l} \mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} S$, puis les lois distributives: $\mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} (S \overset{\circ}{+} T) = \mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} S \overset{\circ}{+} \mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} T$ et $\mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} (S \overset{\circ}{\cdot} T) = \mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} S \overset{\circ}{\cdot} \mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} T$, et enfin celles de De-Morgan: $\overset{\circ}{\overline{\mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} S}} = \mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} \overset{\circ}{\overline{S}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} S}} = \mathop{\overset{\circ}{\Sigma}}_{k} \overset{\circ}{\overline{S}}$ (cette dernière formule est en défaut dans le cas où $\mathop{\overset{\circ}{\Pi}}_{k} S = 0$ [1])).

L'analogie entre les lois qui viennent d'être discutées et celles de la Logique n'est point due au hasard. Comme il est facile de s'en rendre compte, il se laisse établir entre les opérations fondamentales sur les fonctions propositionnelles, étudiées au § 1, et celles sur les ensembles de suites, introduites dans les déf. 5—7, une correspondance très stricte, à savoir dans le sens suivant: $f_1, f_2, \ldots$ étant des fonctions propositionnelles arbitraires (d'ordre 1) et $S_1, S_2, \ldots$ les ensembles de suites qu'elles déterminent, toute fonction obtenue par une des opérations fondamentales effectuées sur les fonctions données détermine l'ensemble de suites qui se laisse obtenir à l'aide de l'opération convenable effectuée sur les ensembles correspondants à ces fonctions. Une certaine digression de ce phénomène général ne se produit que dans le cas où la fonction considerée est obtenue par la négation d'une fonction déterminant l'ensemble vide; ainsi p. ex. à la fonction „$\overline{\sigma(x', x'', x''') \cdot \overline{\sigma}(x', x'', x''')}$“ vient correspondre, à vrai dire, l'ensemble $R_{\{1,2,3\}} = S_{1,2,3} \overset{\circ}{+} \overset{\circ}{\overline{S}}_{1,2,3}$ et non pas l'ensemble $R_0 = \overset{\circ}{\overline{S_{1,2,3} \overset{\circ}{\cdot} \overset{\circ}{\overline{S}}_{1,2,3}}}$ (cf. les remarques au sujet des déf. 5—6).

Je n'ai à mentionner ici qu'une opération encore sur des ensembles de suites, à savoir, le remplacement de l'indice k par l dans les suites d'un ensemble donné; le rèsultat de cette opération sera désigné par le symbole „$\frac{k}{l} S$“.

Définition 8. $\frac{k}{l} S = Sf \cdot \mathop{E}_{t}$ *(il existe une suite $s \in S$ telle que l'on a soit $k \in \alpha(s)$, $\alpha(t) = \alpha(s) - \{k\} + \{l\}$, $s_k = t_l$ et $s/_{\alpha(s)-\{k\}} = t/_{\alpha(s)-\{k\}}$, soit $k \bar{\in} \alpha(s)$ et $s = t$).*

Ainsi, lorsque S est un ensemble homogène de suites, $l \in Nt$ et $k \in \alpha(S)$, l'ensemble $\frac{k}{l} S$ est formé de toutes les suites qui se laissent obtenir de certaines

[1]) Pour les raisons dont il a été question plus haut, p. 225.

suites de l'ensemble S, en remplaçant dans les k-èmes termes l'indice k par l et sans toucher aux autres termes; p. ex. $\frac{2}{3} M_{1,2} = M_{1,3}$, $\frac{3}{2} S_{1,2,3} = S_{1,2,2}$, $\frac{1}{2}(\overline{\overset{\circ}{M}}_{1,2} \overset{\circ}{\cdot} \overset{\circ}{\underset{1}{\Sigma}} S_{1,2,3}) = \overline{\overset{\circ}{M}}_{2,2} \overset{\circ}{\cdot} \overset{\circ}{\underset{1}{\Sigma}} S_{1,2,3}$ etc. Si, par contre, k n'appartient pas au contre-domaine de l'ensemble S de suites, on a $\frac{k}{l} S = S$; p. ex. $\frac{3}{2} U_1 = U_1$, $\frac{2}{3} \overset{\circ}{\underset{2}{\Sigma}} S_{2,1,2} = \overset{\circ}{\underset{2}{\Sigma}} S_{2,1,2}$ etc.

L'opération $\frac{k}{l} S$, effectuée sur un ensemble homogène de suites, donne toujours comme résultat un ensemble homogène de suites; si notamment $S \subset R_N$, où $N \subset Nt$, et $l \in Nt$, on a $\frac{k}{l} S \subset R_{N-\{k\}+\{l\}}$ ou $\frac{k}{l} S \subset R_N$, suivant que $k \in N$ ou $k \bar{\in} N$.

