entraîne la connexité et la connexité locale [1]) de $\Phi_{Q\omega}(P)$. On obtient ainsi le

Lemme 2. *L'espace $\Phi_{Q\omega}(P)$ est quasi péanien.*

27. Théorème. *Si Q est un rétracte absolu, l'espace $\Phi_Q(P)$ est quasi-péanien.*

Ceci résulte du lemme **2.**, théorème **18.**, **24.** et **7.** En vertu du théorème **2.** de **23.**, on obtient le

Corollaire. *Si Q est un rétracte absolu, l'espace $\Phi_Q(Q)$ est quasi-péanien et séparable.*

Le problème suivant reste ouvert.

Problème. *Les rétractes absolus sont-ils identiques aux espaces Q pour lesquels $\Phi_Q(Q)$ sont des espaces quasi-péaniens et séparables?*

[1]) Menger, l. c., p. 94.

Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents.

Par

Karol Borsuk (Varsovie).

Au I Congrès des Math. des Pays Slaves (Varsovie 1929) [1]) M. Knaster a attiré l'attention sur le rôle de la notion topologique *d'unicohérence* [2]) et proposé quelques notions nouvelles qui en dérivent et qui semblent, à son avis, se prêter à l'étude de plusieurs problèmes importants, restés ouverts malgré leur analogie avec les problèmes résolus par les méthodes de la Topologie Combinatoire.

Le but de cette Note est avant tout de la nature méthodologique, bien que la méthode developpée ici dans l'ordre d'idées proposé par M. Knaster m'ait conduit à la démonstration d'un théorème très général (chap. II,) et aux solutions de plusieurs problèmes (chap. III).

Tous ces résultats [3]) (que j'obtiens d'ailleurs sans avoir recours aux notions combinatoires) concernent les espaces *péaniens* (c.-à-d. les images continues du segment rectiligne) *unicohérents*, et même plus généralement, les espaces étant des *ensembles G_δ absolus* [4]) *con-*

[1]) B. Knaster, *Einige Probleme über Punktmengen mit Fixpunkten*, Comptes Rendus du I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Varsovie 1929, p. 287.

[2]) P. ex. C. Kuratowski, Fund. Math. XIII, p. 307, où l'unicohérence est définie pour les continus. Plus généralement, j'appellerai l'ensemble connexe E *unicohérent*, si pour toute décomposition de E en deux ensembles connexes E_1 et E_2 fermés dans E, leur produit $E_1 . E_2$ est connexe.

[3]) dont le théorème 2. trouve son corrélatif (sous d'autres rapports plus fort) dans les théorèmes de M. Vietoris et de M. Mayer exprimés et prouvés par les méthodes combinatoires; cf.: Mayer, Monatsh. f. Math. u. Phys., Bd. 36 (1929), S. 31—42; Vietoris, Monatsh. f. Math. u. Phys., Bd. 37 (1930), S. 159—162.

[4]) c.-à.-d. des sous-ensembles de l'espace complet qui sont G_δ par rapport à cet espace (voir: Hausdorff, *Mengenlehre*, II Aufl., S. 136; cf. N. Aronszajn, Fund. Math. XV, p. 228, note [1])).

nexes et localement connexes (je les appellerai pour abréger „espaces *quasi-péaniens*") *et unicohérents*.

Il semble toutefois que, d'une façon générale, le procédé de caractériser les ensembles par les propriétés de leurs transformations continues en d'autres ensembles (par ex. en circonférence etc.) ou mieux encore, par la *topologie* de l'espace ayant ces transformations pour éléments[1]), procédé introduit dans cette Note, peut s'appliquer avec avantage à un domaine de problèmes bien plus vaste; j'en indique quelques uns à la fin du Chap. II.

Termes et notations.

Etant donné un espace métrique E,

1° $\varrho_E(x, y)$ désigne pour $x, y \in E$ la *distance* (suivant la métrique définie dans E) entre les points x et y.

2° $\varrho_E(A, B)$ désigne pour $A, B \subset E$ la distance entre les ensembles A et B, c.-à.-d. la borne inférieure des nombres $\varrho_E(x, y)$ où $x \in A$ et $y \in B$.

3° $U_{\alpha, E}(A)$ désigne pour $A \subset E$ l'*entourage ouvert* de l'ensemble A composé de tous les points $x \in E$ tels que $\varrho(x, A) < \alpha$.

4° $F_E(A)$ désigne pour $A \subset E$ la *frontière* de A dans E, c.-à.-d. l'ensemble $\overline{A} \cdot \overline{(E - A)}$.

5° $\delta_E(A)$ désigne pour $A \subset E$ le *diamètre* de l'ensemble A, c.-à.-d. la borne supérieure des distances entres les points de cet ensemble.

6° $C_{\alpha, E}(a, b)$ désigne pour $a, b \in E$ et $\alpha > 0$ *la chaîne d'ordre α de a à b dans l'espace E*, c.-à-.d. une suite finie $a_1, a_2 \ldots a_n, a_{n+1}$ telle que: $a_1 = a$, $a_{n+1} = b$, $a_i \in E$ et $\varrho(a_i a_{i+1}) < \alpha$ pour $i = 1, 2 \ldots n$.

Je supprime l'indice $_E$ dans les symboles 1°—6°, lorsqu'il s'agit d'un espace E fixé d'avance.

7° Si L est un arc simple et $x, y \in L$, je désigne par $L[x, y]$ l'arc simple à extrémités x et y contenu dans L et qui peut se réduire au point x, lorsque $x = y$. Ainsi l'égalité $L = L[x, y]$ exprime que les points x et y sont des extrémités de l'arc L. Je pose en outre: $L(x, y] = L[x, y] - (x)$, $L[x, y) = L[x, y] - (y)$ et $L(x, y) = L[x, y] - (x) - (y)$.

[1]) Cf. p. 195 et suivantes de cette Note et ma Note *Sur les rétractes*, ce volume, p. 152.

8° J'emploie le terme „compact" dans le sens de „compact en soi".

9° Un ensemble connexe et compact (resp. ouvert) est dit un *continu* (resp. *région*).

10° J'appelle *parcours de p à q dans l'espace E* une suite finie d'arcs simples $L_i = L_i[a_i\, a_{i+1}] \subset E$ où $i = 1, 2 \ldots n$, $a_1 = p$ et $a_{n+1} = q$. Si en outre $p = q$, je dis que le parcours est *fermé*.

I. Notions et théorèmes préliminaires.

1. Soient K la circonférence de centre 0 et de rayon 1 située dans le plan des nombres complexes et $f(x)$ une fonction définie aux points d'un espace métrique E et telle que $f(E) \subset K$.

Admettons que la fonction f satisfait à la condition suivante:

Condition C. *Pour tous $x, y \in E$ il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $\varrho(x, y) < \eta$ entraîne $|f(x) - f(y)| < 1$.*

Pour de telles fonctions f et pour $\varrho(x, y) < \eta$, nous désignerons par $\varphi_f(x, y)$ *l'angle de rotation le plus petit* (muni de son signe) *que doit effectuer le vecteur $\overrightarrow{0, f(x)}$ jusqu'à sa coïncidence avec $\overrightarrow{0, f(y)}$*. En raison de la condition C, on a toujours:

2. $|\varphi_f(x, y)| < \frac{\pi}{3}$; $\varphi_f(x, x) = 0$; $\varphi_f(x, y) = -\varphi_f(y, x)$.

3. *Si $x, y, z, t \in E$, $\varrho(x, y) < \eta$, $\varrho(y, z) < \eta$, $\varrho(z, t) < \eta$ et $\varrho(t, x) < \eta$, alors $\varphi_f(x, y) + \varphi_f(y, z) + \varphi_f(z, t) + \varphi_f(t, x) = 0$,*

car, selon la définition de $\varphi_f(x, y)$, on a $\varphi_f(x, y) + \varphi_f(y, z) + \varphi_f(z, t) + \varphi_f(t, x) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

4. Définition. Pour $\alpha \leqslant \eta$ j'appelle *rotation de la fonction f par rapport à une chaîne* $C_{\alpha, E}(a, b) = (p_1\, p_2 \ldots p_{n+1})$ le nombre

$$I_f(p_1\, p_2 \ldots p_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_f(p_i\, p_{i+1}).$$

Je désignerai aussi pour abréger $I_f(p_1\, p_2 \ldots p_{n+1})$ par $I_f[C_{\alpha, E}(a, b)]$.

Le nombre $I_f[C_{\alpha, E}(a, b)]$ ainsi défini possède les propriétés suivantes:

5. *Etant données deux chaînes* (à nombre égal de chaînons): $C'_{\alpha, E}(a', b') = (p_1\, p_2 \ldots p_{n+1})$ et $C''_{\alpha, E}(a'', b'') = (q_1\, q_2 \ldots q_{n+1})$ où $\alpha \leqslant \eta$, *la condition* $\varrho(p_i q_i) < \eta$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n+1$ *entraîne l'égalité*

$$I_f[C'_{\alpha,E}(a', b')] - I_f[C''_{\alpha,E}(a'', b'')] = \varphi_f(a' a'') - \varphi_f(b' b'').$$

En effet:

$$I_f[C'_{\alpha,E}(a' b')] - I_f[C''_{\alpha,E}(a'' b'')] = \sum_{i=1}^{n}[\varphi_f(p_i p_{i+1}) - \varphi_f(q_i q_{i+1})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[\varphi_f(p_i p_{i+1}) + \varphi_f(p_{i+1} q_{i+1}) + \varphi_f(q_{i+1} q_i) + \varphi_f(q_i p_i)] + \varphi_f(p_1 q_1) -$$

$$- \varphi_f(p_{n+1} q_{n+1}) = \varphi_f(a' a'') - \varphi_f(b' b''), \quad \text{en vertu de } \mathbf{3}.$$

6. *Etant donnée deux chaînes (à nombre quelconque de chaînons)* $C'_{\alpha,E}(a, b)$ *et* $C''_{\alpha,E}(a, b)$, *on a*

$$I_f[C'_{\alpha,E}(a, b)] \equiv I_f[C''_{\alpha,E}(a. b)] \quad (\text{mod. } 2\pi).$$

7. *Lorsque l'espace* E *est un arc simple* $L = L[a, b]$ *et si les chaînes*

$$C'_{\eta,L}(a, b) = (p_1 p_2 \ldots p_{n+1}) \quad \text{et} \quad C''_{\eta,L}(a, b) = (q_1 q_2 \ldots q_{k+1})$$

sont telles que

$$\delta(L[p_i p_{i+1}]) < \eta \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\delta(L[q_i q_{i+1}]) < \eta \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

les nombres $I_1 = I_f[C'_{\eta,L}(a, b)]$ *et* $I_2 = I_f[C''_{\eta,L}(a, b)]$ *sont égaux.*

Démonstration. Pour toute chaîne

$$C'_{\eta,L[p_i,p_{i+1}]}(p_i p_{i+1}) = (a_1^{(i)} a_2^{(i)} \ldots a_{k_i+1}^{(i)}) \tag{1}$$

on a en vertu de **5**:

$$\varphi_f(p_i p_{i+1}) = \sum_{j=1}^{k_i} \varphi_f(a_j^{(i)}, a_{j+1}^{(i)}). \tag{2}$$

Ceci établi, je vais effectuer successivement sur $C'_{\eta,L}(a, b)$ deux transformations conduisant à une nouvelle chaîne $C'^{*}_{\eta,L}(a, b)$ qui, tout en étant composée de points de $C'_{\eta,L}(a, b)$, mais ordonnés suivant leur succession sur L (en allant de a vers b) et non d'après celle dans $C'_{\eta,L}(a, b)$, donnera lieu à la même rotation de la fonction f.

Complétons d'abord la chaîne $C'_{\eta,L}(a, b)$ par l'interposition entre p_i et p_{i+1} de tous les points de $C'_{\eta,L}(a, b)$ qui se trouvent situés sur $L(p_i, p_{i+1})$ en nous conformant à leur ordre de succession sur cet arc, supposé orienté de a_i vers a_{i+1}.

$C^{(2)}_{\eta,L}(a, b) = (p'_1 p'_2 \ldots p'_{n'})$ désignant la chaîne ainsi obtenue, on a donc pour tous $i \neq j$: soit $L[p'_i p'_{i+1}] = L[p'_j p'_{j+1}]$, soit $L(p'_i p'_{i+1}) \cdot L(p'_j p'_{j+1}) = 0$ et d'autre part en vertu de (1):

$$I_f[C'_{\eta,L}(a, b)] = I_f[C^{(2)}_{\eta,L}(a, b)]. \tag{3}$$

Omettons maintenant dans la chaîne $C^{(2)}_{\eta,L}(a, b)$ tous les termes identiques à leurs antécédents immédiats, de même que tous les termes dont les antécédents et les succédents immédiats sont identiques. En vertu de **2.** et **3**, cette dernière transformation n'altère pas la rotation de f.

C'est l'itération finie de ce procédé qui fournira donc la chaîne définitive $C'^{*}_{\eta,L}(a. b)$, pour laquelle on a en vertu de (3):

$$I_f[C'^{*}_{\eta,L}(a, b)] = I_f[C'_{\eta,L}(a, b)].$$

Revenant à nos chaînes primitives $C'_{\eta,L}(a, b)$ et $C''_{\eta,L}(a, b)$, pour démontrer l'égalité $I_1 = I_2$, il est par conséquent légitime d'admettre que ces deux chaînes ont été préalablement transformées de la sorte, c'est à dire que l'on a: $C'_{\eta,L}(a, b) = C'^{*}_{\eta,L}(a, b)$ et $C''_{\eta,L}(a, b) = C''^{*}_{\eta,L}(a, b)$.

