Sur certaines classes de fonctions continues.

Par

S. Saks (Varsovie).

§ 1. Dans ses recherches sur la structure de certaines fonctions continues M. Banach a introduit deux conditions qu'il a appelées (T_1) et (T_2) [1]. La fonction satisfait dans un intervalle notamment à la condition (T_1), resp. (T_2), lorsque l'ensemble des valeurs qu'elle prend une infinité, resp. une infinité non-dénombrable, de fois, est de mesure nulle. En particulier, MM. Banach et Vitali [2]) ont demontré que la condition (T_1) est vérifiée par toute fonction à variation bornée ce qui résulte d'ailleurs aussi de certains travaux antérieurs de Janzen [3]) sur la théorie de la mesure.

En complétant dans cette note les résultats de M. Banach je vais donner une simple condition différentielle qui équivaut à la propriété (T_1). En s'appuyant sur cette équivalence on étend facilement la propriété (T_1) aux fonctions à variation bornée généralisée dans le sens restreint (dites aussi fonctions *VBG**, voir § 2), qui dans la théorie de l'intégrale de M. Denjoy $(\mathfrak{D}^*)$ jouent le rôle analogue à celui des fonctions à variation bornée habituelles dans la théorie de l'intégrale lebesguienne. Il est bien connu que plusieurs propriétés (comme p. ex. la dérivabilité presque partout) des fonctions à variation bornée se laissent étendre aux fonctions *VBG**. Nous en allons ici signaler encore la suivante: comme on sait, pour qu'une fonction à variation bornée soit absolument continue, il suffit déjà que l'image de l'ensemble des points où la fonction

[1]) Banach, **3.** (Voir la bibliographie à la fin de cet ouvrage).

[2]) Banach, **2**, p. 229. Vitali, **18**, p. 181.

[3]) Janzen, *Über einige stetige Kurven* (Inaug.-Dissert. Königsberg). Cf. aussi: Schauder, *The theory of surface measure*, *Fund. Math.*, t. 8, (1926), p. 1.

admet la dérivée unique et infinie, soit de mesure nulle; une conséquence immédiate du § de cette note est que la même condition suffit pour qu'une fonction à variation bornée généralisée dans le sens restreint et à dérivée intégrable $(\mathfrak{D}^*)$ soit une fonction absolument continue généralisée dans le même sens. Cette proposition s'étendra à ces fonctions à propriété (T_2) dont la dérivée est intégrable au sens de M. Lebesgue ou de M. Denjoy. Il est vrai que les fonctions à propriété (T_2) peuvent être depourvues de la dérivé — même infinie — partout sauf un ensemble de mesure nulle; on peut toutefois, dans le cas considéré se restreindre à n'admettre l'intégrabilité de cette dérivée que sur l'ensemble où elle existe à priori.

Il est à noter dans cet ordre des idées le résultat intéressant de M-lle Nina Bary, à savoir que pour la continuité absolue d'une fonction continue vérifiant la condition (N) il suffit déjà (ce qui est évidemment à la fois nécessaire) que sa dérivée soit sommable sur l'ensemble où cette dérivée existe [4]). Les théorèmes du § 6 de cette note, où nous suivons les idées de M-lle Bary, engendrent aussi bien le théorème précité qu'un certain théorème que j'ai publié antérieurement dans ce recueil [5]).

Quelques énoncés (théorèmes 1, 2, 3, 5 ainsi que lemme du § 4 et coroll. 1 du § 5) que nous donnons ici pour la commodité du lecteur, se trouvent déjà dans mon livre (**16**) écrit en langue polonaise.

§ 2. Nous allons tout d'abord rappeler et préciser quelques définitions [6]).

Nous appellerons oscillation supérieure, resp. inférieure, d'une fonction $F(x)$ dans un intervalle $I=(a, b)$ la borne supérieure, resp. inférieure, des valeurs $F(y)-F(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant \leqslant y \leqslant b$. La borne supérieure des valeurs absolues $|F(x)-F(x)|$ pour x, y appartenant à l'intervalle I sera appelée oscillation absolue ou, tout court, oscillation de $F(x)$ dans cet intervalle.

[4]) Bary: **5**, p. 199; **6**.

[5]) Saks, **13**. Je dois signaler à cette occasion une erreur causée par la confusion des notions des oscillations absolue et relative (voir le § suivant) qui s'est glissée dans la démonstration du lemme **3** (p. 224) de ma note **13**; ce lemme est contenu dans les lemmes **1** et **2** de la note présente (§ 6).

[6]) Cf. aussi: Saks, **16** (Chap. VIII—X), **15**.

Les trois nombres ainsi définis seront désignés resp. par $O_+(F;I)$, $O_-(F;I)$, $O(F;I)$. On a évidemment

$$O_-(F;I) \leqslant 0 \leqslant O_+(F;I),$$
$$O(F;I) = \max[O_+(F;I), |O_-(F;I)|].$$

Une fonction $F(x)$ définie dans un intervalle $I=(a,b)$ est dite à variation bornée ou VB, resp. à variation bornée dans le sens restreint ou VB^*, sur un ensemble $Q \subset I$ lorsqu'il existe un nombre fini M tel que pour chaque système d'intervalles $\{I_k=(a_k,b_k)\}$ n'empiétant pas et dont les extrémités appartiennent à Q, on a

$$\sum_k |F(b_k)-F(a_k)| \leqslant M, \quad \text{resp.} \quad \sum_k O(F;I_k) \leqslant M.$$

Elle est absolument continue ou AC, resp. absolument continue dans le sens restreint ou AC^*, sur Q, lorsque à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ tel que, pour chaque système d'intervalles $\{I_k=(a_k,b_k)\}$ n'empiétant pas et dont les extrémités appartiennent à Q, l'inégalité

$$\sum_k |b_k - a_k| \leqslant \eta$$

entraîne

$$\sum_k |F(b_k)-F(a_k)| \leqslant \varepsilon, \quad \text{resp.} \quad \sum_k O(F;I_k) \leqslant \varepsilon.$$

Une fonction $F(x)$ est dite à variation bornée généralisée ou VBG, resp. à variation bornée généralisée dans le sens restreint ou VBG^*, resp. absolument continue généralisée ou ACG, resp. absolument continue généralisée dans le sens restreint ou ACG^*, dans un intervalle I, lorsque cet intervalle est la somme d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles tels que sur chacun d'eux $F(x)$ est VB, resp. VB^*, resp. AC, resp. AC^*.