Dans le même sens, que les opérations fondamentales sur les fonctions propositionnelles correspondent à celles sur les ensembles de suites, certaine opération, que je n'ai pas eu l'occasion de mentionner au § 1, vient correspondre à l'opération $\frac{k}{l} S$. C'est notamment l'opération de substitution de la variable libre „$x^{(l)}$" à la variable libre „$x^{(k)}$" dans une fonction propositionnelle donnée; la signification intuitive de cette opération est d'ailleurs tout à fait claire. Ainsi p. ex. en substituant dans la fonction propositionnelle „$\overline{\mu}(x, y) \,.\, \underset{x}{\Sigma}\, \sigma(x, y, z)$" la variable libre „$y$" à la variable libre „$x$", on obtient: „$\overline{\mu}(y, y) \overset{\circ}{\cdot} \underset{x}{\Sigma}\, \sigma(x, y, z)$"; ces fonctions déterminent respectivement les ensembles de suites: $S = \overline{\overset{\circ}{M}}_{1,2} \overset{\circ}{\cdot} \overset{\circ}{\underset{1}{\Sigma}} S_{1,2,3}$ et $\frac{1}{2} S = \overline{\overset{\circ}{M}}_{2,2} \overset{\circ}{\cdot} \overset{\circ}{\underset{1}{\Sigma}} S_{1,2,3}$.

Maintenant nous sommes à même de préciser la notion de définissabilité d'ordre 1 en ce qui concerne d'abord les ensembles de suites finies de nombres réels et puis les ensembles de nombres réels eux-mêmes; la famille des ensembles définissables de suites sera désignée par „$\mathfrak{Df}$" et celle des ensembles définissables d'individus par „$\mathfrak{D}_1$". Au lieu de dire „définissable d'ordre 1" nous dirons aussi „élémentairement définissable" ou „arithmétiquement définissable".

Définition 9. *$\mathfrak{Df}_1$ est le produit (partie commune) de toutes les familles d'ensembles $\mathfrak{X}$ qui remplissent les conditions suivantes: (α) $U_k \in \mathfrak{X}$, $M_{k,l} \in \mathfrak{X}$ et $S_{k,l,m} \in \mathfrak{X}$ pour nombres naturels arbitraires k, l et m; (β) si $S \in \mathfrak{X}$, on a aussi $\overset{\circ}{\overline{S}} \in \mathfrak{X}$; ($\gamma$) si $S \in \mathfrak{X}$ et $T \in \mathfrak{X}$, on a aussi $S \overset{\circ}{+} T \in \mathfrak{X}$ et $S \overset{\circ}{\cdot} T \in \mathfrak{X}$; ($\delta$) si $k \in Nt$ et $S \in \mathfrak{X}$, on a aussi $\overset{\circ}{\underset{k}{\Sigma}} S \in \mathfrak{X}$ et $\overset{\circ}{\underset{k}{\Pi}} S \in \mathfrak{X}$.*

Définition 10. *$\mathfrak{D}_1 = \underset{X}{E}$ (il existe un ensemble $S \in \mathfrak{Df}_1$ tel que $D(S) = X$ et $Q(S)$ est un ensemble composé d'un seul élément).*

Or, la question s'impose si la définition, qui vient d'être construite et dont la rigueur formelle n'éveille aucune objection, est également juste au point de vue matériel; en d'autres mots, saisit-elle en effet le sens courant et intuitivement connu de la notion? Cette question ne contient, bien entendu, aucun problème de la nature purement mathématique, mais elle est néanmoins d'une importance capitale pour nos considérations.

Afin de mettre cette question sous une forme plus précise, admettons que la justesse matérielle de la définition métamathématique des ensembles définissables d'ordre n, à laquelle nous sommes parvenus au § précédent, soit hors de doute. La question proposée se ramène alors au problème tout à fait concret, à savoir, si la déf. 10 est équivalente à un certain cas particulier de cette définition métamathématique, notamment au cas où $n = 1$? Ce dernier problème appartient manifestement au domaine de la Métamathématique et s'y laisse résoudre facilement dans le sens affirmatif.

En effet, nous avons déjà constaté qu'il y a une stricte correspondance entre les ensembles primaires de suites et les opérations fondamentales sur des ensembles d'une part et les fonctions propositionnelles primaires d'ordre 1 et les opérations fondamentales sur des expressions d'autre part; nous avons même rigoureusement précisé la nature de cette correspondance (p. 224 et 227). En nous basant sur ces faits et en rapprochant la déf. 9 avec celles du § 1 de la fonction propositionnelle et de son ordre, nous pouvons sans peine montrer par recurrence que la famille $\mathfrak{Df}_1$ se compose d'ensembles de suites qui sont déterminés par des fonctions propositionnelles d'ordre 1 et seulement d'eux [1]). Il en résulte presque immédiatement que la famille $\mathfrak{D}_1$ coïncide avec celle des ensembles définissables d'ordre 1 dans le sens du § 1.