Or, il suffit à présent de ranger les termes des chaînes $C'_{\eta,L}(a, b)$ et $C''_{\eta,L}(a, b)$ en une chaîne $C_{\eta,L}(a, b) = (c_1 c_2 \ldots c_{m+1})$, en les écrivant dans leur ordre de succession sur l'arc $L[a, b]$, pour conclure immédiatement de (1) que

$$I_f[C'_{\eta,L}(a, b)] = I_f[C_{\eta,L}(a, b)] \quad \text{et} \quad I_f[C''_{\eta,L}(a, b)] = I_f[C_{\eta,L}(a, b)], \text{ c. q. f. d.}$$

Le résultat obtenu permet d'admettre la définition suivante:

8. Definition. J'appelle *rotation de* a *à* b *de la fonction* f *sur un arc simple* $L = L[a, b]$ le nombre

$$I_a^b(f, L) = I_f[C_{\alpha,L}(a, b)]$$

où $C_{\alpha,L}(a, b) = (p_1 p_2 \ldots p_{n+1})$ est une chaîne arbitraire satisfaisant à la condition $\delta(L[p_i p_{i+1}]) < \eta$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Le nombre $I_a^b(f, L)$ possède les propriétés suivantes:

9. $I_a^b(f, L) = - I_b^a(f. L)$,

10. *Si* $c \in L = L[a, b]$, *alors* $I_a^b(f, L) = I_a^c(f. L[a, b]) + I_c^b(f L[c, b])$,

11. *Si les arcs simples* L *et* L' *de* E *ont les extrémités communes* a *et* b, *on a* $I_a^b(f, L) \equiv I_a^b(f, L')$ (mod. 2π).

12. *Si* $f(x) = const.$, *alors* $I_a^b(f, L) = 0$,

13. *Si une fonction* h *transforme* $L = L[a, b]$ *par homéomorphie en* $L' = L'[a' b'] \subset E$ *où* $h(a) = a'$ *et* $h(b) = b'$, *alors on a* $I_{a'}^{b'}(f, L') = I_a^b(fh, L)$.

Démonstration. Soit un $\alpha_1 > 0$ assez petit pour que l'inégalité $\varrho_E(x, y) < \alpha_1$ où $x, y \in L'$ entraîne l'inégalité $\delta_E(L'[x, y]) < \eta$. En vertu de la définition 8, il existe un $\alpha > 0$ suffisamment petit pour que la rotation de la fonction composée fh par rapport à toutes les chaînes $C_{\alpha, L}(a, b)$ soit égale à $I_a^b(fh, L)$.

Par suite de la continuité de h on peut supposer en outre que l'on a pour $\varrho_L(x, y) < \alpha$ où $x, y \in L$:

$$\varrho_{L'}(h(x), h(y)) < \alpha_1. \tag{1}$$

Pour toute chaîne $C_{\alpha_1, L}(a, b) = (p_1 p_2 \ldots p_{n+1})$ on a alors:

$$I_a^b(fh, L) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{fh}(p_i p_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_f[h(p_i) h(p_{i+1})]. \tag{2}$$

Mais selon (1), 8 et par définition de α_1 on a $I_{a'}^{b'}(f, L') = \sum_{i=1}^{n} \varphi_f[h(p_i) h(p_{i+1})]$, d'où selon (2): $I_a^b(fh, L) = I_{a'}^{b'}(f, L')$, c. q. f. d.

14. *Si* $L = L[a, b] \subset E$ *et si le nombre positif* α *est assez petit pour que l'inégalité* $\varrho(x, y) < 3\alpha$ *où* $x, y \in L$ *entraîne l'inégalité* $\delta(L[x, y]) < \eta$, *on a pour tout* $L' = L'[a' b'] \subset U_{\alpha, E}(L)$ *où* $\varrho(a\, a') < \alpha$ *et* $\varrho(b, b') < \alpha$:

$$I_a^b(f, L) - I_{a'}^{b'}(f, L') = \varphi_f(a\, a') - \varphi_f(b, b').$$

Démonstration. Soit $C'_{\alpha, L'}(a' b') = (q_1 q_2 \ldots q_{n+1})$ une chaîne telle que $\delta(L'[q_i q_{i+1}]) < \eta$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Posons $p_1 = a$ et $p_{n+1} = b$ et prenons comme p_i un point arbitraire de L de manière à avoir $\varrho(p_i q_i) \leqslant \alpha$.

Par conséquent: $\varrho(p_i p_{i+1}) \leqslant \varrho(p_i q_i) + \varrho(q_i q_{i+1}) + \varrho(q_{i+1} p_{i+1}) < 3\alpha$, d'où $\delta(L[p_i p_{i+1}]) < \eta$.

Soit $C_{3\alpha, L}(a, b) = (p_1 p_2 \ldots p_{n+1})$. Il en résulte d'après la définition 8 et 5 que $I_a^b(f, L) - I_{a'}^{b'}(f, L') = I_f[C_{3\alpha, L}(a, b)] - I_f[C'_{\alpha, L}(a' b')] = \varphi_f(a, a') - \varphi_f(b, b')$, c. q. f. d.

15. Considérons maintenant le cas de la fonction f continue et définie dans un espace E compact. Par suite de la compacticité de E

et de la continuité de f la condition C se trouve vérifiée et tous les théorèmes démontrés jusqu'à présent restent valables pour le cas considéré.

En conséquence on a les théorèmes suivants:

16. *Si la fonction* f *définie dans un espace métrique* E' *est continue et si pour chaque* t *tel que* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *il existe un arc simple* $L_t = L_t[a_t b_t] \subset E'$ *où:*

1) a_t *et* b_t *sont des fonctions continues du paramètre* t,

2) $\lim\limits_{|t - t_0| \to 0} [\text{borne sup.}_{x \in L_t}\, \varrho(x, L_{t_0})] = 0$ pour tout $t_0 \in [0, 1]$,

alors le nombre $I_t = I_{a_t}^{b_t}(f, L_t)$ *est également une fonction continue du paramètre* t.

Démonstration. Soit $E = \sum\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} L_t$. Il est facile de prouver que E est un espace compact. Soient $t_0 \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Soit enfin un $\alpha > 0$ assez petit pour que l'inégalité $\varrho(x, y) < 3\alpha$ où $x, y \in L_{t_0}$ entraîne l'inégalité $\delta(L_{t_0}[x, y]) < \eta$.

D'après 1) et 2) il existe un $\alpha_1 > 0$ tel que l'inégalité $|t - t_0| < \alpha_1$ entraîne à la fois toutes les formules suivantes: $\varrho(a_t\, a_{t_0}) < \alpha$, $\varrho(b_t, b_{t_0}) < \alpha$, $|\varphi_f(a_{t_0} a_t)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $|\varphi_f(b_{t_0} b_t)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ et $L_t \subset U_\alpha(L_{t_0})$.

On a par conséquent en vertu de **14**: $I_{t_0} - I_t = \varphi_f(a_{t_0} a_t) - \varphi_f(b_{t_0} b_t)$, d'où $|I_{t_0} - I_t| \leqslant |\varphi_f(a_{t_0} a_t)| + |\varphi_f(b_{t_0} b_t)| < \varepsilon$, c. q. f. d.

17. *E étant un arc* $L = L[a, b]$ *et* f *une fonction continue, les conditions* $f(a) = f(b)$ *et* $K - f(L) \neq 0$ *entraînent l'égalité* $I_a^b(f, L) = 0$.

Démonstration. En vertu de **13**, il suffit de se borner au cas où L = segment $[-1, +1]$ de l'axe des x. Envisageons la demi-circonférence $D = \underset{z}{E}[z = e^{i\varphi}$ où $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi]$ [1]) et soit P le demi-cercle de frontière $L + D$.

Posons $f(x) = f(-1)$ pour $x \in D$ et étendons [2]) la fonction f sur P relativement à l'ensemble $f(L + D) = f(L)$.

L'ensemble $f(L)$ étant un arc simple ou un point, cette extension est possible [3]).

[1]) le symbole $\underset{z}{E}[\,]$ désignant l'ensemble de tous les z à propriété $[\,]$.

[2]) Voir pour la définition de l'*extension* ma Note *Sur les rétractes*, ce volume, p. 156, **8**.

[3]) l. c., p. 160, **17**, Exemple, et p. 161, **19**.

Envisageons maintenant une *déformation continue* [1]) *de L en D*, donnée par la formule:

$$\psi(x,t) = (x, t\sqrt{1-x^2}) \quad \text{où} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Soit $L_t = \psi(L,t)$. Par conséquent L_t est un arc simple, le nombre $I_t = I_{-1}^{+1}(f, L_t)$ est d'après **16** une fonction continue du paramètre t et on a selon **11**: $I_t \equiv I_0 \pmod{2\pi}$. On en conclut immédiatement que $I_1 = I_0$.

Cependant $L_1 = D$ et $f(D) = f(-1)$, d'où selon **12**: $I_1 = 0$, donc $I_{-1}^{+1}(f, L) = I_0 = 0$, c. q. f. d.

18. *Soit $L_i = L_i[a_i\, b_i]$ où $i = 1, 2\ldots$ une suite d'arcs simples disjoints situés sur $L = L[a,b]$. Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deux fonctions continues transformant L en K de façon que l'on ait:*

1°) $I_{a_i}^{b_i}(f_1, L_i) = I_{a_i}^{b_i}(f_2, L_i)$,

2°) $f_1(x) = f_2(x)$ *pour tout* $x \in L - \sum_{i=1}^{\infty} L_i$.

Alors $I_a^b(f_1, L) = I_a^b(f_2, L)$.

Démonstration. On peut admettre sans restreindre la généralité du théorème que $L[a, a_i] \subset L[a, b_i]$. Admettons en outre que l'inégalité $\varrho(x,y) < \alpha$ où $x, y \in L$ entraîne l'inégalité $\delta(L[x,y]) < \eta$ et que l'inégalité $\varrho(x,y) < \eta$ où $x, y \in L$ entraîne les inégalités: $|f_1(x) - f_1(y)| < 1$ et $|f_2(x) - f_2(y)| < 1$.

Envisageons une chaîne $C_{\alpha,L}(a,b) = (x_1\, x_2 \ldots x_{n+1})$ assujettie aux conditions:

(i) les arcs $L[a, x_i]$ forment une suite croissante,

(ii) si la chaîne $C_{\alpha,L}(a,b)$ contient un point d'un arc L_i, elle en contient les extrémités a_i et b_i.

Soit $L_{k_1}, L_{k_2}, \ldots, L_{k_p}$ la suite de tous les arcs dont les extrémités appartiennent à la chaîne $C_{\alpha,L}(a,b)$. Soient notamment:

$$x_{i_1} = a_{k_1},\ x_{i_2} = a_{k_2}, \ldots,\ x_{i_p} = a_{k_p}$$

et

$$x_{j_1+1} = b_{k_1},\ x_{j_2+1} = b_{k_2}, \ldots,\ x_{j_p+1} = b_{k_p},$$

$$\text{où} \quad i_1 \leqslant j_1 < i_2 \leqslant j_2 < i_3 \leqslant \ldots < i_p \leqslant j_p.$$

[1]) J'appelle *déformation continue de A en B* toute fonction $\psi(x,t)$ définie pour $x \in A$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, continue par rapport aux deux variables et telle que $\psi(x, 0) = x$ et $\psi(A, 1) = B$.

D'après **8** et **4** on a alors: $I_a^b(f, L) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{f_1}(x_i\, x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{i_1-1} \varphi_{f_1}(x_i\, x_{i+1}) +$
$+ \sum_{i=j_p}^{n} \varphi_{f_1}(x_i\, x_{i+1}) + \sum_{r=1}^{p} \sum_{i=i_r}^{j_r} \varphi_{f_1}(x_i\, x_{i+1}) + \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{i=j_r}^{i_{r+1}-1} \varphi_{f_1}(x_i\, x_{i+1})$.

Or on a d'après (i) et 2°):

$$\sum_{i=1}^{i_1-1} \varphi_{f_1}(x_i\, x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{i_1-1} \varphi_{f_2}(x_i\, x_{i+1}),$$

$$\sum_{i=j_p}^{n} \varphi_{f_1}(x_i\, x_{i+1}) = \sum_{i=j_p}^{n} \varphi_{f_2}(x_i\, x_{i+1}),$$

$$\sum_{i=j_r}^{i_{r+1}-1} \varphi_{f_1}(x_i\, x_{i+1}) = \sum_{i=j_r}^{i_{r+1}-1} \varphi_{f_2}(x_i\, x_{i+1}),$$

et d'après **8**, (i) et 1°):

$$\sum_{i=i_r}^{j_r} \varphi_{f_1}(x_i\, x_{i+1}) = I_{a_r}^{b_r}(f_1, L_r) = I_{a_r}^{b_r}(f_2, L_r) = \sum_{i=i_r}^{j_r} \varphi_{f_2}(x_i\, x_{i+1}).$$

Ces égalités montrent donc que $\sum_{i=1}^{n} \varphi_{f_1}(x_i\, x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{f_2}(x_i\, x_{i+1})$, d'où $I_a^b(f_1, L) = I_a^b(f_2, L)$, c. q. f. d.

19. Etablissons sur une courbe simple fermée $\Omega \subset E$ le sens du parcours et soient $L_1 = L_1[a,b]$ et $L_2 = L_2[a,b]$ deux arcs tels que $\Omega = L_1 + L_2$, $L_1 \cdot L_2 = (a,b)$ et que la direction de a vers b sur l'arc L_1 soit conforme au sens du parcours de Ω. J'admets alors la définition suivante:

20. Définition: *J'appelle rotation de la fonction f sur la courbe Ω le nombre* $I(f, \Omega) = I_a^b(f, L_1) + I_b^a(f, L_2)$.

Il résulte de **10** que *la rotation $I(f, \Omega)$ ne dépend pas du choix des arcs L_1 et L_2 et qu'elle change de signe avec le sens du parcours de la courbe Ω.*

Je me servirai des propriétés suivantes du nombre $I(f, \Omega)$, dont les deux premières sont évidentes:

21. *Si la fonction f transforme Ω par homéomorphie en K, alors* $I(f, \Omega) = \pm 2\pi$.