On sait d'après le théorème connu de MM. Denjoy et Lusin que toute fonction VBG^* (donc, à plus forte raison, toute fonction ACG^*) possède presque partout la dérivée unique finie [7]. Pareillement, en vertu du théorème de MM. Denjoy et Khintchine, toute fonction VBG mesurable admet presque partout la dérivée approximative finie. De plus, chaque fonction ACG^*, resp. ACG, est déterminée complètement (à une constante additive près) par les valeurs de sa dérivée ordinaire, resp. approximative, données presque partout.

[7] Lusin, **8**, p. 69; Denjoy, **7**; Burkill, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, t. 21 (1923), p. 659; Saks, **15**, p. 246, **16**, p. 235.

La fonction $f(x)$ est intégrable au sens de MM. Denjoy-Khintchine ou $(\mathfrak{D})$, resp. au sens de MM. Denjoy-Perron ou $(\mathfrak{D}^*)$ dans un intervalle $I=(a,b)$, lorsqu'il existe une fonction $F(x)$ qui est ACG, resp. ACG^*, et dont la dérivée approximative est égale à $f(x)$ presque partout dans I. $F(x)$ est dite alors intégrale indéfinie $(\mathfrak{D})$, resp. $(\mathfrak{D}^*)$, de $f(x)$ dans I. La différence $F(b)-F(a)$ est l'intégrale définie de $f(x)$ dans I dans le même sens.

Une autre définition de l'intégrale $(\mathfrak{D}^*)$ est due à M. Perron [8]) et s'appuie sur la notion des fonctions majorantes et minorantes. Nous allons donner la définition de ces fonctions sous une forme un peu plus générale qui nous sera utile dans les considérations ultérieures.

$f(x)$ étant une fonction définie sur un ensemble Q, on appelle fonction majorante de $f(x)$ sur Q chaque fonction $M(x)$ continue dans un intervalle $I \supset Q$ et telle que

$$\underline{M}(x) > -\infty \quad \text{partout dans } I,$$

et

$$\underline{M}(x) \geqslant f(x) \quad \text{lorsque} \quad x \in Q \text{ [9]}.$$

D'une manière analogue on définit les fonctions minorantes.

La définition originale de M. Perron s'énonce alors comme il suit:

une fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{D}^*)$ dans un intervalle (a,b) lorsque: 1° $f(x)$ possède des fonctions majorantes dans cet intervalle, et 2° le borne inférieure des nombres $M(b)-M(a)$ coïncide avec la borne supérieure des valeurs $m(b)-m(a)$, où $M(x)$, resp. $m(x)$,

[8] Perron, *Sitzgsb. Heidelb. Ak. Wiss.*, (A), (1914), 14. Abh. Kamke, **10**. Saks, **16** (Chap. VII).

[9] $\overline{F}^+(x)$, $\underline{F}^+(x)$ désignent resp. les nombres dérivés supérieur et inférieur de la fonction $F(x)$ du côté droit; $\overline{F}^-(x)$, $\underline{F}^-(x)$ désignent des dérivés analogues à gauche; ensuite, $\overline{F}(x)$ et $\underline{F}(x)$ désignent resp. le plus petit et le plus grand des quatre dérivés $\overline{F}^+(x)$, $\underline{F}^+(x)$, $\overline{F}^-(x)$, $\underline{F}^-(x)$.

désigne une majorante, resp. minorante, quelconque de $f(x)$ dans (a, b). La valeur commune de ces deux bornes est alors, par définition, l'intégrale définie $(\mathfrak{D}^*)$ de $f(x)$ dans (a, b).

D'après le théorème connu de MM. Hake-Alexandroff-Looman[10]) cette définition équivaut à la définition „descriptive" dont nous avons parlé plus haut.

§ 3. Nous avons mentionné déjà (§ 1) la condition (N) de M. Lusin qu'on exprime habituellement comme il suit:

(N) *l'ensemble de valeurs que la fonction prend dans un ensemble quelconque de mesure nulle, est aussi de mesure nulle.*

On sait cependant, depuis des récherches de M. de la Vallée-Poussin sur la structure des fonctions à variation bornée[11]) que dans plusieurs cas, au lieu de considérer des ensembles de mesure nulle quelconques, on peut n'envisager que l'ensemble où la dérivée de la fonction est determinée et infinie[12]). En suivant cette idée on est amené à introduire les conditions suivantes généralisant la propriété (N):

(N^{∞}) *l'ensemble des valeurs que la fonction prend aux points où la dérivée existe et devient infinie, est de mesure nulle;*

$(N^{+\infty})$ *l'ensemble des valeurs que la fonction prend aux points où la dérivée existe et devient infinie positive, est de mesure nulle;*

$(N^{-\infty})$ *l'ensemble des valeurs que la fonction prend aux points où la dérivée existe et devient infinie négative, est de mesure nulle.*

On sait que la condition (N) consiste dans une généralisation de la notion de continuité absolue. Tout pareillement, en considérant les conditions $(N^{+\infty})$, $(N^{-\infty})$ on arrive à la généralisation des propriétés essentielles des fonctions majorantes et minorantes (§ 2) de MM. Perron et de la Vallée-Poussin. On peut même dire que ces conditions permettent éclaircir le rôle important des fonctions majorantes et minorantes dans la théorie de l'intégrale $(\mathfrak{D}^*)$.