Si nous désirons acquérir la certitude subjective de la justesse matérielle de la déf. 10 et de sa conformité à l'intuiton, sans sortir du domaine des considérations strictement mathématiques, nous sommes contraints de recourrir à la voie empirique. On constate notamment, en examinant divers ensembles particuliers qui sont élémentairement définis dans le sens intuitif de cette notion, qu'ils appartiennent tous à la famille $\mathfrak{D}_1$; réciproquement, on parvient à construire une définition élémentaire pour tout ensemble particulier de cette

[1]) La défectuosité, mentionnée p. 227, de la correspondance entre la négation des fonctions propositionnelles et la complémentation des ensembles de suites ne complique la démonstration que de peu.

famille. Plus encore: on s'aperçoit aisément que la même méthode de raisonnement, tout à fait automatique, est applicable dans tous les cas.

Voici en quoi consiste cette méthode.

Soit A un ensemble arbitraire de nombres, élémentairement défini à l'aide des notions primitives „1", „$\leqslant$", et „$+$". La définition de l'ensemble A peut être mise alors sous la forme suivante:

$$A = \underset{x^{(k)}}{E}\, \varphi(x^{(k)}). \tag{1}$$

Le symbole „$\varphi(x^{(k)})$" représente ici certaine fonction propositionnelle contenant la variables „$x^{(k)}$" d'ordre 1 comme la seule variable libre; elle peut contenir en outre une série de variables liées „$x^{(l)}$", „$x^{(m)}$" etc., pourvu que toutes ces variables soient également d'ordre 1 (puisque dans le cas contraire la définiton ne mériterait pas d'être nommée élémentaire). Comme on sait de la Logique, on peut construire la fonction „$\varphi(x^{(k)})$" de façon qu'elle ne contienne de symboles logiques constants exceptés les signes de la négation, de la somme et du produit logiques ainsi que les quantificateurs général et particulier; de même, on en peut éliminer tous les symboles constants relevant de l'Arithmétique, sauf les signes „v", „μ" et „σ", qui correspondent aux trois notions primitives.

Il n'est pas difficile de montrer dans tous cas particulier que la formule (1) se laisse transformer comme il suit: les fonctions propositionnelles „$v(x^{(k)})$", „$\mu(x^{(k)}, x^{(l)}$" et „$\sigma(x^{(k)}, x^{(l)}, x^{(m)})$" (ou, si l'on veut, „$x^{(k)} = 1$", „$x^{(k)} \leqslant x^{(l)}$" et „$x^{(k)} = x^{(l)} + x^{(m)}$") seront remplacées respectivement par les symboles de la forme „U_k", „$M_{k,l}$" et „$S_{k,l,m}$", les signes d'opérations logiques par ceux des opérations correspondantes sur les ensembles de suites, introduits dans les déf. 5—7; enfin le symbole „E" par celui „D" [1]). Par cette transformation la formule (1) prend la forme:

$$A = D(S), \tag{2}$$

où au lieu de „S" figure un symbole composé, dont l'aspect permet de reconnaître instantanément qu'il désigne un ensemble de suites de la famille $\mathfrak{Df}_1$ à contredomaine constitué par un seul élément. En appliquant la déf. 10, nous en concluons aussitôt que l'ensemble A appartient à la famille $\mathfrak{D}_1$.

J'en donne ici quelques exemples concrets:

1°. Soit A un ensemble composé du nombre unique 0. On voit de suite que $A = \underset{x}{E}(x = x + x)$, c. à d. que $A = \underset{x}{E}\,\sigma(x, x, x)$. En transformant cette formule de la façon qui vient d'être décrite, on obtient: $A = D(S_{1,1,1})$, de sorte que $A \in \mathfrak{D}_1$.

[1]) Aucours de ces transformations on peut utiliser certaines formules qui seront établies dans l'article de M. Kuratowski et de moi, cité ici p. 211, note [1]).

2°. Soit A l'ensemble de tous les nombres positifs. Comme il est aisé de constater, on a $A = \underset{x}{E}(x \neq x + x$ *et il existe un* y *tel que* $y \leqslant x$ *et* $y = y + y)$, c.-à-d. $A = \underset{x}{E}(\overline{\sigma}(x, x, x) \,.\, \underset{y}{\Sigma}(\mu(y, x) \,.\, \sigma(y, y, y)))$, d'où $A = D(\overset{\circ}{\overline{S}}_{1,1,1} \circ \overset{\circ}{\underset{2}{\Sigma}}(M_{2,1} \,.\, S_{2,2,2}))$. On a donc encore $A \in \mathfrak{D}_1$.

3°. Soit enfin $A = \underset{x}{E}(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Nous transformons cette formule successivement comme il suit: $A = \underset{x}{E}$ (*il existe de tels* y *et* z *que* $y \leqslant x$, $y = y + y$, $x \leqslant z$ *et* $z = 1) = \underset{x}{E}\underset{y}{\Sigma}\underset{z}{\Sigma}(\mu(y, x) \,.\, \sigma(y, y, y) \,.\, \mu(x, z) \,.\, v(z)) = D(\overset{\circ}{\underset{3}{\Sigma}}\overset{\circ}{\underset{2}{\Sigma}}(M_{2,1} \circ S_{2,2,2} \circ M_{1,3} \circ U_3))$. Ainsi on a dans ce cas également $A \in \mathfrak{D}_1$.