22. *Si pour $L = L[a, b] \subset E$ on a $L \cdot \Omega = (a, b)$ et si l'on admet sur $\Omega_1 = L + L_1$ et $\Omega_2 = L_2 + L$ le sens du parcours coïncidant sur L_1 et L_2 avec celui établi pour la courbe $\Omega = L_1 + L_2$, alors $I(f, \Omega) = I(f, \Omega_1) + I(f, \Omega_2)$.*

23. *$f(x)$ étant une fonction continue définie pour chaque $x \epsilon \Omega$ et telle que $K \neq f(\Omega) \subset K$, on a $I(f, \Omega) = 0$.*

Démonstration. Si $f(\Omega)$ se réduit à un point, la thèse du théorème résulte de **12**. Dans le cas contraire, $f(\Omega)$ est un arc simple. Posons dans ce cas $f(\Omega) = \Lambda_1 = \Lambda_1[p_1, p_2]$ et $\Lambda_2 = \overline{K - \Lambda_1}$. Il existe alors deux points $a_1, a_2 \epsilon \Omega$ tels que $f(a_1) = p_1$ et $f(a_2) = p_2$. Soient L_1' l'arc simple à extrémités a_1 et a_2 contenu dans Ω et $L_2' = \overline{\Omega - L_1'}$. Considérons un point arbitraire $p \epsilon K - \Lambda_2$. Il existe alors deux points $a \epsilon \Omega - L_1'$ et $b \epsilon \Omega - L_2'$ tels que $f(a) = f(b) = p$, la fonction f passant sur L_1' ainsi que sur L_2' par toutes ses valeurs. En posant donc $L_1 = L_1[a, b] \subset \Omega$ et $L_2 = \overline{\Omega - L_1}$ on a selon **17**: $I_a^b(f, L_1) = I_a^b(f, L_2) = 0$, d'où $|I(f, \Omega)| = |I_a^b(f, L_1) + I_b^a(f, L_2)| = 0$, c. q. f. d.

24. *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant deux fonctions continues qui transforment E en un sous-ensemble de K de façon que l'on ait $|f_1(x) - f_2(x)| < 1$ pour tout $x \epsilon \Omega$, on a $I(f_1, \Omega) = I(f_2, \Omega)$.*

Démonstration. Soient $a, b \epsilon \Omega$, $\Omega = L_1 + L_2$, $L_1 = L_1[a, b]$ et $L_2 = L_2[a, b]$ où le sens du parcours de Ω coïncide avec celui de L_1 (de a vers b). Il vient:

$$I(f_1, \Omega) = I_a^b(f_1, L_1) + I_a^b(f_1, L_2) \text{ et } I(f_2, \Omega) = I_a^b(f_2, L_1) + I_a^b(f_2, L_2).$$

Il existe en vertu de **8** une chaîne $C_{\alpha, L_1}(a, b) = (p_1\, p_2 \ldots p_{n+1})$ et une autre $C'_{\alpha, L_2}(b, a) = (q_1\, q_2 \ldots q_{k+1})$ où

$$I(f_1, \Omega) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{f_1}(p_i\, p_{i+1}) + \sum_{i=1}^{k} \varphi_{f_1}(q_i\, q_{i+1})$$

et

$$I(f_2, \Omega) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{f_2}(p_i\, p_{i+1}) + \sum_{i=1}^{k} \varphi_{f_2}(q_i\, q_{i+1}),$$

donc

$$I(f_2, \Omega) - I(f_1, \Omega) = \sum_{i=1}^{n} [\varphi_{f_2}(p_i\, p_{i+1}) - \varphi_{f_1}(p_i\, p_{i+1})] + \\ + \sum_{i=1}^{k} [\varphi_{f_2}(q_i\, q_{i+1}) - \varphi_{f_1}(q_i\, q_{i+1})].$$

Désignons pour $x \epsilon \Omega$ par $\varphi(x)$ l'angle de rotation le plus petit (muni de son signe) que doit effectuer le vecteur $\overrightarrow{0, f_1(x)}$ jusqu'à sa coïncidence avec $\overrightarrow{0, f_2(x)}$. Alors: $|\varphi(x)| < \frac{1}{3}\pi$.

Il vient

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi_{f_2}(p_i\, p_{i+1}) - \varphi_{f_1}(p_i\, p_{i+1})] = \sum_{i=1}^{n} [\varphi_{f_2}(p_i\, p_{i+1}) - \varphi(p_{i+1}) + \\ + \varphi_{f_1}(p_{i+1}\, p_i) + \varphi(p_i)] + \varphi(p_{n+1}) - \varphi(p_1).$$

Posons $\Phi_i = \varphi_{f_2}(p_i\, p_{i+1}) - \varphi(p_{i+1}) - \varphi(p_{i+1}\, p_i) + \varphi(p_i)$. On a alors $\Phi_i \equiv 0 \pmod{2\pi}$ et $|\Phi_i| < \frac{4}{3}\pi < 2\pi$, d'où $\Phi_i = 0$. Donc:

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi_{f_2}(p_i\, p_{i+1}) - \varphi_{f_1}(p_i\, p_{i+1})] = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i + \varphi_{f_1}(p_{n+1}) - \varphi(p_1) = \\ = \varphi_{f_1}(p_{n+1}) - \varphi(p_1).$$

Pareillement:

$$\sum_{i=1}^{k} [\varphi_{f_2}(q_i\, q_{i+1}) - \varphi_{f_1}(q_i\, q_{i+1})] = \varphi(q_{k+1}) - \varphi(q_1).$$

d'où en vertu de $p_1 = q_{k+1} = a$ et $q_1 = p_{n+1} = b$ on obtient

$$I(f_2, \Omega) - I(f_1, \Omega) = 0,$$

c. q. f. d.

25. *Soient $L_i = L_i[a_i\, b_i]$ où $i = 1, 2, \ldots$ une suite d'arcs simples disjoints situés sur Ω. Soient $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deux fonctions continues transformant Ω en $f(\Omega) \subset K$ et telles que:*

1. *$I_{a_i}^{b_i}(f_1, L_i) = I_{a_i}^{b_i}(f_2, L_i)$,*
2. *$f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \epsilon \Omega - \sum_{i=1}^{\infty} L_i$.*

On a alors

$$I(f_1, \Omega) = I(f_2, \Omega).$$

Démonstration. L'application directe de **18** et **20**.

26. Définition: Si Π est un parcours de p à q dans l'espace E, en formules:

$$\Pi = (L_1, L_2, \ldots, L_n) \quad \text{où} \quad L_i = L_i[a_i\, a_{i+1}] \subset E, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$a_1 = p \quad \text{et} \quad a_{n+1} = q,$$

j'appelle *rotation de la fonction* f *sur le parcours* Π *le nombre*

$$I(f, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} I_{a_i}^{a_{i+1}}(f, L_i).$$

27. *Si l'on a pour chaque courbe simple fermée* Ω *contenue dans un parcours fermé* Π *situé dans* E

(1) $$I(f, \Omega) = 0,$$

alors

(2) $$I(f, \Pi) = 0.$$

Démonstration. Soit $\Pi = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ où $L_i = L_i[a_i a_{i+1}] \subset E$ $i = 1, 2, \dots, n$ et $a_1 = a_{n+1}$.

Posons d'abord $n = 2$. On a alors:

$$L_1 = L_1[a_1 a_2] \quad et \quad L_2 = L_2[a_2 a_1].$$

L'ensemble $L_1 - L_2$ est la somme d'une infinité au plus dénombrable d'arcs simples ouverts (ou vides) $\Lambda_i = L_1(p_i q_i)$ où $p_i, q_i \in L_1 \cdot L_2$ et $\delta(\Lambda_n) \to 0$.

Soit un $\alpha > 0$ assez petit pour que l'inégalité $\varrho(x, y) < 3\alpha$ où $x, y \in L_2$ entraîne l'inégalité $\delta(L_2[x, y]) < \eta$. Il existe un u assez grand pour que $\delta(\Lambda_i) < \alpha$, quel que soit $i \geqslant u$.

Envisageons l'ensemble

$$L = \left(L_2 - \sum_{i=u}^{\infty} L_2[p_i q_i]\right) + \sum_{i=u}^{\infty} \Lambda_i[p_i q_i].$$

Il est facile de constater que l'ensemble L est un arc simple à extrémités a_1 et a_2 et que $L \subset U_\alpha(L_2)$. On a donc en vertu de **2** et **14**:

(3) $$I_{a_1}^{a_2}(f, L) = I_{a_1}^{a_2}(f, L_2).$$

L'hypothèse (1) implique en vertu de l'inclusion $L_1 + L \subset L_1 + L_2$ que pour chaque courbe simple fermée $\Omega \subset L + L_1$ on a $I(f, \Omega) = 0$.

L'ensemble $L \cdot L_1$ contenant un nombre fini de composantes, je vais démontrer par induction finie que:

(4) $$I_{a_1}^{a_2}(f, L) = I_{a_1}^{a_2}(f, L_1).$$

k désignant le nombre de composantes de $L \cdot L_1$, l'égalité (4) est évidemment vraie pour $k = 1$, c'est-à-dire, lorsque $L = L_1$.

Or, elle est vraie aussi pour $k+1$, lorsqu'elle l'est pour k.

En effet, $L - L_1$ est somme de k arcs simples sans extrémités, dont soit $\Lambda = \Lambda[a, b]$ le premier (en allant de a_1 vers a_2). On a par conséquent:

(5) $$L[a_1, a] = L_1[a_1, a]$$

et selon **10**:

$$I_{a_1}^{a_2}(f, L_1) = I_{a_1}^{a}(f, L_1[a_1, a]) + I_a^b(f, L_1[a, b]) + I_b^{a_2}(f, L_1[b, a_2]),$$

$$et \quad I_{a_1}^{a_2}(f, L) = I_{a_1}^{a}(f, L[a_1, a]) + I_a^b(f, L[a, b]) + I_b^{a_2}(f, L[b, a_2]).$$

Mais selon (5) on a $I_{a_1}^{a}(f, L_1[a_1, a]) = I_{a_1}^{a}(f, L[a_1, a])$ et, l'ensemble $\Omega = L_1[a, b] + L[a, b]$ étant une courbe simple fermée, on conclut de (1) que $I_a^b(f, L_1[a, b]) = I_a^b(f, L[a, b])$, d'où selon **9**:

(6) $$I_{a_1}^{a_2}(f, L_1) + I_{a_2}^{a_1}(f, L) = I_{a_1}^{a_2}(f, L_1) - I_{a_1}^{a_2}(f, L) = \\ = I_b^{a_2}(f, L_1[b, a_2]) - I_b^{a_2}(f, L[b, a_2]).$$

Comme l'ensemble $L_1[b, a_2] \cdot L[b, a_2]$ contient au plus k composantes, on a par hypothèse:

(7) $$I_b^{a_2}(f, L_1[b, a_2]) + I_{a_2}^{b}(f, L[b, a_2]) = 0.$$

Les égalités (6) et (7) impliquent immédiatement l'égalité (2) ce qui achève la démonstration du théorème dans le cas où $n = 2$.

Afin de le démontrer pour $n > 2$ nous allons procéder par induction.

Soit a le premier point de l'arc L_2 qui se trouve sur L_1, en allant de a_1 vers a_2. Alors: $I_{a_1}^{a_2}(f, L_1) + I_{a_2}^{a_3}(f, L_2) = I_{a_1}^{a}(f, L_1[a_1, a]) + I_a^{a_2}(f, L_1[a, a_2]) + I_{a_2}^{a}(f, L_2[a_2, a]) + I_a^{a_3}(f, L_2[a, a_3])$.

Le théorème étant vrai pour $n = 2$, on a $I_{a_2}^{a}(f, L_2[a_2, a]) + I_a^{a_2}(f, L_1[a_2, a]) = 0$.

Il suffiit donc de démontrer que

(8) $$I_{a_1}^{a}(f, L_1[a_1, a]) + I_a^{a_3}(f, L_2[a, a_3]) + \sum_{i=3}^{n+1} I_{a_i}^{a_{i+1}}(f, L_i) = 0.$$

Envisageons à cet but l'ensemble $L = L_1[a_1, a] + L_2[a, a_3]$, qui est un arc simple ou se reduit à un seul point. L'ensemble $L + L_3 + \dots + L_{n+1}$ étant formé tout au plus de n arcs simples qui remplissent les hypothèses du théorème, on en conclut, en supposant le théorème vrai pour le cas de $\leqslant n$ arcs, que $I_{a_1}^{a_3}(f, L) +$

$+\sum_{i=3}^{n} I_{a_i}^{a_{i+1}}(f, L_i) = 0$, ce qui entraîne en vertu de l'égalité: $I_{a_1}^{a_3}(f, L) = I_{a_1}^{a}(f, L_1[a_1, a]) + I_{a}^{a_3}(f, L_2[a, a_3])$ l'égalité (8), q. f. d.

28. *Si f est une fonction continue telle que $K \neq f(E) \subset K$, on a $I(f, \Pi) = 0$ pour tout parcours fermé Π situé dans E.*

Démonstration. C'est un corollaire immédiat de **26**, **23** et **27**.

29. *Etant donnée une fonction continue $f(x)$ qui transforme l'arc simple $L = L[a, b]$ en $f(L) \subset K$ de manière à avoir $f(a) = 1$, $f(b) = -1$ et $-i$ non $\epsilon f(L)$ (resp. i non $\epsilon f(L)$), on a $I_a^b(f, L) = \pi$ (resp. $I_a^b(f, L) = -\pi$).*

Démonstration. En vertu de **13** on peut se borner au cas où $a = +1$, $b = -1$ et $L =$ segment $[-1, +1]$ de l'axe des x.

Etendons la fonction f sur l'ensemble $K_1 = \underset{z}{E}[z = e^{i\varphi};\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi]$ (resp. sur l'ensemble $K_2 = \overline{K - K_1}$), en posant $f(z) = z$ pour tout $z \epsilon K_1$.

Soit $\Omega = L + K_1$ (resp. $\Omega = L + K_2$). Alors $-i$ *non* $\epsilon f(\Omega)$ (resp. i *non* $\epsilon f(\Omega)$), d'où il résulte en vertu de **23** que $I(f, \Omega) = 0$. Donc $I_a^b(f, L) = I_a^b(f, K_1) = \pi$ (resp. $I_a^b(f, L) = I_a^b(f, K_2) = -\pi$), c. q. f. d.