[10]) Hake, 9. Alexandroff, 1. Looman, 11.
[11]) De la Vallée-Poussin, 17, p. 93.
[12]) Cet ensemble étant toujours de mesure nulle. Cf. Denjoy, 8; Banach, 4.

Condition (T_1).

§ 4. Nous commencerons par prouver un lemme fondamental pour nos considérations ultérieures; nous nous servons ici de la méthode qui est due en substance à M. Banach[13]).

Lemme. *Si une fonction $F(x)$, continue dans un intervalle I n'admet en aucun point d'un ensemble $Q \subset I$ de dérivée (finie ni infinie) et que chaque point $x \in Q$ est un point isolé de l'ensemble $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = F(x)]$, alors*

$$|F(Q)| = |Q| = 0\ ^{14}).$$

Démonstration. Chaque point $x \in Q$ étant un point isolé de l'ensemble correspondant $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = F(x)]$, on voit de suite qu'en chaque tel point les deux cas suivants sont seulement possibles: ou bien 1° la fonction $F(x)$ y atteint son extremum au sens propre, ou bien 2° les quatre nombres dérivés de Dini de $F(x)$ y sont d'un même signe. D'autre part, par hypothèse, $F(x)$ est dépourvue de dérivée en chaque point de Q. Par conséquent, on peut poser Q sous la forme

$$Q = A + B + N,$$

où N est l'ensemble de points où $F(x)$ prend ses valeurs extremales (au sens propre), et A et B désignent resp. les ensembles de points $x \in Q$ où

$$\overline{F}(x) > \underline{F}(x) \geqslant 0, \tag{1}$$

resp.

$$\underline{F}(x) < \overline{F}(x) \leqslant 0. \tag{2}$$

Or, d'après le théorème connu de M. Denjoy[15]), les ensembles A et B sont de mesure nulle et la dérivée inférieure, resp. supérieure, étant d'après (1), resp. (2), finie en chaque point de A, resp. B, les ensembles $F(A)$ et $F(B)$ sont également de mesure nulle[16]). Ensuite, l'ensemble N est au plus dénombrable, et par conséquent,

[13]) Banach, 2.
[14]) A étant un ensemble, $F(A)$ désigne l'ensemble de valeurs que la fonction $F(x)$ prend aux points de A; $|A|$ désigne la mesure (lebesguienne) de A.
[15]) Denjoy, 8.
[16]) Voir p. ex., Saks, 14.

$$|Q| \leqslant |A| + |B| + |N| = 0,$$

$$|F(Q)| \leqslant |F(A)| + |F(B)| + |F(N)| = 0,$$

d'où

$$|F(Q)| = |Q| = 0,$$

c. q. f. d.

Théorème 1. *Pour qu'une fonction continue $F(x)$ jouit de la propriété (T_1), il faut et il suffit que l'ensemble des valeurs qu'elle prend aux points où elle n'admet pas de dérivée — fnie ni infinie — soit de mesure nulle*[17]).

Démonstration. Soit S l'ensemble des valeurs que la fonction continue $F(x)$ prend une infinité de fois dans l'intervalle (a, b), et R l'ensemble des points de cet intervalle où $F(x)$ n'admet pas de dérivée.

Il faut prouver que les relations

$$|S| = 0 \quad \text{et} \quad |F(R)| = 0$$

sont équivalentes.

1° Supposons d'abord que

(3) $$|S| = 0.$$

Soit R' l'ensemble de points x pour lesquels

$$F(x) \in S.$$

On a alors

$$F(R') \subset S$$

et en raison de (3)

(4) $$|F(R')| = 0.$$

D'autre part, pour chaque point $x \in R - R'$ l'ensemble correspondant $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = F(x)]$ est toujours fini, donc isolé, et en vertu du lemme précédent, on a l'égalité

$$|F(R - R')| = 0,$$

qui jointe à la relation (4), donne

$$|F(R)| = 0.$$

[17]) La nécessité de cette condition résulte aussi du théorème de M-lle Bary (5, p. 633) d'après lequel toute fonction à propriété (T_1) est de la forme $f[\varphi(x)]$ où $f(x)$ désigne une fonction absolument continue et monotone, et $\varphi(x)$ est à variation bornée.

2° Supposons, en second lieu, que

(5) $$|F(R)| = 0.$$

Pour tout point $y \in S - F(R)$ l'ensemble correspondant $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = y]$ est fermé et infini, et contient, par conséquent, des points d'accumulation. On peut parsuite attacher à tout point $y \in S - F(R)$ un point ξ_y qui soit un point limite de l'ensemble correspondant $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = y]$. Soit H l'ensemble des points ξ_y pour $y \in S - F(R)$. Cet ensemble est évidemment disjoint à R, et par conséquent, la fonction $F(x)$ est dérivable en chaque point de H. Or, tout point de H est, par définition, point limite d'un ensemble où la fonction $F(x)$ prend des valeurs égales. La dérivée $F'(x)$ s'annulle donc en chaque point de H et, d'aprés un théorème connu,

$$|F(H)| = 0.$$

L'ensemble $F(H)$ coïncidant avec l'ensemble $S - F(R)$, on a parsuite

$$|S - F(R)| = 0$$

et, en vertu de (5),

$$|S| = 0,$$

c. q. f. d.