La même méthode se prête à l'application dans le sens inverse; il suffit de l'illustrer sur un seul exemple.

4°. Soit A un ensemble concret de la famille $\mathfrak{D}_1$, p. ex. $A = D(\underset{2}{\Sigma}\underset{3}{\Sigma}(S_{2,1,3} \circ S_{,2,2} \circ U_3))$. On obtient facilement la transformation suivante de cette formule: $A = \underset{x}{E}\underset{y}{\Sigma}\underset{z}{\Sigma}(\sigma(y, x, z) \,.\, \sigma(y, y, y) \,.\, v(z)) = \underset{x}{E}$ (*il existe de tels* y *et* z *que* $y = x + z$, $y = y + y$ *et* $z = 1)$. Nous voyons que l'ensemble A admet une définition élémentaire; il est, comme on aperçoit aussitôt, composé d'un seul nombre, à savoir du nombre -1.

A la suite des considérations de ce genre *la justesse intuitive de la déf. 10 paraît indiscutable.*

Les ensembles de suites finies et surtout ceux de nombres, arithmétiquement définissables dans le sens établi plus haut, sont — au point de vue analytique — des objets à structure très élémentaire. Pour les caractériser de plus près à ce point de vue, je vais opérer avec la notion bien connue de polynome linéaire à coefficients entiers. Les polynomes sont entendus ici comme fonctions qui font correspondre les nombres réels aux suites finies de nombres réels (autrement dit, comme relations univoques dont les domaines se composent de nombres réels et les contredomaines de suites finies de tels nombres). En particulier, le polynome linéaire p à coefficients entiers est déterminé par un ensemble fini N de nombres naturels, par une suite a de nombres entiers à contredomaine N et par un nombre entier b, et il fait correspondre à toute suite $s \in R_N$ de nombres réels le nombre $p(s) = \sum_{k \in N} a_k \cdot s_k + b$. Je vais distinguer à l'aide de cette notion une catégorie spéciale d'ensembles de suites finies, notamment les ensembles linéaires élémentaires.

Définition 11. *S est dit* ***ensemble linéaire élémentaire*** *de suites, lorsqu'il existe un polynome linéaire à coefficients entiers p tel que l'on ait soit* $S = \underset{s}{E}(p(s) = 0$ *et* $D(s) \subset Rl)$, *soit* $S = \underset{s}{E}(p(s) > 0$ *et* $D(s) \subset Rl)$.

Un ensemble linéaire élémentaire est — simplement dit — l'ensemble de toutes les suites s de nombres réels qui sont autant des solutions soit d'une équation linéaire du type „$p(s) = 0$", soit d'une inéquation du type „$p(s) > 0$".

Il résulte de la déf. 11 et de l'interprétation du polynome linéaire, adoptée ici, que tout ensemble linéaire élémentaire est homogène.

A présent nous pouvons formuler déjà le théorème suivant qui caractérise la famille d'ensembles $\mathfrak{Df}_1$:

Théorème 1. *Pour que l'ensemble S de suites de nombres réels appartienne à la famille* $\mathfrak{Df}_1$, *il faut et il suffit que S soit une somme finie de produits finis d'ensembles linéaires élémentaires* [1]).

D é m o n s t r a t i o n. Que la condition est suffisante, il est facile de prouver, en s'appuyant sur la déf. 9 et sur un lemme facile, d'après lequel tout ensemble linéaire élémentaire appartient à la famille $\mathfrak{Df}_1$. Pour démontrer que cette condition est nécessaire, nous procédons par un raisonnement récurrentiel: nous montrons que la famille de tous les ensembles qui satisfont à la condition énoncée contient les ensembles U_k, $M_{k,l}$ et $S_{k,l,m}$ (ce qui est évident) et qu'elle est close par rapport aux cinq opérations introduites dans les déf. 5—7; de là nous concluons déjà à l'aide de la déf. 9 que tout ensemble $S \in \mathfrak{Df}_1$ remplit cette condition. Une certaine difficulté, d'ailleurs insignifiante, n'est liée qu'avec l'opération $\overset{\circ}{\underset{k}{\Sigma}}$ (à laquelle, par les lois de D e - M o r g a n, se réduit aussi l'opération $\overset{\circ}{\underset{k}{\Pi}}$); il s'agit ici au fond d'un lemme d'Algèbre, d'après lequel la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'équations et d'inéquations linéaires à plusieurs inconnues admette une solution par rapport à une des inconnues, se laisse représenter sous forme de la somme logique de tels systèmes, où ne figurent que les autres inconnues.

On voit dans cette démonstration la liaison intime entre les opérations $\overset{\circ}{\underset{k}{\Sigma}}$ et $\overset{\circ}{\underset{k}{\Pi}}$ et celle d'élimination d'une inconnue du système d'équations et d'inéquations, connue de l'Algèbre.