II. La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace quasi-peanien[1]) soit unicohérent[2]).

30. Théorème. *Tout espace quasi-péanien qui n'est pas unicohérent contient une courbe simple fermée qui est son rétracte*[3]).

Démonstration[4]). La marche de la démonstration est la suivante: je définirai dans l'espace E une région Γ dont la frontière est somme de deux ensembles séparés V et W et deux arcs simples $L_0 = L_0[x_1 x_2]$ et $\Lambda_0 = \Lambda_0[x_1 x_2]$ tels que $L_0(x_1 x_2) \subset \Gamma$, $\Lambda_0(x_1 x_2) \subset E - \overline{\Gamma}$ où $x_1 \epsilon V$ et $x_2 \epsilon W$.

[1]) Voir l'introduction, p. 171—172.

[2]) Voir la note [2]), p. 171.

[3]) J'appelle l'ensemble $B \subset A$ *rétracte* de A, lorsqu'il existe une fonction continue f définie dans l'ensemble A et satisfaisant aux conditions: 1° $f(A) = B$, 2° $ff(x) = f(x)$ pour chaque $x \epsilon A$; cf. ma Note, ce volume, p. 153, **2**.

[4]) M. Aronszajn m'a fait part qu'il avait obtenu ce théorème par une méthode différente.

Ensuite j'étendrai la fonction f définie par les formules:

$$f(x) = x \quad \textit{pour tout } x \epsilon \Omega = L_0 + \Lambda_0,$$
$$f(V) = (x_1) \quad \textit{et} \quad f(W) = (x_2)$$

sur l'ensemble E relativement à la courbe Ω. La fonction obtenue constituera ainsi une *rétraction* de l'ensemble E à la courbe Ω.

Soit E l'espace quasi-péanien non unicohérent. Il existe donc une décomposition de E en deux ensembles *connexes* A et B:

(1) $$E = A + B$$

(2) $$A \cdot B = P + Q$$

(3) $$P \cdot Q = 0,$$

où

(4) *A, B, P et Q sont fermés dans E et non-vides.*

L'espace E étant un espace métrique, on peut en vertu de (3) entourer P et Q des ensembles ouverts G' et H' tels que:

(5) $$P \subset G', \quad Q \subset H' \quad \textit{et} \quad \overline{G'} \cdot \overline{H'} = 0.$$

Les ensembles

(6) $$R = A - (G' + H')$$

et

(7) $$S = B - (G' + H')$$

sont fermés dans E en vertu de (4) et non-vides en vertu de (5) et de la connexité de A et B. De plus, $R \cdot S = 0$, car $R \cdot S \subset A \cdot B - (G' + H') = 0$ selon (2) et (5). Il existe donc dans E deux ensembles ouverts G'' et H'' tels que:

(8) $$R \subset G'', \quad S \subset H'' \quad \textit{et} \quad \overline{G''} \cdot \overline{H''} = 0.$$

Posons:

(9) $$G = G'' + G' + H' \quad \textit{et} \quad H = H'' + G' + H'.$$

Les ensembles G et H sont ouverts dans E et on a selon (6), (7) et (8): $A \subset G$ et $B \subset H$.

Or, E étant par hypothèse localement connexe, les composantes des sous-ensembles G et H, ouverts dans E, sont ouvertes[1]). $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ désignant respectivement les composantes de G et H qui contiennent les ensembles connexes A et B, on a donc:

(10) $$A \subset \mathfrak{A} \subset G \quad \textit{et} \quad B \subset \mathfrak{B} \subset H.$$

On a, de plus, en vertu de (8) et (9):

(11) $$\overline{\mathfrak{A}} \cdot \overline{\mathfrak{B}} \subset \overline{G} \cdot \overline{H} = \overline{G'} + \overline{H'}$$

[1]) C. Kuratowski, Fund. Math. I, p. 43; H. Hahn, Fund. Math. II, p. 189.

En posant

$$M=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\cdot\overline{G'}\quad et\quad N=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\cdot\overline{H'},$$

on obtient donc de (11):

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=M+N \tag{12}$$

et de (5):

$$\overline{M}\,.\,\overline{N}=0, \tag{13}$$

$$P\subset M\quad et\quad Q\subset N. \tag{14}$$

Or, (5) et (10) donnent:

$$\overline{\mathfrak{A}}\cdot\overline{\mathfrak{B}}=\overline{\mathfrak{A}}\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}+\overline{\mathfrak{A}}\cdot\overline{\mathfrak{B}}\cdot\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cdot\overline{\mathfrak{B}}+\mathfrak{B}\cdot\overline{\mathfrak{A}} \tag{15}$$

d'où, les ensembles $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ étant ouverts,

$$\mathfrak{A}\cdot\overline{\mathfrak{B}}\subset\overline{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}}\quad et\quad \mathfrak{B}\cdot\overline{\mathfrak{A}}\subset\overline{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}},$$

donc d'après (15): $\overline{\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}}=\overline{\mathfrak{A}}\cdot\overline{\mathfrak{B}}$, et enfin selon (12):

$$\overline{\mathfrak{A}}\cdot\overline{\mathfrak{B}}=\overline{M}+\overline{N}. \tag{16}$$

D'autre part,

$$\mathfrak{A}-\overline{\mathfrak{B}}\neq 0\neq\mathfrak{B}-\overline{\mathfrak{A}}, \tag{17}$$

car p. ex. l'égalité $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\cdot\overline{\mathfrak{B}}\ (\subset\overline{\mathfrak{A}}\cdot\overline{\mathfrak{B}}=\overline{M}+\overline{N})$ est impossible en raison de (13), (14), (10) et de la connexité de $\mathfrak{A}$.

Soient donc $x_0\in\mathfrak{A}-\overline{\mathfrak{B}}$, $p\in P$ et $q\in Q$. En vertu de la connexité locale de E, il existe [1]) dans $\mathfrak{A}$ deux arcs simples

$$\Lambda_1=\Lambda_1[p,x_0]\subset\mathfrak{A}\quad et\quad \Lambda_2=\Lambda_2[q,x_0]\subset\mathfrak{A}$$

et, par conséquent, un arc simple $\Lambda\subset\Lambda_1+\Lambda_2$ tel que

$$\Lambda=\Lambda[m,n]\subset\mathfrak{A}-\overline{\mathfrak{B}}\quad où\quad m\in\overline{M}\quad et\quad n\in\overline{N}. \tag{18}$$

La connexité locale de l'espace métrique E implique de plus l'existence de deux ensembles U_1 et U_2 ouverts dans E, connexes et tels que:

$$m\in U_1,\quad n\in U_2\quad et\quad \overline{M+U_1}\,.\,\overline{N+U_2}=0. \tag{19}$$

Soit x_1, resp. x_2 le premier point de $E-U_1$, resp. de $E-U_2$ situé sur Λ (en allant sur cet arc de m, resp. de n, vers n, resp. vers m). Les ensembles $\Lambda[m,x_1)$ et $\Lambda(x_1,n]$, resp. les ensembles $\Lambda[n,x_2)$ et $\Lambda(x_2,m]$, sont séparés et fermés

[1]) N. Aronszajn, Fund. Math. XV, p. 228—241. Cf. aussi C. Kuratowski, Fund. Math. XV, p. 306 et R. L. Moore, Trans. Amer. Math. Soc. 17, p. 135.

dans leur somme. Il existe [1]) donc un ensemble ouvert et connexe [2]) (une *région*) $U_1'\subset U_1$, resp. $U_2'\subset U_2$, tel que

$$\Lambda[m,x_1)\subset U_1',\quad resp.\quad \Lambda[n,x_2)\subset U_2', \tag{20}$$

$$\overline{U_1'}\,.\,\Lambda(x_1,n]=0,\quad resp.\quad \overline{U_2'}\,.\,\Lambda(x_2,m]=0. \tag{21}$$

L'ensemble $\Gamma=\mathfrak{B}+U_1'+U_2'$ est donc une région dans E et $m,n\in\Gamma$. Il existe par conséquent un arc simple $L=L[m,n]\subset\Gamma$.

Il existe enfin dans $L+\Lambda[m,x_1]+\Lambda[n,x_2]$ un arc simple $L_0=L_0[x_1,x_2]$. Posons $\Lambda_0=\Lambda[x_1,x_2]$ et $\Omega=L_0+\Lambda_0$.

En vertu de (20), Ω est une courbe simple fermée et on a selon (18), (20) et (21):

$$\Omega-\Lambda_0\subset\Gamma\quad et\quad \Omega-L_0\subset E-\overline{\Gamma}. \tag{22}$$

Pour représenter Ω comme rétracte de E, considérons la fonction $f(x)$ définie d'abord sur $\Omega+F(\Gamma)$ comme il suit:

$$\begin{cases} f(x)=x & pour\quad x\in\Omega\\ f(x)=x_1 & pour\quad x\in F(\Gamma)\,.\,\overline{M+U_1'}\\ f(x)=x_2 & pour\quad x\in F(\Gamma)\,.\,\overline{N+U_2'}\end{cases} \tag{23}$$

On a selon (16): $F(\Gamma)\subset\overline{\mathfrak{A}}\cdot\overline{\mathfrak{B}}+\overline{U_1'}+\overline{U_2'}=\overline{M+U_1'}+\overline{N+U_2'}$, donc $\Omega+F(\Gamma)=F(\Gamma)\cdot\overline{M+U_1'}+\Omega+F(\Gamma)\cdot\overline{N+U_2'}$, où le premier et le troisième sommande sont d'après (19) disjoints et selon (22) leur produit avec Ω se réduit à x_1, resp. à x_2.

Or, la fonction $f(x)$ étant continue sur chacun des trois sommandes et prenant les mêmes valeurs sur leurs produits respectifs, elle est continue dans l'ensemble $\Omega-F(\Gamma)$ tout entier.

Soit $\varphi(x)$, resp. $\psi(x)$, une fonction définie par la formule $\varphi(x)=f(x)$, resp. $\psi(x)=f(x)$, dans l'ensemble $[F(\Gamma)+\Omega]\,.\,\overline{\Gamma}=F(\Gamma)+\Lambda_0$ (voir (22)), resp. dans l'ensemble $[F(\Gamma)+\Omega]\,.\,(E-\Gamma)=F(\Gamma)+L_0$. L'ensemble des valeurs de φ, resp. de ψ, est donc formé par l'arc Λ_0, resp. par L_0. La fonction $\varphi(x)$, resp. $\psi(x)$, admet par conséquent [3]) une extension $\varphi_0(x)$, resp. $\psi_0(x)$, sur $\overline{\Gamma}$, resp. sur $E-\Gamma$, relative à Λ_0, resp. à L_0. Ces dernières étant continues et prenant les mêmes valeurs sur l'ensemble $\overline{\Gamma}(E-\Gamma)=F(\Gamma)$, la fonction $f_0(x)$ définie par les formules

$$f_0(x)=\varphi_0(x)\quad pour\ tout\quad x\in\overline{\Gamma}$$
$$f_0(x)=\psi_0(x)\quad pour\ tout\quad x\in E-\Gamma$$

est continue dans l'espace E tout entier et constitue notamment une extension de $f(x)$ sur E relative à Ω.

On a donc $f_0(x)=x$ pour tout $x\in\Omega$ et $f(E)=\Omega$, ce qui prouve que Ω est un rétracte de E, c. q. f. d.

[1]) Voir p. ex. K. Menger, *Dimensionstheorie*, S. 31.

[2]) Cf. p. 185, note [1]).

[3]) voir p. 177, note [3]).

31. Corollaire. *Si un espace quasi-péanien E n'est pas unicohérent, il existe une fonction continue f transformant E en circonférence K et une courbe simple fermée $\Omega \subset E$ telles que $I(f, \Omega) = \pm 2\pi$.*

En effet, g désignant une rétraction de E à une courbe simple fermée $\Omega \subset E$ et h une homéomorphie entre Ω et K, la fonction $f(x) = hg(x)$ transforme E en K d'une façon continue et Ω en K par homéomorphie.

On a donc, d'après **21**, $I(f, \Omega) = \pm 2\pi$, c. q. f. d.

32. Corollaire. [1]) *Tout espace quasi-péanien à point invariant* [2]) *est unicohérent.*

C'est une conséquence immédiate du th. **30** et d'un théorème [3]) d'après lequel tout rétracte d'un ensemble à point invariant, l'est également.

33. Je vais montrer maintenant que certaines déformations, dont je ferai usage dans la suite, peuvent être effectuées sur des fonctions continues sans compromettre leur continuité.

Lemme. *Si les ensembles $\{A_n\}$ et les fonctions f et $\{\varphi_n\}$, où $n = 1, 2, \ldots$, remplissent les conditions:*

1) $A_n \subset E$, *où E est un espace métrique localement connexe,*
2) $A_n \cdot A_k = 0$ *pour tout* $n \neq k$,
3) *f est définie dans E, continue et l'ensemble de ses valeurs $f(E)$ est situé dans un espace métrique E',*
4) *φ_n est définie sur $\bar{A}_n$, continue et $\varphi_n(\bar{A}_n) \subset E'$,*
5) $\varphi_n(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in F(A_n)$,
6) $\lim\limits_{n=\infty} \delta[\varphi_n(A_n)] = 0$,

alors la fonction $\varphi(x)$ définie pour $x \in E$ par les formules:

I) $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ *pour* $x \in A_n$ *et* $n = 1, 2, \ldots$,

II) $\varphi(x) = f(x)$ *pour* $x \in E - \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

est continue.