Corollaire. *Pour les fonctions continues à propriété (T_1) les conditions (N) et (N^∞) sont équivalentes.*

Démonstration. Soient $F(x)$ une fonction continue à propriétés (T_1) et (N^∞), et Q un ensemble quelconque de mesure nulle. On peut poser

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

où Q_1 désigne l'ensemble de ces points de Q où $F(x)$ possède la dérivée finie, Q_2 — l'ensemble de ces points de Q où $F'(x)$ existe mais devient infinie, et ensuite Q_3 — l'ensemble de points restant de Q c.-à-d. de ceux où $F(x)$ est depourvue de dérivée. On a, par hypothèse,

$$|F(Q_2)| = 0,$$

et, d'après le théorème 1,

$$|F(Q_3)| = 0;$$

ensuite, $F'(x)$ étant finie en chaque point de l'ensemble $Q_1 \subset Q$ qui est de mesure nulle, on a aussi

$$|F(Q_1)| = 0,$$

d'où évidemment l'ensemble

$$F(Q) = F(Q_1) + F(Q_2) + F(Q_3)$$

est également de mesure nulle, et $F(x)$ remplit la condition (N).

§ 5. Théorème 2. *$F(x)$ étant une fonction définie dans un intervalle I et à variation bornée dans le sens restreint sur un ensemble fermé $P \subset I$, l'ensemble des valeurs qu'elle prend à ces points de P où elle n'admet pas de dérivée — finie ni infinie —, est de mesure nulle.*

Démonstration. Soit $\{I_k\}$ la suite des intervalles contigus à P, et désignons, pour $k = 1, 2, \ldots$, par M_k et m_k resp. les bornes — supérieure et inférieure — de $F(x)$ dans l'intervalle I_k. Soient maintenant $G(x)$ et $H(x)$ deux fonctions, identiques à $F(x)$ aux points de P et égales aux nombres M_k et m_k resp. dans les intérieurs des intervalles I_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

On a évidemment, en chaque point $x \in P$

$$\overline{G}^{+}(x) \geqslant \overline{F}^{+}(x) \geqslant \overline{H}^{+}(x), \quad \underline{G}^{+}(x) \geqslant \underline{F}^{+}(x) \geqslant \underline{H}^{+}(x),$$

$$\overline{G}^{-}(x) \leqslant \overline{F}^{-}(x) \leqslant \overline{H}^{-}(x), \quad \underline{G}^{-}(x) \leqslant \underline{F}^{-}(x) \leqslant \underline{H}^{-}(x).$$

Il s'en suit qu'en tout point $x \in P$ où les fonctions $G(x)$ et $H(x)$ sont toutes deux dérivables, la fonction $F(x)$ est aussi dérivable. En désignant, parsuite, par R, R_1, R_2 les ensembles des points de P où resp. les fonctions $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ sont dépourvues de dérivée (même infinie), on a

$$R \subset R_1 + R_2,$$

d'où

(1) $$F(R) \subset F(R_1) + F(R_2) = G(R_1) + H(R_2).$$

Or, la fonction $F(x)$ étant VB^* sur l'ensemble P, les fonctions $G(x)$ et $H(x)$ sont à variation bornée dans tout l'intervalle (a, b) et, par conséquent, d'après la propriété connue des fonctions à variation bornée,

$$|G(R_1)| = |H(R_2)| = 0$$ [18],

[18]) Car l'ensemble des points où une courbe rectifiable est dépourvue de tangente, est toujours de longueur nulle.

d'où en vertu de (1),

$$|F(R)| = 0,$$

ce qui prouve notre théorème.

Il s'en suit immédiatement le suivant

Théorème 3. *L'ensemble des valeurs qu'une fonction à variation bornée généralisée dans le sens restreint prend aux points où elle est dépourvue de dérivée, est toujours de mesure nulle.*

Le théorème 1 du § précédent permet énoncer ce résultat sous la forme équivalente: *toute fonction VBG^* continue satisfait à la condition (T_1).*

On observe aisément que cette propriété ne s'étend point aux fonctions VBG (même ACG). On voit cependant que toute fonction VBG vérifie la condition (T_2).

Le théorème 3 présente une analogie évidente avec le théorème connu de MM. Denjoy et Lusin sur la dérivabilité presque partout des fonctions VBG^*. On peut d'ailleurs prouver par la même voie le théorème plus général: *$F(x)$ étant une fonction VBG^*, l'ensemble de points $[x, F(x)]$ où la courbe $y = F(x)$ est dépourvue de tangente, est de longueur nulle* (p. ex. au sens de M. Carathéodory).

Signalons encore la conséquence suivante des théorèmes de ce §:

Théorème 4. *Pour qu'une fonction continue (VBG^*) soit (ACG^*), il faut et il suffit qu'elle satisfait à la condition (N^∞).*

Car, d'après le théorème de M. Denjoy [19]), la condition (N) est nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue (VBG^*) soit (ACG^*), et d'après le corollaire du § précédent cette condition, pour les fonctions continues à propriété (T_1), donc, en particulier, pour les fonctions (VBG^*) équivaut à la condition (N^∞).

Condition (T_2).

§ 6. Théorème 5. *Lorsqu'une fonction continue $F(x)$ jouit dans un intervalle (a, b) de la propriété (T_2), alors*

(1) $$-|F(N)| \leqslant F(b) - F(a) \leqslant |F(P)|,$$

où P, resp. N, désigne l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) où $F(x)$ possède la dérivée unique non-négative, resp. non-positive.

[19]) Denjoy, 8. Saks, 16, p. 240.