[1]) La somme et le produit peuvent être entendus ici aussi bien dans le sens de la déf. 6 (et la condition du contredomaine commun est alors superflue) que dans le sens ordinaire d'Algèbre des Ensembles.

J'appellerai, comme d'habitude, **intervalles à extrémités rationnelles** les ensembles de nombres des types suivants: $\underset{x}{E}(x = a)$, $\underset{x}{E}(x > a)$, $\underset{x}{E}(x < a)$ et $\underset{x}{E}(a < x < b)$ [1]), où a et b sont deux nombres rationnelles arbitraires. Cette convention permet de déduire aisément du th. 1 le corollaire suivant sur le famille $\mathfrak{D}_1$:

Théorème 2. *Pour que l'ensemble X de nombres réels appartienne à la famille* $\mathfrak{D}_1$, *il faut et il suffit que X soit la somme d'un nombre fini d'intervalles à extrémités rationnelles*

Le théorème métamathématique correspondant permet de conclure que dans le système d'Arithmétique décrit au § 1 toute proposition d'ordre 1 se laisse démontrer ou réfuter.

J'insiste sur le caractère assez accidentel des deux théorèmes précédents, qui n'ont qu'un faible rapport avec l'idée directrice de cet ouvrage. Ces théorèmes ont leur véritable origine dans le fait que ce furent les ensembles U_k, $M_{k,l}$ et $S_{k,l,m}$ que nous avons choisis comme ensembles primaires de suites, en quoi nous nous sommes conformés à un système d'Arithmétique qui ne contient comme notions primitives que celles de nombre 1, de relation $\leqslant$ et de somme. Or, l'Arithmétique se laisse notoirement fonder aussi sur beaucoup d'autres systèmes de notions primitives, et ces systèmes peuvent contenir même des notions superflues, qui se laissent définir à l'aide des autres notions. Rien ne nous contraint donc de faire dépendre la définition des familles $\mathfrak{Df}_1$ et $\mathfrak{D}_1$ précisément des ensembles U_k, $M_{k,l}$ et $S_{k,l,m}$; au contraire, ces derniers peuvent être remplacés par d'autres, et l'étendue et la structure des deux familles peut, en conséquence, éprouver les modifications fort essentielles. Ainsi p. ex.

[1]) Et, s'il y a lieu, ceux des autres types analogues, comme $\underset{x}{E}(x \geqslant a)$, $\underset{x}{E}(a \leqslant x \leqslant b)$ etc., ce qui n'est cependant pas indispensable ici.

il est facile de voir que l'Arithmétique des nombres réels se laisse baser en particulier sur les deux notions primitives: celles de somme et de produit [1]); nous pouvons donc remplacer respectivement dans la déf. 9 les ensembles U_k et $M_{k,l}$ par les ensembles $P_{k,l,m} = R_{\{k,l,m\}} \cdot \underset{s}{E}(s_k \in Rl,\ s_l \in Rl,\ s_m \in Rl \text{ et } s_k = s_l \cdot s_m)$, tout en conservant les ensembles $S_{k,l,m}$. Si l'on désire après cela que le th. 2 conserve encore sa valeur, on est forcé alors d'y remplacer le mot *„rationnelles„* par *„algébriques"*. Dans ce cas la famille $\mathfrak{D}_1$ a donc subi une extension; en effet, nous avons eu en vue un système de notions primitives plus „fortes" au sens logique. Dans beaucoup de cas cette extension est encore plus considérable, surtout lorsqu'on fait entrer dans le système des notions primitives celle de nombre naturel et dans la famille des ensembles primaires les ensembles $N_k = R_{\{k\}} \cdot \underset{s}{E}(s_k \in Nt)$; la famille $\mathfrak{D}_1$ peut alors renfermer des ensembles bien compliqués au point de vue analytique et géométrique, p. ex. les ainsi dits ensembles projectifs de classe aussi élevée que l'on veut [1]).

Pour priver la notion de définissabilité élémentaire (d'ordre 1) de son caractère accidentel, il faut la relativiser envers un système arbitraire de notions primitives ou — plus précisément — envers une famille arbitraire d'ensembles primaires de suites. Dans cette relativisation on n'aura plus en vue les notions primitives d'une certaine science spéciale, p. ex. de l'Arithmétique des nombres réels, et les ensembles primaires ne devront point se composer de suites de nombres réels. Plus encore, on peut même faire abstraction du type des objets constituant les suites considérées et traiter les termes figurant dans la définition que nous allons construire comme termes „systèmatiquement ambigus" [3]), destinés a désigner simultanément les objets des types différents. De cette manière, en dépassant considérablement les limites de la tache que nous nous sommes proposés

[1]) Cf. O Veblen, *The square root and the relations of order*, Transact. of the Amer. Math. Soc. 7, 1906, p. 197—199.