Démonstration. En vertu de 5) on peut se borner au cas où les ensembles A_n sont ouverts dans E. La fonction $\varphi(x)$ étant alors d'après 4) et I) continue aux points $x_0 \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, il ne reste qu'à examiner le cas où $x_0 \in E - \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, donc, selon II), où

$$\varphi(x_0) = f(x_0). \tag{1}$$

Il suffit de démontrer qu'il existe pour tout $\alpha > 0$ un entourage U de x_0 tel que

$$\varrho[f(x_0), \varphi(x)] < \alpha \quad \textit{pour tout} \quad x \in U. \tag{2}$$

Par suite de la continuité de f, il existe un $\lambda_1 > 0$ tel que l'inégalité $\varrho(x, x_0) < \lambda_1$, où $x \in E$, entraîne l'inégalité

$$\varrho[f(x), f(x_0)] < \tfrac{1}{2}\alpha. \tag{3}$$

En vertu de 6) il n'existe qu'une suite finie S d'ensembles A_n tels que $\delta[\varphi_n(A_n)] \geqslant \frac{1}{2}\alpha$. Soient $\{n_i\}$ où $i = 1, 2, \ldots, h$ les indices des termes de S pour lesquels on a

$$x_0 \in F(A_{n_i}) \tag{4}$$

et $\{m_j\}$ où $j = 1, 2, \ldots, k$ ceux (des autres termes de S) pour lesquels on a

$$A_{m_j} \cdot U_{\lambda_1}(x_0) \neq 0 \tag{5}$$

et

$$\varrho(x_0, A_{m_j}) > 0. \tag{6}$$

En vertu de 4) et (1) il existe un $\lambda_2 > 0$ tel que l'inégalité $\varrho(x, x_0) < \lambda_2$, où $x \in A_{n_i}$ et $i = 1, 2, \ldots, h$, entraîne l'inégalité:

$$\varrho[\varphi_{n_i}(x), f(x_0)] < \alpha. \tag{7}$$

Soient:

$$\lambda_3 = \min_{1 \leqslant j \leqslant k} \varrho(x_0, A_{m_j}), \tag{8}$$

$$\eta = \operatorname{Min}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \tag{9}$$

et U celle des composantes de $U_\eta(x_0)$ qui contient le point x_0. U est

[1]) C'est une généralisation du théorème de M. C. Kuratowski, Fund. Math. XIV, p. 307, concernant les *continus* péaniens.

[2]) On appelle ainsi tout ensemble E tel que l'équation $x = f(x)$ admet une solution pour toute fonction continue $f(x)$ transformant E en un sous-ensemble de E.

[3]) K. Borsuk, ce volume, p. 155, **7**.

donc une région dans E[1]) et je vais montrer que U remplit la condition (2).

En effet: si $x \in (E - \sum_{n=1}^{\infty} A_n) \cdot U$, (2) résulte de (3) et si $x \in U \cdot \sum_{i=0}^{h} A_{n_i}$, (2) résulte de (7). Si enfin $x \in U \cdot (A_n - \sum_{i=1}^{h} A_{n_i})$, pour un certain n, on a selon (8) et (9) et par définition de $\{n_i\}$:

$$(10) \qquad \delta[\varphi_n(A_n)] < \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Or, comme $x \in U \cdot A_n$ et $x_0 \in U - A_n$, il existe, parsuite de la connexité de U, un point $y \in F(A_n) \cdot U$ et on a $\varrho[f(y), f(x_0)] < \frac{1}{2}\alpha$ selon (3) et $\varrho[\varphi_n(y), \varphi_n(x)] < \frac{1}{2}\alpha$ selon (10), d'où par addition, l'inégalité (2), q. f. d.

34. Théorème. *Pour qu'un espace quasi-péanien E soit unicohérent, il est suffisant et nécessaire que la rotation de toute fonction continue f telle que $f(E) \subset K$ ne dépende, sur tout arc simple $L \subset E$, que des extrémités de L.*

Démonstration. La condition est suffisante en vertu de **32**.

Afin de prouver qu'elle est nécessaire, il suffit en vertu de **28** de montrer que l'on a $I(f, \Omega) = 0$ pour toute fonction continue f où $f(E) \subset K$ et pour toute courbe simple fermée $\Omega \subset E$.

Désignons d'une façon générale, quel que soit f, par $P(f)$, resp. par $N(f)$ l'ensemble de tous les points $x \in E$ pour lesquels on a $f(x) = 1$, resp. $f(x) = -1$ et supposons que l'on ait par contre

$$(1) \qquad I(f, \Omega) \neq 0.$$

Ceci dit, je vais définir, pour arriver à la contradiction, deux opérations τ_1 et τ_2 dont τ_1 transformera la fonction f en une nouvelle fonction f_2 qui, assujettie, s'il y a lieu, à l'opération τ_2 itérée, conduira à une fonction f_0 et à la courbe Ω_0 ayant des propriétés incompatibles.

Par suite de la continuité de f, les ensembles $P(f)$ et $N(f)$ sont fermés dans E et disjoints. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ les régions-composantes de $E - P(f) - N(f)$.

Formons la fonction f_1 définie sur E de la manière suivante:

[1]) Voir p. 185, note [1]).

Lorsque $x \in F_n$ où $F(F_n) \subset P(f)$, resp. où $F(F_n) \subset N(f)$, soit $f_1(x) = 1$, resp. $f_1(x) = -1$. Dans tous les autres cas soit $f_1(x) = f(x)$.

En vertu du lem. **33** la fonction f_1 remplit également les conditions du théorème. En outre, la frontière de toute région-composante de $E - P(f_1) - N(f_1)$ a des points communs avec $P(f_1)$ et $N(f_1)$ simultanément.

Remarquons enfin que l'on a d'après **25**: $I(f, \Omega) = I(f_1, \Omega)$, puisque $f_1(x)$ ne diffère dans Ω de $f(x)$ que sur les arcs dont les deux extrémités appartiennent soit à la fois à $P(f)$ soit à la fois à $N(f)$, de sorte que la rotation sur ces arcs s'annule en vertu de **17**, aussi bien pour f que pour f_1

Vu la compacticité de la courbe Ω et l'égalité $P(f_1) \cdot N(f_1) = 0$, on a:

$$\varrho[\Omega \cdot P(f_1), \ \Omega \cdot N(f_1)] > 0.$$

Il n'y a par conséquent dans Ω qu'un nombre fini des arcs contigus à $P(f_1) + N(f_1)$ et dont les extrémités appartiennent respectivement aux deux ensembles $P(f_2)$ et $N(f_2)$.

$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$, où $\Lambda_n = \Lambda_n[a_n, b_n]$ désignant la suite de tous les autres arcs-composantes de $\Omega - P(f_1) - N(f_1)$, on a

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \delta(\Lambda_n) = 0$$

et, en vertu de la connexité locale de E, il existe une suite de régions (relatives à E) $\{U_n\}$ satisfaisant aux conditions:

$$(3) \qquad \Lambda_n(a_n, b_n) \subset U_n,$$

$$(4) \qquad \delta(U_n) < 2\,\delta(\Lambda_n),$$

$$(5) \qquad \overline{U}_n \subset [E - P(f_1) - N(f_1) - \Omega - \sum_{k \neq n} \overline{U}_k] + \Lambda_n.$$

Ceci dit, soit f_2 la fonction définie sur E par les trois conditions suivantes:

$$(6) \qquad f_2(x) = f_1(x), \quad \text{si} \quad x \in E - \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

$$(7) \qquad f_2(x) = f_1(a_n) = f_1(b_n), \quad \text{si} \quad x \in \Lambda_n[a_n, b_n].$$

Enfin, *si $x \in U_n - \Lambda_n$ $(n = 1, 2 \ldots)$, soit $f_2(x)$ la fonction obtenue* *par l'extension, relative à l'ensemble* $K_n = f_1(\overline{U}_n)$, *de la fonction* f_2 *définie dans* $\Lambda_n + F(U_n)$ *par* (6) *et* (7).

Cette extension est possible, car K_n est un arc simple, car U_n est connexe et $f_1(\overline{U}_n)$ ne contient en vertu de (5) soit le point 1, soit le point -1.

En vertu du lem. **33** il résulte de (3) et (4) que la fonction $f_2(x)$ est continue. Elle a en outre les propriétés suivantes:

a) *le nombre des arcs de* Ω *contigus à* $P(f_2) + N(f_2)$ *est fini*; il est évidemment pair, soit $2m$, *et les extrémités de chacun d'eux viennent se placer respectivement sur* $P(f_2)$ *et* $N(f_2)$,

b) $I(f_2, \Omega) = I(f_1, \Omega)$.

Le passage de f à f_2 (l'opération τ_1) étant ainsi défini, passons à la définition de l'opération τ_2.

Il résulte de a) que les ensembles $P_2 = \Omega \cdot P(f_2)$ et $N_2 = \Omega \cdot N(f_2)$ admettent un nombre fini et égal, à savoir m composantes:

$$P_2 = P^{(1)} + P^{(2)} + \ldots + P^{(m)} \quad et \quad N_2 = N^{(1)} + N^{(2)} + \ldots + N^{(m)},$$

qui sont des arcs simples (ou des points) et qui se trouvent disposées sur Ω de façon que les composantes de P_2 y alternent avec celles de N_2.

Or, il peut arriver que plus d'une composantes de P_2, resp. de N_2, sont situées dans la-même région-composante Γ de $E - N(f_2)$, resp. de $E - P(f_2)$. C'est dans ce cas que nous allons soumettre la fonction f_2 à l'opération τ_2 à définir.

Admettons, par raison de symétrie, que c'est le cas

$$P^{(k)} \neq P^{(l)} \quad et \quad P^{(k)} + P^{(l)} \subset \Gamma \tag{8}$$

qui se présente. Considérons alors deux points

$$p \in P^{(k)} \quad et \quad q \in P^{(l)} \tag{9}$$

et un arc simple

$$C = C[p, q] \subset \Gamma \subset E - N(f_2)\,^{1)}. \tag{10}$$

L'ensemble $C - \Omega$ est somme, tout au plus, d'une infinité dénombrable d'arcs simples ouverts dont les extrémités appartiennent

[1]) qui existe en vertu d'un théorème de M. C. Kuratowski, Fund. Math. VII, p. 149.

à $\Omega - N(f_2)$. En vertu de (8) et (9) il existe parmi eux un arc $C_0 = C_0[a, b]$ dont les extrémités appartiennent aux composantes distinctes de $\Omega - N(f_2)$.

Posons: $\Omega = L_1 + L_2$, où $L_1 = L_1[a, b]$ et $L_2 = L_2[a, b]$. Selon **22** la rotation de f_2 n'est pas nulle au moins sur une des courbes $\Omega_1 = L_1 + C_0$ et $\Omega_2 = L_2 + C_0$. Soit p. ex. $I(f_2, \Omega_1) \neq 0$.

Remarquons que l'on a d'après (10): $\Omega_1 \cdot N(f_2) = L_1 \cdot N(f_2)$ et que cet ensemble ne contient tout au plus que $n-1$ composantes, puisque celle qui est située sur l'arc L_2 de Ω vient se placer en dehors de Ω_1. Ceci établi, nous achevons la transformation de f_2, en effectuant sur elle (relativement à Ω_1) l'opération τ_1. Le nombre des composantes des $\Omega_1 \cdot N(f_2)$ n'étant pas altéré par cette transformation, la fonction f_3 ainsi obtenue aura, conformément à *a*) et *b*), les propriétés suivantes:

a$_1$) *le nombre des arcs de* Ω_1 *contigus à* $P(f_3) + N(f_3)$ *est pair, il est* $\leqslant 2(m-1)$ *et les extrémités de chacun d'eux viennent se placer respectivement sur* $P(f_3)$ *et* $N(f_3)$.

b$_1$) $I(f_3, \Omega_1) \neq 0$.

C'est ce passage d'une fonction f_2 ayant sur Ω les propriétés a) et b) à la fonction f_3 ayant sur Ω_1 les propriétés a$_1$) et b$_1$) qui sera dit opération τ_2.

Il est évident en raison de a$_1$) que l'opération τ_2, repétée sur f_2 tout au plus $m-1$ fois de suite, conduit à une fonction f_0 qui, sur sa courbe correspondante Ω_0, aura les propriétés suivantes:

a$_0$) *le nombre des arcs de* Ω_0 *contigus à* $P(f_0) + N(f_0)$ *est fini, il est pair, soit* $2m_0$, *et les extrémités de chacun d'eux viennent se placer respectivement sur* $P(f_0)$ *et* $N(f_0)$.

b$_0$) $I(f_0, \Omega_0) \neq 0$.

c$_0$) *l'ensemble* $P(f_0)$, *resp.* $N(f_0)$, *coupe* E *entre tous deux composantes différentes de* $N_0 = N(f_0) \cdot \Omega_0$, *resp. de* $P_0 = P(f_0) \cdot \Omega$.

Ceci établi, reprenons la marche de la démonstration. Si les propriétés a$_0$), b$_0$) et c$_0$) se réalisent déjà pour la fonction f_2, posons $f_0 = f_2$ et $\Omega_0 = \Omega$; dans le cas contraire, on supposera la fonction f_0 construite à partir de f_2 par le procédé τ_2 appliqué le nombre nécessaire de fois.

Or, l'inégalité b_0) entraîne selon **23** l'inégalité $m_0 > 0$. Soient donc, dans les deux cas: T une composante arbitraire de P_0, puis Λ_1 et Λ_2 les arcs-composantes de $\Omega_0 - P_0 - N_0$ contigus à T et enfin Γ_1 la région-composante de $E - P(f_0) - N(f_0)$ contenant Λ_1. L'ensemble $f_0(\Gamma_1)$ est donc connexe et, d'après l'inclusion $\Gamma_1 \subset \subset E - P(f_0) - N(f_0)$, il ne contient pas les points $+1$ et -1.

Par conséquent:

$$K - \overline{f_0(\Gamma_1)} = K - f_0(\overline{\Gamma}_1) = K - f_0(\overline{\Gamma}_1) - f_0(P_0 + N_0) \neq 0,$$

d'où selon b_0) et **23**: $\Omega_0 - (\overline{\Gamma}_1 + P_0 + N_0) \neq 0$.

In existe donc un point $x \in \Omega_0 - (\overline{\Gamma}_1 + P_0 + N_0)$ et $F(\Gamma_1)$ coupe E entre x et tout point y de $\Lambda_1 \subset \Gamma_1$. En vertu de l'unicohérence de l'espace quasi-péanien E, il existe [1]) dans $F(\Gamma_1)$ un ensemble Σ fermé dans E, connexe et *qui coupe E entre x et y*.