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de prouver l'inégalité

$$F(b) - F(a) \leqslant |F(P)|. \tag{2}$$

En remplaçant $F(x)$ par $F(-x)$ on obtient la seconde des inégalités contenues dans la relation (1).

On peut supposer que

$$F(b) > F(a), \tag{3}$$

l'inégalité (2) étant évidente dans le cas contraire.

Soit Y l'ensemble des valeurs que la fonction $F(x)$ prend un nombre fini ou dénombrable de fois dans l'intervalle (a, b). On a alors, $F(x)$ étant, par hypothèse, à propriété (T_2),

$$|F(b) - F(a)| \leqslant |Y|. \tag{4}$$

Nous montrerons tout d'abord qu'on peut attacher à chaque valeur $y \epsilon Y$ un point x_y de l'intervalle (a, b) de manière à vérifier les conditions suivantes:

$$F(x_y) = y, \tag{5}$$

$$\overline{F}(x_y) \geqslant 0, \tag{6}$$

$$x_y \text{ est un point isolé de l'ensemble } \underset{\xi}{E}[F(\xi) = y]. \tag{7}$$

En effet, soit $y \epsilon Y$; nous distinguerons les deux cas:

1° L'e n s e m b l e $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = y]$ s e r é d u i t à u n s e u l p o i n t; on désignera alors ce point par x_y et on voit de suite qu'il vérifie les conditions (5) et (7), et — en vertu de (3) — aussi la condition (6).

2° L'e n s e m b l e $\underset{\xi}{E}[F(\xi) = y]$ c o n t i e n t p l u s q u' u n p o i n t. Dans ce cas, cet ensemble étant au plus dénombrable, il contient un couple u, v de points isolés tels que l'intervalle (u, v) ne renferme plus, à son intérieur, de points de l'ensemble considéré. On voit facilement alors que la dérivée supérieure (et même inférieure) est non-négative en l'un au moins des points u, v. Nous désignerons ce point par x_y: il vérifie évidemment les conditions demandées.

Soient maintenant X l'ensemble de tous points x_y ainsi déterminées pour $y \epsilon Y$, et X_1 l'ensemble de ces points $x \epsilon X$ où la fonction $F(x)$ admet la dérivée unique. On a alors en tenant compte de (6)

$$X_1 \subset P,$$

et, d'autre part, en vertu de (7) et du lemme du § 4,

$$|F(X_1)| = |F(X)|.$$

Donc, en raison de (4),

$$|F(b) - F(a)| \leqslant |Y| = |F(X)| = |F(X_1)| \leqslant |P|,$$

ce qui prouve l'inégalité (2).

Remarque. L'ensemble de valeurs que la fonction prend aux points où sa dérivée existe et s'annulle, étant de mesure nulle, on peut remplacer évidemment dans l'énoncé que nous venons de prouver, les termes „l a d é r i v é e n o n - n é g a t i v e (n o n - p o s i t i v e)" par „l a d é r i v é e p o s i t i v e (n é g a t i v e)".

Signalons encore deux corollaires qui découlent du théorème précédent.

Corollaire 1. *Pour qu'une fonction continue à propriéte (T_2) soit non-décroissante, il faut et il suffit que sa dérivée aux points où elle existe, soit non-négative.*

Cette proposition s'applique en particulier aux fonctions à variation bornée généralisée, ces fonctions jouissant (§ 4) de la condition (T_2).

Corollaire 2. *Pour qu'une fonction continue soit absolument continue, il faut et il suffit qu'elle satisfait aux conditions (T_2) et (N^∞) et que sa dérivée soit sommable sur l'ensemble des points où la fonction est dérivable* [20]).

Ce corollaire peut être completé par le suivant,

Théorème 6. *Pour qu'une fonction $F(x)$ continue dans un intervalle (a, b) soit la somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction non-croissante, il faut et il suffit qu'elle jouit des propriétés (T_2) et $(N^{+\infty})$ et que sa dérivée soit sommable sur l'ensemble des points où $F'(x)$ existe et est non-négative.*

D é m o n s t r a t i o n. 1° L e s c o n d i t i o n s s o n t n é c e s s a i r e s. Supposons, en effet, que $F(x) = G(x) + H(x)$, où $G(x)$ est une

[20]) Ce corollaire présente une généralisation légère (dont nous profiterons plus loin) du théorème de M-lle B a r y invoqué au début de cette note (§ 1), car d'après un théorème de M. B a n a c h *toute fonction continue à propriété* (N) *jouit de la propriété* (T_2) (B a n a c h, **3**; B a r y, **5**, p. 195; S a k s, **16**, p. 269).

fonction absolument continue et $H(x)$ une fonction continue non-croissante. La fonction $F(x)$ étant alors à variation bornée, elle satisfait évidemment à la condition (T_2) (§ 4) et sa dérivée est sommable. Il reste donc à démontrer qu'en désignant par $R^{+\infty}$ l'ensemble des points x où $F'(x) = +\infty$, on a

$$|F(R^{+\infty})| = 0. \tag{8}$$

Soit, dans ce but, ε un nombre positive. La fonction $G(x)$ étant absolument continue et $H(x)$ non-croissante, on peut associer à ε un nombre $\eta > 0$ tel que pour chaque système d'intervalles (a_k, b_k) n'empiétant pas

$$\sum_k (b_k - a_k) < \eta \quad \text{entraîne} \quad \sum_k [F(b_k) - F(a_k)] < \varepsilon. \tag{9}$$