[2]) Cf. l'article précité de M. Kuratowski et de moi. Je tiens à noter qu'il semble profitable au point de vue pratique de baser l'Arithmétique sur des systèmes „forts" de notions primitives, car il est commode d'avoir une catégorie aussi vaste que possible de notions arithmétiques n'exigeant pas de définitions d'ordre supérieur à 1.

[3]) Cf. *Principia Mathematica*, Vol. I, pp. 37—48.

au début, nous parvenons à la notion générale d'ensemble de suites finies (à terme d'un type donné) définissable élémentairement par rapport à la famille $\mathcal{F}$ des ensembles primaires de suites finies (à terme du même type). La famille de tous ces ensembles définissables sera désignée par le symbole „$\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$".

Définition 12. *$\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ est le produit de toutes les familles $\mathfrak{X}$ qui remplissent la condition* (α) $\mathcal{F} \subset \mathfrak{X}$ *ainsi que les conditions* (β)—(δ) *de la déf. 9.*

Cette définition est d'une importance capitale pour toute la théorie mathématique de la définissabilité. Nous en avons incessament recours dans la construction des autres définitions de ce domaine; en particulier, comme le lecteur s'en convainquera au prochain §, elle va nous faciliter considérablement l'introduction de la définissabilité d'ordre supérieur.

Pour le moment, nous allons, en imitant la déf. 10, appliquer la famille $\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ pour définir la famille $\mathfrak{D}_1(\mathcal{F})$, c.-à.-d. celle de tous les ensembles (composés d'objets du type donné), définissables élémentairement par rapport à la famille $\mathcal{F}$ des ensembles primaires de suites (à termes du même type):

Définition 13. $\mathfrak{D}_1(\mathcal{F}) = \underset{x}{E}$ *(il existe un ensemble $S \in \mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ tel que $D(S) = X$ et $\mathit{Cl}(S)$ est un ensemble composé d'un seul élément).*

D'une manière tout à fait analogue nous sommes amenés à la notion de relation bi-, tri- et n-nome (entre objets d'un type donné), élémentairement définissable par rapport à la famille $\mathcal{F}$.

On déduit aisément des déf. 12 et 13 diverses propriétés élémentaires des familles $\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ et $\mathfrak{D}_1(\mathcal{F})$, comme p. ex. les suivantes:

Théorème 3. [a]) *$\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ est une des familles qui remplissent les conditions* (α)—(δ) *de la déf. 12; elle est donc la plus petite de ces familles;*

[b]) $\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F}) = \sum\limits_{\mathcal{G} \in \mathfrak{G}} \mathfrak{Df}_1(\mathcal{G})$ *et* $\mathfrak{D}_1(\mathcal{F}) = \sum\limits_{\mathcal{G} \in \mathfrak{G}} \mathfrak{D}_1(\mathfrak{G})$ *où $\mathfrak{G}$ est l'ensemble de toutes les sous-familles finies de la famille $\mathcal{F}$;*

[c]) *si* $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, *on a* $\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{Df}_1(\mathcal{G})$ *et* $\mathfrak{D}_1(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{D}_1(\mathcal{G})$;

[d]) $\mathfrak{Df}_1(\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})) = \mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ *et* $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})) = \mathfrak{D}_1(\mathcal{F})$;

[e]) *si la famille* $\mathcal{F}$ *est tout au plus dénombrable, les familles* $\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ *et* $\mathfrak{D}_1(\mathcal{F})$ *le sont également.*

Il est à noter que l'on peut se passer dans la démonstration du théorème précédent des propriétés spécifiques des opérations qui figurent dans les conditions (β)—(δ) de la déf. 12: on y peut s'appuyer exclusivement sur le fait que la famille $\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ est définie comme le produit de toutes les familles $\mathcal{X}$ contenant $\mathcal{F}$ et closes par rapport à certaines opérations éffectuables sur un nombre fini d'ensembles de familles $\mathcal{X}$ (ce dernier détail intervient dans la démonstration de [b]) et [e])).

Nous savons — et c'est une circonstance importante — **démontrer le th. 3 d'une façon effective**: nous savons notamment définir une fonction (bien déterminée) $T = S^*$ qui fait correspondre à toute suite infinie d'ensembles S (du type ω) telle que $\mathcal{F} = D(S)$ (c.-à.-d. telle que $\mathcal{F} = \{S_1, S_2 \ldots S_n \ldots\}$) une suite infinie T vérifiant la formule: $\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F}) = D(T)$ (c.-à.-d. $\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F}) = \{T_1, T_2, \ldots T_n, \ldots\}$).

Dans toutes les applications des déf. 12 et 13 aux familles concrètes on n'a jamais affaire à des familles $\mathcal{F}$ d'une nature complètement arbitraires, mais elles remplissent toujours certaines conditions, par suite desquelles nous les appellerons **familles régulières**.

Définition 14. $\mathcal{F}$ *est une* ***famille régulière****, lorsque* (α) $\mathcal{F}$ *est une famille non-vide et tout au plus dénombrable*; (β) *tout ensemble* $S \in \mathcal{F}$ *est un ensemble homogène de suites*; (γ) *si* $k \in Nt$, $l \in Nt$ *et* $S \in \mathcal{F}$, *on a* $\frac{k}{l} S \in \mathcal{F}$.