Cependant $F(\Gamma_1) \subset P(f_0) + N(f_0)$ et $P(f_0) \cdot N(f_0) = 0$, de sorte que l'on a: *soit* $\Sigma \subset P(f_0)$, *soit* $\Sigma \subset N(f_0)$. Admettons que

$$\Sigma \subset P(f_0). \tag{11}$$

La connexité de Σ implique en vertu de c_0) que $\Sigma \cdot P_0$ est contenu dans une seule composante de P_0, qui, comme sous-continu de la courbe simple fermée Ω, ne coupe pas cette courbe. Il en est donc de-même pour $\Sigma \cdot \Omega$, car on a $\Sigma \cdot \Omega = \Sigma \cdot P_0$ selon c_0) et (11). A plus forte raison *Σ ne coupe pas E entre x et y.*

Cette contradiction prouve l'impossibilité de (1), c. q. f. d.

35. Le théorème précédent montre que *dans un espace quasi-péanien et unicohérent E la rotation de toute fonction continue f sur un arc simple quelconque L à extrémités a et b ne dépend que de E, f, a et b.*

Je la désigne donc par $I_a^b(f, E)$ et je pose pour le cas où $a = b$: $I_a^b(f, E) = 0$.

Il en résulte aussitôt en vertu de **27** que l'on a pour tout parcours Π de a à b situé dans l'espace E:

$$I(f, \Pi) = I_a^b(f, E).$$

[1]) C. Kuratowski, Fund. Math. VIII, p. 149.

36. L'exemple suivant montre que l'hypothèse, d'après laquelle l'espace E est quasi-péanien, est dans le th. **34** essentielle.

En effet, soit E le continu composé de circonférence K et d'ensemble des nombres de la forme $z = \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) e^{i\theta}$ où $\theta \geqslant 1$. L'ensemble E est unicohérent [1]) et K est un rétracte de E (par projection radiale), de sorte que, selon **21**, la thèse du th. **34** n'est pas vérifiée.

37. E et H étant deux espaces séparables, on peut supposer qu'ils sont métrisées de façon à avoir $\delta(E) + \delta(H) < +\infty$.

Envisageons l'espace métrique $\Phi_H(E)$ [2]), *dont les éléments sont des fonctions continues définies dans E et telles que $f(E) \subset H$; étant donnés deux éléments f_1 et f_2 de $\Phi_H(E)$, posons:*

$$\varrho(f_1, f_2) = \operatorname*{Sup}_{x \in E} \varrho[f_1(x), f_2(x)].$$

Il est remarquable que certaines propriétés de l'espace E, se laissent caractériser par celles de l'espace fonctionnel $\Phi_H(E)$, l'espace H étant, bien entendu, convenablement choisi.

Ainsi, pour les continus péaniens, le théorème **34** peut être formulé p. ex. de la manière suivante:

38. Théorème. *Pour qu'un continu péanien E soit unicohérent, il faut et il suffit que l'espace $\Phi_K(E)$ soit connexe.*

Démonstration. 1° La condition est nécessaire. Soit en effet, C le sous-ensemble de $\Phi_K(E)$ composé de fonctions $f(x) = $ *const.*, c'est-à-dire de fonctions qui transforment E en un seul point (d'ailleurs arbitraire) de K. Il est évident que C est homéomorphe à K (même isométrique avec K), donc connexe.

Considérons maintenant une fonction quelconque $f(x) \in \Phi_K(E)$ et un point arbitraire $a \in E$. D'après le th. **34** et la définition **35** le nombre $I_a^x(f, E)$ est bien déterminé pour tout $x \in E$ par suite de l'unicohérence de E et il est borné par suite de la compacticité de E. Formons la fonction:

$$f_t(x) = f(a) \cdot e^{i \cdot t \cdot I_a^x(f, E)}$$

pour $x \in E$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$.

[1]) Voir l'exemple donné par M. C. Kuratowski, Fund. Math. VIII, p. 148.
[2]) pour les propriétés générales de $\Phi_H(E)$ voir ma Note, ce volume, p. 164—169.

Il est facile de vérifier que $f_t(x)$ est une fonction continue de la variable x et que pour $t_1, t_2 \in [0,1]$ le nombre $\varrho[f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)]$ tend uniformément vers 0 avec $|t_1 - t_2|$. On a enfin:

$$f_0(x) = f(a) \quad et \quad f_1(x) = f(x).$$

Par conséquent, l'ensemble C_f composé de fonctions $f_t(x)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ constitue dans l'espace $\Phi_K(E)$ un continu péanien unissant l'élément f à l'ensemble C; il en résulte immédiatement la connexité de l'espace $\Phi_K(E)$. On peut même démontrer que $\Phi_K(E)$ est dans ce cas un espace quasi-péanien.

2° La condition est suffisante. Soient, en effet, Φ_1 l'ensemble de toutes les fonctions $f \in \Phi_K(E)$ qui remplissent la condition $I(f, \Omega) = 0$ pour toute courbe simple fermée $\Omega \subset E$ et $\Phi_2 = \Phi_K(E) - \Phi_1$. On a $\Phi_1 \neq 0$, car $C \subset \Phi_1$ selon **23**. Or, si l'on suppose que l'espace E n'est pas unicohérent, on a aussi $\Phi_2 \neq 0$, en vertu de **31**.

Etant données deux fonctions arbitraires $f_1 \in \Phi_1$ et $f_2 \in \Phi_2$ et une courbe simple fermée $\Omega \subset E$ telle que $I(f_2, \Omega) \neq 0$, il existe en vertu de **24**. un $x \in \Omega$ tel que $|f_1(x) - f_2(x)| \geqslant 1$. On a donc par définition **37**: $\varrho(f_1, f_2) \geqslant 1$, d'où $\varrho(\Phi_1, \Phi_2) \geqslant 1$, ce qui prouve que l'espace $\Phi_K(E)$ n'est pas connexe.

39. Il est à noter que la condition du théorème **38** n'éxige, pour être énoncée, aucune hypothèse sur la structure de l'espace E (supposé métrique séparable). Cette condition et les conditions analogues conduisent, par conséquent, à une classification des espaces métriques séparables basée uniquement sur l'examen topologique des espaces fonctionnels correspondants et semblent fournir ainsi un moyen topologique de saisir quelques invariants dont il n'à été jusqu'à présent question que, tout au plus, dans des recherches combinatoires.

Dans cet ordre d'idées les problèmes suivants me semblent les plus importants:

Soit K_n la surface de la sphère $(n+1)$-dimensionelle (donc $K_1 = K$).

Problème 1. *Quel est pour l'espace E le sens combinatoire de la connexité de l'espace $\Phi_{K_n}(E)$, resp. de l'espace $\Phi_E(E)$?*

Problème 2. *Existe-t-il un espace compact E pour lequel:*

1° *l'espace $\Phi_E(E)$ est connexe* (resp. *tous les espaces $\Phi_{K_n}(E)$ sont connexes*),

2° *il existe une fonction $f \in \Phi_E(E)$ telle que l'on ait $f(x) \neq x$ pour tout $x \in E$ (absence de point invariant)?*

III. Applications.

40. Théorème [1]). *Tout espace composé de deux espaces quasi-péaniens unicohérents fermés dans lui et dont le produit (non-vide) est connexe, est lui-même quasi-péanien unicohérent.*

Démonstration. Soient A et B les espaces-sommandes, $E = A + B$ et f une fonction continue transformant E dans un sous-ensemble de la circonférence K. En vertu du théorème **34**, il suffit de montrer que la rotation de f sur tout arc situé dans E ne dépend que de ses extrémités.

Soient $x \in E$ et $U'(x)$ un entourage de x tel que l'on ait

$$(1) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| < \tfrac{1}{3} \text{ pour tous deux points } x_1, x_2 \in U'(x).$$

L'ensemble $U'(x) \cdot A$, resp. $U'(x) \cdot B$, est ouvert dans A, resp. dans B. Soit $U_A(x)$, resp. $U_B(x)$, sa composante qui contient le point x. L'ensemble

$$(2) \qquad U(x) = U_A(x) + U_B(x)$$

constitue alors un entourage connexe de x dans E.

Je vais m'appuyer sur le lemme suivant:

41. Lemme. *Si $L = L[p, q] \subset E$, il existe dans E un parcours $\Pi = (L_1 L_2 \ldots L_n)$ de p à q tel que:*

1° $L_i \subset A$ *ou bien* $L_i \subset B$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$,

2° $I_p^q(f, L) = I(f, \Pi)$.

Pour démontrer ce lemme, soient

$$(3) \qquad U = \sum_{x \in A \cdot B} U(x),$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \lambda = \varrho[L \cdot A \cdot B,\ L \cdot (E - U)], & si\ L \cdot A \cdot B \neq 0\ et\ L \cdot (E - U) \neq 0 \\ \lambda = 1 & ,\ si\ L \cdot A \cdot B = 0\ ou\ L \cdot (E - U) = 0. \end{cases}$$

[1]) Le problème d'une démonstration non-combinatoire de ce théorème m'à été communiqué comme provenant de M. L. Vietoris.

Soit μ un nombre positif tel que:

(5) $$\mu < \lambda,$$

(6) $$\varrho(x,y) < \mu \quad \textit{entraîne} \quad |f(x) - f(y)| < \tfrac{1}{3} \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in L.$$

L étant un arc simple, il existe un $\nu > 0$ tel que:

(7) $$\varrho(x,y) < \nu \quad \textit{entraîne} \quad \delta(L[x,y]) < \mu \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in L.$$

Etant donnée une chaîne quelconque d'ordre ν, les extrémités des arcs-composantes de $L-A$ et de $L-B$ qui contiennent les points de cette chaîne forment avec elle une nouvelle-chaîne $C_{\nu,L}(p,q) = (c_1 c_2 \dots c_{n+1})$ d'ordre $\leqslant \nu$, et qui, supposée ordonnée de façon à avoir

$$L[p, c_i] \subset L[p, c_{i+1}] \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

possède la propriété suivante:

Quel que soit $i = 1, 2, \dots, n$, *on a*

(8) $$\textit{soit } c_i, c_{i+1} \in A \cdot B,$$

(9) $$\textit{soit } L[c_i, c_{i+1}] \subset A$$

(10) $$\textit{soit } L[c_i, c_{i+1}] \subset B.$$

En raison de **10** il suffit, pour achever la démonstration, de montrer que chacun des arcs $\Lambda = L[c_i, c_{i+1}]$ qui remplissent la relation (8) sans en remplir ni (9), ni (10), peut être remplacé par une somme finie d'arcs $\sum_{j=1}^{p} (L'_j + L''_j)$ formant dans E un parcours Π_i de c_i à c_{i+1} et satisfaisant à la condition 1° et à l'égalité

(11) $$I(f, \Pi_i) = I_{c_i}^{c_{i+1}}(f, \Lambda),$$

qui entraîne la condition 2°.

Or, on a d'après (7), (6), (8), (4) et (5):

$$\Lambda = L[c_i, c_{i+1}] \subset U$$

et, parsuite de sa compacticité, Λ est contenu déjà dans une somme finie S de sommandes de (3). Il existe donc dans $A \cdot B$ une suite finie de points $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ telle que

$$c_i = x_1, \; c_{i+1} = x_{p+1}, \; \Lambda \subset U(x_1) + U(x_2) + \dots + U(x_{p+1}),$$

$$U(x_j) \cdot U(x_{j+1}) \neq 0 \quad \textit{pour tout} \quad j = 1, 2, \dots, p$$

et

(12) $$\Lambda \cdot U(x_j) \neq 0 \quad \textit{pour tout} \quad j = 1, 2, \dots, p+1.$$

Soit $a_j \in U(x_j) \cdot U(x_{j+1})$ où $j = 1, 2, \dots, p$. En raison de la connexité de $U_A(x_j)$, resp. de $U_B(x_j)$, il existe des arcs simples:

(13) $$L'_j = L'_j[x_j, a_j] \begin{Bmatrix} \subset U_A(x_j), & \textit{si} & a_j \in U_A(x_j), \\ \subset U_B(x_j), & \textit{si} & a_j \textit{ non} \in U_A(x_j), \end{Bmatrix}$$

et

(14) $$L''_j = L''_j[a_j, x_{j+1}] \begin{Bmatrix} \subset U_A(x_{j+1}), & \textit{si} & a_j \in U_A(x_{j+1}), \\ \subset U_B(x_{j+1}), & \textit{si} & a_j \textit{ non} \in U_A(x_{j+1}), \end{Bmatrix},$$

de sorte que L'_j et L''_j satisfont à la condition 1°.

Ceci établi, considérons deux points quelconques $x, y \in S$. Soient donc: $x \in U(x_r)$ et $y \in U(x_s)$, où $1 \leqslant r \leqslant p+1$ et $1 \leqslant s \leqslant p+1$, et, conformément à (12): $x' \in U(x_r) \cdot \Lambda$ et $y' \in U(x_s) \cdot \Lambda$.

Les inégalités (7), (6) et (1) donnent alors:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x')| + |f(x') - f(y')| + |f(y') - f(y)| < \\ < \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = 1,$$

d'où

$$K \neq f(S) \subset K.$$

Il en résulte, en vertu de **23**, (13), (14) et **27**, lorsqu'on pose $\Pi_i = (L'_1, L''_1, L'_2, L''_2, \dots, L'_p, L''_p)$, que

$$I(f, \Pi_i) = \sum_{j=1}^{p} [I_{x_j}^{a_j}(f, L'_j) + I_{a_j}^{x_{j+1}}(f, L''_j)] = I_{c_i}^{c_{i+1}}(f, \Lambda),$$

c'est-à-dire précisément l'égalité (11), q. f. d.