Désignons par R_n $(n = 1, 2, \dots)$ l'ensemble de ces points $x \in R^{+\infty}$ pour lesquels l'inégalité

$$x - \frac{1}{n} \leqslant u \leqslant x \leqslant v \leqslant x + \frac{1}{n}$$

implique, pour chaque couple (u, v), l'inégalité

$$F(v) \geqslant F(x) \geqslant F(u).$$

On a évidemment, pour chaque n,

$$R_n \subset R_{n+1}$$

et, la dérivée $F'(x)$ étant infinie positive dans $R^{+\infty}$,

$$R^{+\infty} = \lim_n R_n. \tag{10}$$

Or, l'ensemble $R^{+\infty}$ et, par conséquent, tous les ensembles R_n étant de mesure nulle, on peut associer à chaque ensemble R_n une suite d'intervalles $\{I_k^{(n)} = (a_k^{(n)}, b_k^{(n)})\}$ de manière que

$$R_n \subset \sum_k I_k^{(n)} \quad \text{et} \quad \sum_k |I_k^{(n)}| < \eta;$$

on peut supposer évidemment que chacun de ces intervalles contient de points de R_n et que la longueur d'aucun d'eux ne surpasse $\frac{1}{n}$.

On a alors, pour tout k,

$$F(b_k^{(n)}) - F(a_k^{(n)}) \geqslant 0$$

et des intervalles $[F(a_k^{(n)}), F(b_k^{(n)})]$ $(k = 1, 2, \dots)$ renfermant, en leur ensemble, $F(R_n)$, il résulte de (9)

$$|F(R_n)| \leqslant \sum_k [F(b_k^{(n)}) - F(a_k^{(n)})] < \varepsilon,$$

d'où, en passant d'après (10) à la limite, il vient

$$|F(R^{+\infty})| \leqslant \varepsilon,$$

et ε étant un nombre arbitrairement petit, on obtient l'égalité (8).

2°. **Les conditions sont suffisantes.** Supposons donc qu'elles sont remplies par une fonction $F(x)$ continue dans l'intervalle (a, b) et soit $f(x)$ la fonction égale à $F'(x)$ aux points où $F'(x)$ existe et est non-négative, et à 0 partout d'ailleurs. On a alors, en vertu du th. 5, pour chaque intervalle (α, β)

$$F(\beta) - F(\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \;[21]),$$

et en posant

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad H(x) = F(x) - G(x),$$

on obtient la décomposition cherchée de $F(x)$ en la fonction absolument continue $G(x)$ et la fonction non-croissante $H(x)$.

Condition (T_2) et l'intégrale $(\mathfrak{D}^*)$.

§ 6. Nous allons donner maintenant quelques conditions, à la fois nécessaires et suffisantes, pour qu'une fonction à propriété (T_2) soit une intégrale indéfinie $(\mathfrak{D}^*)$, c.-à-d. absolument continue généralisée dans le sens restreint. Nous prouverons tout d'abord un lemme fondamental.

[21]) Car, lorsque la fonction $F(x)$ possède la dérivée **finie** en tout point d'un ensemble A, on a

$$|F(A)| \leqslant \int_A |F'(x)|\, dx;$$

voir, p. ex., Bary, **5**, p. 193; Saks, **14** et **16**, p. 229.

Lemme 1. *Soient $F(x)$ une fonction continue telle que*

$$\sum_k O_+(F; I_k) < +\infty, \tag{1}$$

où $\{I_k = (a_k, b_k)\}$ désigne la suite des intervalles contigus à un ensemble fermé P, et $F_1(x)$ la fonction identique à $F(x)$ aux points de P et linéaire dans les intervalles contigus. Soient ensuite R et R_1 resp. les ensembles des points $x \in P$ où les fonctions $F(x)$ et $F_1(x)$ possèdent la derivée (finie ou infinie).

Dans ces hypothèses

$$|F(R_1 - R)| = |R_1 - R| = 0, \tag{2}$$

et en presque tout point $x \in R$

$$F(x) = F_1'(x). \tag{3}$$

Démonstration. 1°. Nous prouverons premièrement qu'en presque tout point $x \in P$, on a

$$\begin{aligned} \underline{F}^+(x) &= \underline{F}_1^+(x), \quad \overline{F}^+(x) = \overline{F}_1^+(x), \\ \underline{F}^-(x) &= \underline{F}_1^-(x), \quad \overline{F}^-(x) = \overline{F}_1^-(x), \end{aligned} \tag{4}$$

c.-à-d. que les dérivés extrêmes de côtés et de rangs correspondants des fonctions $F(x)$ et $F_1(x)$ sont presque partout dans P identiques.

Soient, à cet effet, m_k $(k = 1, 2, \ldots)$ la borne inférieure de $F(x)$ dans l'intervalle I_k et soit $G(x)$ la fonction égale à m_k $(k = 1, 2, \ldots)$ pour les points b_k, et à $F_1(x)$ en dehors de la suite $\{b_k\}$. On a alors en tout point x de l'ensemble P qui est un point de densité de cet ensemble,

$$\underline{F}^+(x) \geqslant \underline{G}^+(x)\ [22]. \tag{5}$$

[22]) Voici, en quelques lignes, la démonstration de la relation (5). Soient x_0 un point quelconque de densité de l'ensemble P et $\{\xi_k\}$ une suite des points convergeant du côté droit vers x_0 de manière que

$$\lim_k \frac{F(\xi_k) - F(x_0)}{\xi_k - x_0} = \underline{F}^+(x_0). \tag{*}$$

Dans le cas où une infinité de points de la suite $\{\xi_k\}$ appartient à P, il s'en suit aussitôt l'inégalité cherchée

$$\underline{F}^+(x_0) \geqslant \underline{G}^+(x_0),$$

D'autre part, la fonction $F_1(x) - G(x)$ s'annulle identiquement en dehors de la suite $\{b_k\}$ et l'on a, en vertu de (1),

$$0 \leqslant \sum_k [F_1(b_k) - G(b_k)] = \sum_k [F(b_k) - m_k] \leqslant \sum_k O_+(F; I_k) < +\infty,$$

ce qui montre que la fonction $F_1(x) - G(x)$ est à variation bornée. Sa dérivé existe donc et s'annulle presque partout, d'où — presque partout —

$$\underline{F}_1^+(x) = \underline{G}^+(x),$$

ce qui joint à la relation (5) et à l'inégalité évidente

$$\underline{F}^+(x) \leqslant \underline{F}_1^+(x),$$

donne presque partout dans P la première des égalités (4).