L'exemple d'une famille régulière est donné par la famille composée de tous les ensembles U_k, $M_{k,l}$ et $S_{k,l,m}$, où k, l et m sont des nombres naturels quelconques.

Le postulat de régularité, imposé aux familles $\mathcal{F}$ auxquelles nous appliquons les déf. 12 et 13, paraît tout à fait naturel dès qu'on songe à ce que nous opérons dans nos considérations avec les ensembles primaires comme avec des représentants mathématiques des termes primitifs des sciences déductives. Or, comme on sait, il est possible de choisir pour toute science déductive un système des termes primitifs composé exclusivement d'ainsi dits „**foncteurs**", c.-à-d. de signes tels que „v", „μ" et „σ", qui, accompagnés d'un certain nombre de variables, d'ainsi dits „**arguments**", forment des fonctions propositionnelles. Ce sont précisément ces fonctions propositionnelles que nous appellons fonctions primaires, en faisant entrer dans la famille $\mathcal{F}$ les ensembles de suites qu'elles déterminent. Toutes les expressions, donc en particulier toutes les fonctions primaires sont, dans un système déductif donné, en quantité au plus dénombrable — c'est de là que provient la condition (α) de la déf. 14; les ensembles de suites déterminés par les fonctions propositionnelles sont toujours homogènes — il en découle la condition (β). Enfin, toutes les fois que nous considérons une fonction propositionnelle comme une des fonctions primaires, nous considérons en même temps comme telle toute fonction qui s'en obtient par substitution d'une variable à une autre: aussi la famille $\mathcal{F}$ doit-elle être close par rapport à l'opération $\frac{k}{l} S$ qui constitue le correspondant mathématique de l'opération de substitution [1]), et c'est précisément ce qu'exprime la condition (γ) de la déf. 14.

Il est à remarquer que la condition (γ) pourrait être omise dans la déf. 14, pourvu qu'on fasse entrer dans la déf. 12 un postulat analogue sur les familles $\mathcal{X}$. Une telle manière de procéder serait conforme à cette attitude mathématique envers les modes de construction des systèmes déductifs, selon laquelle on admet comme expressions primitives du système non pas les foncteurs, p. ex. „v", „μ" et „σ", mais des fonctions propositionnelles concrètes, p. ex. „$v(x)$", „$\mu(x,y)$" et „$\sigma(x,y,z)$", que l'on identifie aux fonctions primaires, et où les fonctions propositionnelles s'obtiennent des expressions primitives, en dehors des cinq opérations fondamentales, aussi à l'aide de l'opération de substitution. Une pareille attitude, d'ailleurs pratiquement inusitée, causerait certains inconvénients peu essentiels.

Or, selon le point de vue où nous nous sommes placés, l'inclusion de ce postulat dans la déf. 12 (et dans la déf. 9) est inutile, comme le montre le suivant

Théorème 4. *Si* $\mathcal{F}$ *est une famille régulière,* $\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ *l'est également.*

Cela résulte facilement des déf. 5—8 et 12 et du th. 3[e].

Les autres propriétés de la famille $\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ — dans l'hypothèse que la famille $\mathcal{F}$ est régulière — se laissent obtenir par transposition des théorèmes analogues de la Métamathématique, surtout de ceux qui expriment les relations entre les fonctions propositionnelles arbitraires et les fonctions primaires. A titre d'exemple, je donne ici le théorème suivant, qui correspond au théorème bien connu sur la réduction de toute fonction propositionnelle à l'ainsi dite „**forme normale**" [2]) et qui facilite beaucoup de raisonnements de ce domaine:

Théorème 5. $\mathcal{F}$ *étant une famille régulière, la condition nécessaire et suffisante pour que* $S \in \mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ *est que* $S = \overset{\circ}{0}$ *ou bien que* S *se laisse mettre sous la forme:*

$$S = \overset{\circ}{\underset{k_{1,1}}{\Sigma}} \overset{\circ}{\underset{k_{1,2}}{\Sigma}} \ldots \overset{\circ}{\underset{k_{1,l_1}}{\Sigma}} \overset{\circ}{\underset{k_{2,1}}{\Pi}} \overset{\circ}{\underset{k_{2,2}}{\Pi}} \ldots \overset{\circ}{\underset{k_{2,l_2}}{\Pi}} \ldots \ldots \overset{\circ}{\underset{k_{n-1,1}}{\Sigma}} \overset{\circ}{\underset{k_{n-1,2}}{\Sigma}} \ldots \overset{\circ}{\underset{k_{n-1,\,l_{n-1}}}{\Sigma}} \overset{\circ}{\underset{k_{n,1}}{\Pi}} \overset{\circ}{\underset{k_{n,2}}{\Pi}} \ldots \overset{\circ}{\underset{k_{n,\,l_n}}{\Pi}} T,$$

où T *est une somme finie de produits finis d'ensembles* $S \in \mathcal{F}$ *et de leurs*

[1]) Cf. les remarques p. 228 à la suite de la déf. 8.