42. Pour reprendre la démonstration du th. **40**, supposons par l'impossible que l'ensemble E ne soit pas unicohérent. Il existe alors d'après le théorème **34** une fonction continue $f(x)$ transformant E dans un sous-ensemble de K et deux arcs $L = L[p, q] \subset E$ et $\Lambda = \Lambda[p, q] \subset E$ tels que

(15) $$I_p^q(f, L) \neq I_p^q(f, \Lambda).$$

En vertu du lem. **41** qui vient d'être démontré il en résulte existence dans E de deux parcours Π_1 et Π_2 allant de p à q et emplissant les conditions 1° et 2° de ce lemme. Ces deux parcours unis forment un parcours fermé

$$\Pi = (L_1, L_2, \dots, L_n)$$

et on a selon (16):

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} L_i = L_i[a_i, a_{i+1}] & \textit{où} \quad a_1 = a_{n+1} = p, \\ L_i \subset A & \textit{ou bien} \quad L_i \subset B, \end{cases}$$

$$\text{(18)} \qquad I(f, \Pi) \neq 0.$$

Or, l'existence dans B d'un pareil parcours fermé à rotation $\neq 0$ étant impossible en raison de **35** et de l'unicohérence de B, je vais démontrer, pour parvenir à une contradiction, que son existence dans $A+B$ implique celle dans B.

En effet, k désignant le nombre des L_i situés dans $\overline{A-B}$, on a $k \neq 0 \neq n-k$ en vertu de **35**. Parsuite de l'ordre cyclique des indices on peut admettre que

$$\text{(19)} \qquad L_1 + L_2 + \dots + L_i \subset A,$$

que L_{i+1} *non* $\subset A$ et que L_{n+1} *non* $\subset A$ $(i \geqslant 1)$.

Par conséquent, $L_{i+1} \subset B$ et $L_n \subset B$, d'où $a_1 \in A \cdot B$ et $a_{i+1} \in A \cdot B$ (car A et B sont par hypothèse fermés dans E).

L'ensemble $A \cdot B$ étant connexe, toute somme d'ensembles ouverts V_x tels que $A \cdot B \subset \Sigma V_x$ contient une suite finie $V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_{m+1}}$ telle que[1])

$$V_{x_j} \cdot V_{x_{j+1}} \neq 0 \quad \textit{pour tout} \quad j = 1, 2, \dots m,$$

et

$$\text{(20)} \qquad a_1 \in V_{x_1}, \quad a_{i+1} \in V_{x_{m+1}}.$$

On peut poser évidemment $V_x = U_A(x) \cdot U_B(x)$ [2]).
Soit

$$y_j \in V_{x_j} \cdot V_{x_{j+1}} = U_A(x_j) \cdot U_B(x_j) \cdot U_A(x_{j+1}) \cdot U_B(x_{j+1}).$$

Il existe alors [3]) des arcs simples:

$$\text{(21)} \qquad \begin{cases} L_j' = L_j'[x_j, y_j] \subset U_A(x_j), & \Lambda_j' = \Lambda_j'[x_j, y_j] \subset U_B(x_j) \\ L_j'' = L_j''[y_j, x_{j+1}] \subset U_A(x_{j+1}), & \Lambda_j'' = \Lambda_j''[y_j, x_{j+1}] \subset U_B(x_{j+1}). \end{cases}$$

[1]) N. Aronszajn, Fund. Math. XV, p. 229, Hilfssatz I.
[2]) Voir **40**, p. 197.
[3]) Voir note [1]), p. 186.

Les arcs L_j' et L_j'' formant donc avec $\sum_{j=1}^{i} L_j$ un parcours fermé situé selon (17), (19), (20) et (21) dans A, on a en vertu de **35** et de l'unicohérence de A:

$$\text{(22)} \qquad \sum_{j=1}^{m} [I_{x_j}^{y_j}(f, L_j') + I_{y_j}^{x_{j+1}}(f, L_j'')] = \sum_{j=1}^{i} I_{a_j}^{a_{j+1}}(f, L_j).$$

Or, l'inclusion $f(\Lambda_j' + L_j') \subset f[U(x_j)] \subsetneqq K$ entraîne selon **28** l'égalité

$$I_{x_j}^{y_j}(f, L_j') + I_{y_j}^{x_j}(f, \Lambda_j') = 0$$

et on a, d'une façon analogue,

$$I_{y_j}^{x_{j+1}}(f, L_j'') + I_{x_{j+1}}^{y_j}(f, \Lambda_j'') = 0.$$

Les deux dernières égalités donnent:

$$\sum_{j=1}^{m} [I_{x_j}^{y_j}(f, L_j') + I_{y_j}^{x_{j+1}}(f, L_j'')] = \sum_{j=1}^{m} [I_{x_j}^{y_j}(f, \Lambda_j') + I_{y_j}^{x_{j+1}}(f, \Lambda_j'')],$$

d'où selon (22) et (18):

$$\sum_{j=1}^{m} [I_{x_j}^{y_j}(f, \Lambda_j') + I_{y_j}^{x_{j+1}}(f, \Lambda_j'')] + \sum_{k=i+1}^{n} I_{a_k}^{a_{k+1}}(f, L_k) \neq 0,$$

bien que le parcours obtenu $\Pi' = \Lambda_1', \Lambda_1'', \Lambda_2', \Lambda_2'', \dots, \Lambda_m', \Lambda_m'', L_{i+1}, \dots, L_n)$ ne contienne déjà — comme le montre sa composition — que $k-i<k$ arcs situé dans A et non situés dans B. Par l'itération de ce procédé on aboutit donc à un parcours fermé à rotation $\neq 0$ où tous les arcs sont situés dans B, c. q. f. d.

43. L'exemple suivant montre que le théorème **40** cesse d'être vrai, même pour les continus, lorsqu'on y supprime l'hypothèse de la connexité locale de E.

Soit E le continu composé de circonférence K, de circonférence K' concentrique avec K, mais de rayon 2 et enfin de deux spirales suivantes:

$$z = \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) e^{i\theta} \quad \textit{où} \quad \theta \geqslant 1 \quad \textit{et} \quad z = \left(1 + \frac{1}{1+\theta}\right) e^{i\theta} \quad \textit{où} \quad \theta \geqslant 0.$$

Ces spirales coupent l'anneau de frontière $K + K'$ en deux domaines G et Γ. Les ensembles $A = \overline{G}$ et $B = \overline{\Gamma}$ sont des continus unicohérents et leur produit $A \cdot B$ est un continu (d'ailleurs aussi unicohérent). Néanmoins le continu $A + B$ ne l'est pas.

44. Soient A et B deux espaces métriques séparables et $A\times B$ leur *produit topologique*, c. à d. l'espace de tous les couples (x, y) où $x \epsilon A$ et $y \epsilon B$ et où l'on pose $(x, y) = \lim\limits_{n=\infty} (x_n, y_n)$, lorsqu'on a simultanément $x = \lim\limits_{n=\infty} x_n$ et $y = \lim\limits_{n=\infty} y_n$.

Admettons que la métrique dans $A\times B$ soit définie par la formule:

$$(1) \qquad \varrho[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \sqrt{[\varrho(x_1, x_2)]^2 + [\varrho(y_1, y_2)]^2}.$$

Posons, pour abréger les notations:

$$(2) \qquad \begin{cases} A_y = A\times(y) & \textit{pour} \quad y \epsilon B, \\ B_x = (x)\times B & \textit{pour} \quad x \epsilon A. \end{cases}$$

J'appelle *projection du point* (x, y) *de* $A\times B$ *sur* B_{x_0}, resp. *sur* A_{y_0}, le point (x_0, y), resp. le point (x, y_0), et d'une façon générale *projection d'un ensemble* $E \subset A\times B$ *sur* B_{x_0}, resp. *sur* A_{y_0}, l'ensemble composé de projections de tous les points (x, y) de E.

Soit enfin $f(x)$ une fonction continue transformant $A\times B$ dans un sous-ensemble de K.

45. Lemme. *Si* A *et* B *sont deux espaces quasi-péaniens et* $L = L[p, q] \subset A\times B$, *alors il existe dans* $A\times B$ *un parcours de* p *à* q

$$\Pi = (L_1, L_2, \ldots, L_{2n}) \quad \textit{où} \quad L_i = L_i[p_i, p_{i+1}]$$

tel que:

1° $p_{2i-1} = (x_i, y_i)$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n+1$ *et* $p_{2i} = (x_i, y_{i+1})$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$,

2° $L_{2i-1} \subset B_{x_i}$ *et* $L_{2i} \subset A_{y_{i+1}}$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$,

3° $I_p^q(f, L) = I(f, \Pi)$.

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de la compacticité de L, il existe un $\lambda > 0$ assez petit pour que $\varrho(x, y) < \lambda$ entraîne pour $x, y \epsilon L$:

$$(3) \qquad \delta[f(L[x, y])] < \tfrac{1}{2}.$$

Pour tout point $z = (x, y) \epsilon A\times B$ considérons un nombre positif $\lambda_z < \lambda$ tel que

$$(4) \qquad |f(z) - f(z')| < \tfrac{1}{2} \quad \textit{pour tout} \quad z' \epsilon U_{\lambda_z, A\times B}(z).$$

Désignons par $U_1(z)$, resp. par $U_2(z)$, la composante de $U_{\frac{1}{2}\lambda_z, A}(x)$, resp. de $U_{\frac{1}{2}\lambda_z, B}(y)$, telle que $x \epsilon U_1(z)$, resp. que $y \epsilon U_2(z)$.

L'ensemble $U_1(z)$, resp. $U_2(z)$, étant ouvert dans A, resp. dans B, leur produit topologique, que je désignerai par $U(z)$, est un entourage du point z ouvert dans $A\times B$.

Donc, si $z' = (x', y') \epsilon U(z)$, on a d'après la définition de $U(z)$: $\varrho(x, x') < \frac{\lambda_z}{2}$ et $\varrho(y, y') < \frac{\lambda_z}{2}$, d'où $\varrho(z, z') = \varrho[(x, x'), (y, y')] < \frac{\lambda_z}{\sqrt{2}} < \lambda_z$ et par conséquent selon (4)

$$(5) \qquad |f(z) - f(z')| < \tfrac{1}{2} \quad \textit{pour tout} \quad z' \epsilon U(z).$$

Remarquons que l'entourage $U(z)$ ainsi défini pour tout $z \epsilon U_1$ jouit en outre de la propriété (P) suivante:

Etant donnés deux points (x_1, y_1) *et* (x_2, y_2) *de* $U(z)$, *il existe deux arcs* L_1 *et* L_2 *tels que:*

$$L_1 = L_1[(x_1, y_1), (x_1, y_2)] \subset U(z) \cdot B_{x_1},$$
$$L_2 = L_2[(x_1, y_2), (x_2, y_2)] \subset U(z) \cdot A_{y_2},$$

En effet, parsuite de la connexité de $U_1(z)$, il existe [1]) un arc $L'_1 = L'_1[y_1, y_2] \subset U_2(z) \subset B$ et on n'a qu'à prendre comme L_1 sa projection sur B_{x_1}. La construction de L_2 est analogue.

La propriété (P) étant ainsi établie, reprenons la démonstration du lemme.

Les ensembles $U(z)\cdot L$ où $z \epsilon L$ sont ouverts dans $L \subset \sum\limits_{z\epsilon L} U(z)$. Il existe [2]) donc une suite finie $z_1, z_2, \ldots, z_n \epsilon L$ telle que:

$$p \epsilon U(z_1), \quad q \epsilon U(z_n) \quad \textit{et} \quad L \cdot U(z_i) \cdot U(z_{i+1}) \neq 0 \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Soient $p_1 = p$, $p_{2n+1} = q$ et p_{2i-1} un point arbitraire de $L \cdot U(z_{i-1}) \cdot U(z_i)$ pour $i = 2, 3, \ldots, n$.

Posons $p_{2i-1} = (x_i, y_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n+1$ et $p_{2i} = (x_i, y_{i+1})$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On a donc:

$$p_{2i-1}, \; p_{2i+1} \epsilon U(z_i) \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

d'où, en vertu de la propriété (P), il existe pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ des arcs

$$(6) \qquad \begin{cases} L_{2i-1} = L_{2i-1}[(x_i, y_i), (x_i, y_{i+1})] = L_{2i-1}[p_{2i-1}, p_{2i}] \subset U(z_i)\cdot B_{x_i}, \\ L_{2i} \;\;\, = L_{2i} \;\;\, [(x_i, y_{i+1}), (x_{i+1}, y_{i+1})] = L_{2i} \;\;\, [p_{2i}, p_{2i+1}] \subset U(z_i)\cdot A_{y_{i+1}}. \end{cases}$$

[1]) Voir note [1]), p. 186.

[2]) d'après le théorème précité de M. A r o n s z a j n.

On a selon (3), (5) et (6):

$$\delta[f(L[p_{2i-1}, p_{2i+1}])] < \tfrac{1}{2} \quad et \quad \delta[f(L_{2i-1} + L_{2i})] < \tfrac{1}{2},$$

d'où

$$K \neq f(L[p_{2i-1}, p_{2i+1}] + L_{2i-1} + L_{2i}) \subset K.$$

Il en résulte en vertu de **28** que l'on a pour tout $i = 1, 2, \dots, n$:

$$I_{p_{2i-1}}^{p_{2i+1}}(f, L[p_{2i-1}, p_{2i+1}]) = I_{p_{2i-1}}^{p_{2i}}(f, L_{2i-1}) + I_{p_{2i}}^{p_{2i+1}}(f, L_{2i}),$$

ce qui donne par sommation l'égalité 3° à démontrer.

46. Lemme. *Etant donnés deux espaces quasi-péaniens unicohérents A et B et quatre points*

$$p_1 = (a_1, b_1), \quad p_2 = (a_2, b_1), \quad p_3 = (a_2, b_2) \quad et \quad p_4 = (a_1, b_2)$$

de $A \times B$, unis successivement par quatre arcs simples:

$$\begin{array}{ll} L_1 = L_1[p_1, p_2] \subset A_{b_1}, & L_2 = L_2[p_2, p_3] \subset B_{a_2}, \\ L_3 = L_3[p_3, p_4] \subset A_{b_2}, & L_4 = L_4[p_4, p_1] \subset B_{a_1}, \end{array}$$

on a:

$$I = I_{p_1}^{p_2}(f, L_1) + I_{p_2}^{p_3}(f, L_2) + I_{p_3}^{p_4}(f, L_3) + I_{p_4}^{p_1}(f, L_4) = 0.$$

Démonstration. Parsuite de l'unicohérence de A_{b_2} et en vertu du théorème **34** on peut remplacer, sans altérer I, L_3 par la projection de L_1 sur A_{b_2}, cette dernière étant un arc coëxtrémal avec L_3. Admettons donc que L_3 est lui-même la projection de L_1 sur A_{b_2}. Mettons le point $p_{1,t} = (a_{1,t}, b_1)$ en mouvement sur l'arc L_1 de p_1 à p_2, faisant varier t de 0 à 1 et désignons par $L_{4,t} = L_{4,t}[p_{1,t}\, p_{4,t}]$ la projection de L_4 sur $B_{a_{1,t}}$.