On établit de même les trois autres de ces égalités. Il s'en suit que les ensembles de points de P où les fonctions $F(x)$ et $F_1(x)$ possèdent, toutes deux, les dérivées, sont presque identiques, c.-à-d. que

$$|R - R_1| = |R_1 - R| = 0, \tag{6}$$

et que les dérivées $F'(x)$ et $F_1'(x)$ coïncident en presque tout point de R.

2° Il reste à prouver qu'on a aussi

$$|F(R_1 - R)| = 0. \tag{7}$$

Désignons, à cet effet, par S l'ensemble de ces points de $R_1 - R$ qui sont des extrémités des intervalles I_k. L'ensemble S étant dé-

car, aux points de P, on a $G(x) \leqslant F_1(x) = F(x)$, et l'inégalité $G(x) < F(x)$ peut avoir lieu seulement aux points b_k.

On peut supposer donc que tous les points ξ_k sont situés en dehors de P, et attacher, par conséquent, à chaque point ξ_k l'intervalle (a_{n_k}, b_{n_k}) qui le renferme; x_0 étant, par hypothèse, le point de densité de l'ensemble P, on a alors

$$\lim_k \frac{\xi_k - x_0}{b_{n_k} - x_0} = 1,$$

et il s'ensuit de (*)

$$\underline{F}^+(x_0) \geqslant \limsup_k \frac{m_{n_k} - F(x_0)}{b_{n_k} - x_0} = \limsup_k \frac{G(b_{n_k}) - G(x_0)}{b_{n_k} - x_0} \geqslant \underline{G}^+(x_0),$$

ce qui justifie notre assertion. Il est facile d'ailleurs de remplacer ici l'inégalité par l'égalité.

nombrable, l'ensemble $F(S)$ l'est aussi, et, à plus forte raison il est de mesure nulle.

Soit, d'autre part, T l'ensemble de ces points de $R_1 - R$ où la dérivée unique de $F_1(x)$, ou l'un au moins de quatre nombres dérivés extrêmes de $F(x)$, est fini. L'ensemble T étant d'après (6) de mesure nulle, l'ensemble $F(T) = F_1(T)$ est de même mesure[23]). La formule (7) est ramenée ainsi à l'égalité

$$|F(R_1 - R - S - T)| = 0. \tag{8}$$

Or, pour chaque point $x \in R_1 - R - S - T$, on a, ou bien

$$F_1'(x) = +\infty = \overline{F}(x), \quad \underline{F}(x) = -\infty, \tag{9}$$

ou bien

$$F_1'(x) = -\infty = \underline{F}(x), \quad \overline{F}(x) = +\infty. \tag{10}$$

Nous désignérons par U, resp. V, l'ensemble de ces points

$$x \in R_1 - R - S - T$$

où les égalités (9), resp. (10), sont vérifiées et prouverons que

$$|F(U)| = |F(V)| = 0. \tag{11}$$

Soit, à cet effet, M_k et m_k, $(k = 1, 2, \ldots)$ resp. les bornes supérieure et inférieure de $F(x)$ dans l'intervalle $I_k = (a_k, b_k)$. On a évidemment, pour tout k,

$$0 \leqslant \genfrac{}{}{0pt}{}{M_k - F(a_k)}{F(b_k) - m_k} \leqslant O_+(F; I_k);$$

A tout nombre positive ε on peut donc, en raison de (1), associer un indice K de sorte qu'on ait

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\sum\limits_{k=K} [M_k - F(a_k)]}{\sum\limits_{k=K} [F(b_k) - m_k]} \leqslant \varepsilon. \tag{12}$$

Soit maintenant x_0 un point quelconque de U. Les deux cas seulement sont possibles en vertu de (9)

(a) ou bien, $\underline{F}^+(x_0) = -\infty$,

(b) ou bien, $\underline{F}^-(x_0) = -\infty$.

[23]) *Voir*: **Saks, 13.**

La dérivée $F_1'(x_0)$ étant infinie positive, on peut évidemment trouver dans le cas a), un intervalle I_k situé à droite du point x_0 et à l'indice $k \geqslant K$, de manière qu'on ait

$$F(b_k) = F_1(b_k) \geqslant F_1(x_0) = F(x_0) \geqslant m_k;$$

pareillement dans le cas (b) il existe des intervalles I_k $(k \geqslant K)$ situés à gauche du point x_0 et tels qu'on ait

$$F(a_k) = F_1(a_k) \leqslant F_1(x_0) = F(x_0) \leqslant M_k.$$

Les intervalles $[m_k, F(b_k)]$, $[F(a_k), M_k]$ $(k \geqslant K)$ couvrent ainsi l'ensemble U et, par conséquent, en vertu de (12),

$$|F(U)| \leqslant 2\varepsilon,$$

d'où, ε étant un nombre arbitrairement petit, il s'ensuit

$$|F(U)| = 0.$$

On obtient d'une façon analogue

$$|F(V)| = 0,$$

c.-à-d. l'égalité (11), et parsuite (8) et (7). Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme 2. *Soient $F(x)$ une fonction continue et à propriété (T_2) dans un intervalle I, $M(x)$ une autre fonction continue dans cet intervalle et H un ensemble parfait contenue dans I. On suppose que*