[2]) Cf. le livre précité de MM. Hilbert et Ackermann, pp. 63—64.

compléments $\mathring{S}$ [1]), *où* n *est un nombre naturel pair et où* l_i (*pour* $1\leqslant i\leqslant n$) *et* $k_{i,j}$ (*pour* $1\leqslant i\leqslant n$ *et* $1\leqslant j\leqslant l_i$) *sont des nombres naturels arbitraires.*

Démonstration. Il résulte immédiatement du th. 3ª que la condition en question est suffissante. Pour prouver qu'elle est nécessaire, on raissonne par recurrence: en utilisant notamment la déf. 14 et les propriétés formelles des opérations fondamentales sur les ensembles de suites, on montre que la famille $\mathfrak{X}$ de tous les ensembles qui vérifient cette condition jouit de propriétés (α)—(δ) de la déf. 12; par conséquent, tout ensemble $S \in \mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$ appartient à cette famille [2]).

Je donne, à titre d'exemple, encore une conséquence facile des déf. 12—14 sur la famille $\mathfrak{D}_1(\mathcal{F})$:

Théorème 6. *Si* $\mathcal{F}$ *est une famille régulière,* $X \in \mathfrak{D}_1(\mathcal{F})$ *et* $Y \in \mathfrak{D}_1(\mathcal{F})$, *on a également* $\overline{X}$ [3]) $\in \mathfrak{D}_1(\mathcal{F})$, $X+Y \in \mathfrak{D}_1(\mathcal{F})$ *et* $X\cdot Y \in \mathfrak{D}_1(\mathcal{F})$.

M. Kuratowski a attiré mon attention sur une interprétation géométrique des notions introduites ici. Notamment la suite finie à contredomaine $\{k, l, \ldots, p\}$ peut être interprétée comme point dans un espsce à un nombre fini de dimensions et dont $X_k, X_l, \ldots, X_p$ sont des axes des coordonnées. L'ensemble $R_{\{k,l,\ldots,p\}}$ est alors l'espace tout entier; les ensembles homogènes sont des ensembles situés dans un de tels espaces. L'ensemble U_k se compose d'un seul point à coordonnée 1 situé sur l'axe X_k; les ensembles $M_{k,l}$ et $S_{k,l,m}$ deviennent des figures élémentaires connues de la Géométrie Analytique, à savoir, les demi-plans et les plans dans certaines positions spéciales. L'interprétation géométrique des opérations sur les ensembles introduites dans les déf. 5—8 n'est pas plus difficile; en particulier, dans l'opération $\mathring{\Sigma}_k$ nous avons facilement reconnu avec M. Kuratowski celle de projection parallèle à l'axe X_k. Il ne faut plus distinguer dans cette interprétation entre un terme et la suite composée de ce terme: les déf. 10 et 13 deviennent superflues. Les th. 1 et 2 prennent la forme de certains théorèmes de la Géométrie Analytique.

[1]) Cf. p. 232, note [1]).
[2]) C'est le transposition de la démonstration correspondante de la Métamathématique; cf. p. 237, note [2]).
[3]) C.-à-d. le complément de l'ensemble X.

Etant donné le caractère abstrait de ces considérations, l'hypothèse que les axes $X_k, X_l, \ldots, X_p$ sont des droites euclidiennes n'est plus nécessaire. Elles peuvent être au contraire des „espaces abstraits" d'une nature absolument quelconque; l'espace $R_{\{k,l,\ldots,p\}}$ en est alors leur „produit combinatoire".

L'article commun de M. Kuratowski et de moi et surtout celui de M. Kuratowski, qui vont paraître dans ce volume [1]), semblent témoigner d'une grande importance heuristique des constructions ésquissées ici dans leur interprétation géométrique. En particulier, comme nous le montrerons dans le premier de ces articles, le théorème suivant est une conséquence de la déf. 12:

Si $\mathcal{F}$ *est une famille d'ensembles projectifs, il en est de même de* $\mathfrak{Df}_1(\mathcal{F})$.

On remarquera pour terminer que, au lieu des suites finies, on pourrait opérer dans toute la construction qui précéde avec les suites infinies ordinaires (à contredomaine identique à l'ensemble des nombres naturels) ou, autrement dit, avec les points de l'espace à une infinité de dimensions (espace de M. Hilbert) On pourrait même se servir uniquement des opérations sur les ensembles de suites qui ne conduiraient jamais au dehors ce cet espace. Ceci serait autant plus simple au point de vue logique que les opérations de complémentation, d'addition et de multiplication coïncideraient alors avec les opérations ordinaires de l'Algèbre des Ensembles. Par contre, au point de vue d'applications une telle construction aurait des défauts considérables, et sa valeur heuristique serait beaucoup moindre.

(*A suivre*).

[1]) Cf. p. 211, note [1]).