Envisageons le nombre:

$$I_t = I_{p_{1,t}}^{p_2}(f, L_1[p_{1,t}\, p_2]) + I_{p_2}^{p_3}(f, L_2) + I_{p_3}^{p_{4,t}}(f, L_3[p_3, p_{4,t}]) + I_{p_{4,t}}^{p_{1,t}}(f, L_{4,t}).$$

En vertu de **16**, I_t est une fonction continue du paramètre t et l'on a $I_0 = I$ et, en vertu de **11**, $I_t \equiv 0 \pmod{2\pi}$, d'où

$$(7) \qquad I = I_1.$$

Or, l'unicohérence de B_{a_2} et l'inclusion $L_2 + L_{4,1} \subset B_{a_2}$ donnent $I_1 = I_{p_2}^{p_3}(f, L_2) + I_{p_3}^{p_2}(f, L_{4,1}) = 0$, d'où, selon (7), $I = 0$, c. q. f. d.

47. Théorème. *A et B étant deux espaces quasi-péaniens unicohérents, leur produit topologique $A \times B$ est aussi un espace quasi-péanien unicohérent.*

Démonstration. En vertu du théorème **34**, il suffit[1] de prouver que la rotation de toute fonction continue qui transforme $A \times B$ dans un sous-ensemble de K reste constante sur tous les arcs coëxtrémaux situés dans $A \times B$.

Soit un arc arbitraire $L = L[p, q] \subset A \times B$, où $p = (a_1, b_1)$ et $q = (a_2, b_2)$, et posons $r = (a_2, b_1)$. Considérons les arcs: $L_A = L_A[p, r] \subset A_{b_1}$ et $L_B = L_B[r, q] \subset B_{a_2}$. Le point r ne dépendant que de p et q et les rotations $I_p^r(f, L_A)$ et $I_r^q(f, L_B)$ ne dépendant (voir **34**) que de p et r (resp. de r et q) parsuite de l'unicohérence de A et B, il suffit de montrer que:

$$(8) \qquad I_p^q(f, L) = I_p^r(f, L_A) + I_r^q(f, L_B).$$

En vertu du lemme **45**, il existe en effet dans $A \times B$ un parcours de p à q

$$\Pi = (L_1, L_2, \dots, L_{2n}) \quad où \quad L_i = L_i[p_i, p_{i+1}] \quad et \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3° de ce lemme, de sorte que la démonstration de (8) se réduit à celle de la formule:

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{2n} I_{p_i}^{p_{i+1}}(f, L_i) = I_p^r(f, L_A) + I_r^q(f, L_B).$$

Soient à ce but:

$$r_i = (x_i, y_1) \quad où \quad i = 1, 2, \dots n+1,$$

$$(10) \qquad \left.\begin{array}{l} \Lambda_i = \Lambda_i[r_i, p_{2i-1}] \subset B_{x_i} \\ \Lambda_i' = \Lambda_i'[r_i, r_{i-1}] \subset A_{y_1} \end{array}\right\} \; pour \; i = 2, 3, \dots, n+1,$$

et

$$(11) \qquad \Lambda_i'' = \Lambda_i''[r_i\, p_{2i}] \subset B_{x_i} \; pour \; i = 1, 2, \dots, n.$$

On a en vertu du lemme **46** pour $i = 2, 3, \dots n+1$ les égalités:

$$I_{r_{i-1}}^{p_{2(i-1)}}(f, \Lambda_{i-1}'') + I_{p_{2(i-1)}}^{p_{2i-1}}(f, L_{2(i-1)}) + I_{p_{2i-1}}^{r_i}(f, \Lambda_i) + I_{r_i}^{r_{i-1}}(f, \Lambda_i') = 0,$$

[1]) Que $A \times B$ est un espace *quasi-péanien*, cela résulte du théorème, d'après lequel les espaces quasi-péaniens sont topologiquement caracterisés comme localement connexes et métrisables d'une manière complète (voir F. Hausdorff, Fund. Math. VI, p. 146). Or, il est facile de constater que ces deux propriétés passent de A et B sur $A \times B$.

d'où par addition:

$$(12)\quad \sum_{i=2}^{n+1} I_{r_{i-1}}^{p_{2(i-1)}}(f, \Lambda_{i-1}'') + \sum_{i=2}^{n+1} I_{p_{2(i-1)}}^{p_{2i-1}}(f, L_{2(i-1)}) + \sum_{i=2}^{n+1} I_{p_{2i-1}}^{r_i}(f, \Lambda_i) + \sum_{i=2}^{n+1} I_{r_i}^{r_{i-1}}(f, \Lambda_i') = 0.$$

Comme $r_{n+1} = (x_{n+1}, y_1) = (a_2, b_1) = r$, on en obtient par unicohérence de A_{y_1}, selon **35**:

$$(13)\quad \sum_{i=2}^{n+1} I_{r_{i-1}}^{r_i}(f, \Lambda_i') = I_p^r(f, L_A).$$

D'autre part, l'unicohérence de l'ensemble B_{x_i} donne en vertu de **35**:

$$(14)\quad I_{r_i}^{p_{2i}}(f, \Lambda_i'') = I_{r_i}^{p_{2i-1}}(f, \Lambda_i) + I_{p_{2i-1}}^{p_{2i}}(f, L_{2i-1})$$

et, comme $p_1 = r_1$:

$$(15)\quad I_{r_1}^{p_2}(f, \Lambda_1'') = I_{p_1}^{p_2}(f, L_1).$$

Les égalités (12)—(15) entraînent:

$$I_{p_1}^{p_2}(f, L_1) + \sum_{i=2}^{n} I_{r_i}^{p_{2i-1}}(f, \Lambda_i) + \sum_{i=2}^{n} I_{p_{2i-1}}^{p_{2i}}(f, L_{2i-1}) + \sum_{i=2}^{n+1} I_{p_{2(i-1)}}^{p_{2i-1}}(f, L_{2(i-1)}) + \sum_{i=2}^{n+1} I_{p_{2i-1}}^{r_i}(f, \Lambda_i) + I_r^p(f, L_A) = 0,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} I_{p_{2i-1}}^{p_{2i}}(f, L_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n} I_{p_{2i}}^{p_{2i+1}}(f, L_{2i}) + I_{p_{2n+1}}^{r_{n+1}}(f, \Lambda_{n+1}) + I_r^p(f, L_A) = 0.$$

Les égalités $r_{n+1} = r$ et $p_{2n+1} = q$, l'unicohérence de $B_{a_2} = B_{x_{n+1}}$ et l'inclusion $\Lambda_{n+1} \subset B_{x_{n+1}}$ de (10) entraînent l'égalité:

$$I_{p_{2n+1}}^{r_{n+1}}(f, \Lambda_{n+1}) + I_r^q(f, L_B) = 0.$$

Les deux dernières égalités donnent:

$$\sum_{i=1}^{2n} I_{p_i}^{p_{i+1}}(f, L_i) + I_q^r(f, L_B) + I_r^p(f, L_A) = 0,$$

c'est-à-dire l'égalité (9), c. q. f. d.

48. Corollaire [1]. *Le produit topologique de deux continus péaniens unicohérents est unicohérent.*

49. Théorème. *Pour tout continu C qui n'est pas unicohérent et qui est situé dans un espace métrique séparable E, il existe dans E une région U contenant C, mais ne contenant aucun sur-continu péanien de C qui soit unicohérent.*

Démonstration: Le continu C n'étant pas unicohérent, il existe une décomposition $C = A + B$, $A \cdot B = P + Q$, où A et B sont des continus et P et Q sont des ensembles compacts non-vides.

Soient $\varrho(P, Q) = \varrho > 0$ et $0 < \alpha < \frac{1}{2}\varrho$. Envisageons l'ensemble $U_{\alpha,E}(P+Q)$. On a en vertu de la connexité de A et B:

$$(1)\quad M = A - U_{\alpha,E}(P+Q) \neq 0$$

et

$$(2)\quad N = B - U_{\alpha,E}(P+Q) \neq 0.$$

Les ensembles M et N sont donc compacts et disjoints. Il en résulte que $\varrho(M, N) = \varrho_1 > 0$.

Soit $U = U_{\beta,E}(M+N) + U_{\beta,E}(P+Q)$ où $0 < \beta < \mathrm{Min}(\frac{1}{2}\varrho_1, \alpha)$. L'ensemble U ainsi défini constitue une région entourant C. Or, on a:

$$(3)\quad U = U_{\beta,E}(M) + U_{\beta,E}(N) + U_{\alpha,E}(P) + U_{\alpha,E}(Q),$$

$$(4)\quad \overline{U_{\beta,E}(M)} \cdot \overline{U_{\beta,E}(N)} = 0,$$

$$(5)\quad \overline{U_{\alpha,E}(P)} \cdot \overline{U_{\alpha,E}(Q)} = 0.$$

Soient: C' un continu péanien tel que $C \subset C' \subset U$, $x \in P$, $y \in Q$ et

$$(6)\quad R_1 = C' \cdot [U_{\alpha,E}(P) + U_{\alpha,E}(Q) + U_{\beta,E}(M)]$$

$$(7)\quad R_2 = C' \cdot [U_{\alpha,E}(P) + U_{\alpha,E}(Q) + U_{\beta,E}(N)].$$

Les formules (1) et (2) impliquent que $A \subset R_1$ et $B \subset R_2$. Donc x et y appartiennent à une seule composante de R_1, resp. de R_2, ouverte dans C'. Ils existe par conséquent deux arcs simples L_1 et L_2 tels que

$$(8)\quad L_1 = L_1[x, y] \subset R_1 \quad \text{et} \quad L_2 = L_2[x, y] \subset R_2.$$

[1] Ce corollaire constitue la solution positive du problème posé par M. C. Kuratowski, Fund. Math. XV, p. 357.

f désignant une fonction continue définie dans $U_{\alpha,E}(P+Q)$ par les formules:

$$f(x)=1 \quad pour \quad x \in \overline{U_{\alpha,E}(P)} \quad et \quad f(x)=-1 \quad pour \quad x \in \overline{U_{\alpha,E}(Q)},$$

il existe [1]) des fonctions:

$\varphi(x)$ *qui est une extension de* $f(x)$ *sur* $\overline{R_1}$ *relative à l'arc* $K_1 = \underset{z}{E}[z=e^{i\theta};\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi]$ *de la circonférence* K,

$\psi(x)$ *qui est une extension de* $f(x)$ *sur* $\overline{R_2}$ *relative à l'arc* $K_2 = \overline{K-K_1}$.

Les ensembles $\overline{R_1}$ et $\overline{R_2}$ étans fermés dans E et les fonctions φ et ψ étant continues et prenant les mêmes valeurs sur l'ensemble $\overline{R_1}\cdot\overline{R_2} = \overline{U_{\alpha,E}(P)} + \overline{U_{\alpha,E}(Q)}$ selon (4), la fonction $f_0(x)$ définie par les formules

$$f_0(x)=\varphi(x) \quad pour \quad x \in \overline{R_1} \quad et \quad f_0(x)=\psi(x) \quad pour \quad x \in \overline{R_2}$$

est continue.

On obtient donc en vertu de **29**:

$$I_x^y(f, L_1)=\pi \quad et \quad I_x^y(f, L_2)=-\pi,$$

d'où il résulte d'après le théorème **34** que le continu C' n'est pas unicohérent, c. q. f. d.

50. Corollaire. *Le produit d'une suite décroissante de continus péaniens unicohérents est un continu unicohérent.*

51. Le terme „péaniens" dans l'hypothèse du corollaire est essentiel.

En effet, les continus $C_n = \underset{z}{E}\left[z=\left(1+\frac{1}{\theta}\right)e^{i\theta};\ \theta \geqslant n\right]$ forment une suite décroissante de continus unicohérents ayant pour l'ensemble-limite la circonférence K.

L'exemple suivant montre que l'on ne peut non plus remplacer dans ce corollaire le terme „continus péaniens" par celui d'„espaces quasi-péaniens".

Soient dans l'espace euclidien à 3 dimensions: W l'ensemble des points

$$x^2+y^2 \leqslant 1, \quad 0<z\leqslant 1,$$

et V_n celui des points

$$x^2+y^2<1, \quad \frac{1}{n}<z\leqslant 1 \quad où \quad n=1,2,\ldots$$

[1]) Voir ma Note *Sur les rétractes*, ce volume, p. 160, **17**, Exemple, et p. 161, **19**.

Soit $C_n = W - V_n$. On déduit facilement des théorèmes **40** et **47** que les ensembles C_n sont des espaces quasi-péaniens unicohérents, tandis que l'ensemble $C = \prod_{n=1}^{\infty} C_n$, qui se compose de points

$$x^2+y^2=1, \quad 0<z\leqslant 1$$

n'est pas unicohérent.

52. Le corollaire **50** permet de *distinguer parmi les continus unicohérents une classe* $\mathfrak{K}$ *des ceux qui sont des limites des suites décroissantes de continus péaniens unicohérents.*

Le problème suivant me semble mériter intérêt:

Problème 3. *La classe* $\mathfrak{K}$ [1]) *coïncide-t-elle avec celle des continus* C *pour lesquels les espaces* $\Phi_K(C)$ *sont connexes?*

[1]) Dans le cas des continus plans la classe $\mathfrak{K}$ coïncide avec celle des continus qui ne coupent pas le plan.

Varsovie, Juillet 1930.