1° *pour chaque point $x \in H$ et pour chaque point y de l'intervalle I*

$$\frac{M(y) - M(x)}{y - x} > K,$$

où K est un nombre fixe;

2° *en presque tout point $x \in H$ où $F'(x)$ existe et est non-négative*

$$F'(x) \leqslant M'(x)\ ^{24});$$

[24]) La fonction $M(x)$ est à variation bornée dans le sens restreint sur l'ensemble H et, parsuite (§§ 2, 4), elle est presque partout dérivable dans cet ensemble. En effet, en posant $N(x) = M(x) - K(x)$, on a, en vertu de la condition 1°,

$$\frac{N(y) - N(x)}{y - x} > 0,$$

pour chaque couple des points $x \in H$, $y \in I$. Il s'en suit que $N(x)$ est monotone (croissante) sur H et que, pour chaque intervalle $J = (\alpha, \beta)$ dont les extrémités

3° *l'ensemble des valeurs que la fonction $F(x)$ prend aux points de H où sa dérivée existe et devient infinie positive, est de mesure nulle;*

4° *pour tout intervalle (u, v) ne contenant pas de points de H*

$$F(u) - F(v) \leqslant M(u) - M(v). \tag{12}$$

Dans ce hypothèses l'inégalité (12) *a lieu pour* ***tous*** *les sous-intervalles (u, v) de I.*

Démonstration. Soient $F_1(x)$ et $M_1(x)$ les fonctions linéaires dans les intervalles contigus à H et identiques aux points de H aux fonctions $F(x)$ et $M(x)$ resp.

Soit d'autre part α, β $(\alpha < \beta)$ un couple quelconque de points de H, et désignons par $R^+(\alpha, \beta)$ l'ensemble de ces points de l'intervalle (α, β) qui appartiennent à H et dans lesquels la dérivée $F'(x)$ (finie ou infinie) existe et est non-négative. $R_1^+(\alpha, \beta)$ désignera l'ensemble analogue associé à la fonction $F_1(x)$.

En désignant maintenant par $\{I_k = (\alpha_k, \beta_k)\}$ la suite des intervalles contigus à la portion de H contenue dans l'intervalle (α, β), on a, en vertu du théorème 5 (§ 6),

$$F_1(\beta) - F_1(\alpha) \leqslant \sum_k{}' [F_1(\beta_k) - F_1(\alpha_k)] + |F_1[R_1^+(\alpha, \beta)]|,$$

où la sommation $\sum\limits_k{}'$ s'étend aux valeurs de k pour lesquels $F_1(\beta_k) \geqslant F_1(\alpha_k)$; donc, en vertu de la condition (4°)

$$F_1(\beta) - F_1(\alpha) \leqslant \sum_k{}' [M_1(\beta_k) - M_1(\alpha_k)] + |F_1[R_1^+(\alpha, \beta)]|. \tag{13}$$

D'autre part, d'après les conditions (1°) et (4°),

appartiennent à H,

$$O(N; J) = N(\beta) - N(\alpha).$$

Ainsi, en désignant par a et A resp. les bornes des valeurs de la fonction $N(x)$ sur H, on a, pour chaque système d'intervalles $\{J_k = (\alpha_k, \beta_k)\}$, n'empiétant pas et dont les extrémités appartiennent à H,

$$\sum_k O(N; J_k) = \sum_k [F(\beta) - F(\alpha_k)] \leqslant A - a,$$

ce qui montre que la fonction $N(x)$, et, par conséquent, la fonction $M(x) = N(x) + Kx$, sont VB^* sur l'ensemble H.

$$\sum_k O_+(F; I_k) \leqslant \sum_k O(M; I_k) < +\infty,$$

donc, en vertu du lemme précédent les ensembles $R^+(\alpha, \beta)$ et $R_1^+(\alpha, \beta)$ sont presque identiques, les dérivées de $F(x)$ et $F_1(x)$ y sont presque partout égales et l'ensemble de valeurs que la fonction $F_1(x)$ prend aux points où $F_1'(x) = +\infty$, est de mesure nulle. On a, en particulier, d'après 2°, en presque tout point de $R_1^+(\alpha, \beta)$

$$F_1'(x) \leqslant M_1'(x), \tag{14}$$

et $M_1(x)$ étant une fonction à variation bornée [25]), on voit tout de suite que $F(x)$ verifie les conditions du théorème 6 (§ 6) et peut être posée, par conséquent, sous la forme

$$F_1(x) = G_1(x) + H_1(x),$$

où $G_1(x)$ désigne une fonction absolument continue et $H_1(x)$ une fonction non-croissante.

Posons encore

$$N_1(x) = M_1(x) - Kx,$$

la relation (14) devient alors

$$G_1'(x) - K \leqslant N_1'(x) - H_1'(x),$$

et la fonction $N_1(x)$, donc aussi $N_1(x) - H(x)$, étant non-décroissantes, on obtient

$$[N_1(\beta) - N_1(\alpha)] - [H_1(\beta) - H_1(\alpha)] \geqslant \int_\alpha^\beta [N_1'(x) - H_1'(x)]\,dx$$

$$\geqslant \int_\alpha^\beta [G_1'(x) - K]\,dx = G_1(\beta) - G_1(\alpha) - K(\beta - \alpha).$$

Donc, en revenant aux fonctions $F_1(x)$, $M_1(x)$, on a

$$M_1(\beta) - M_1(\alpha) \geqslant F_1(\beta) - F_1(\alpha),$$

ou bien

$$M(\beta) - M(\alpha) \geqslant F(\beta) - F(\alpha).$$

[25]) Car, en soustrayant de $M_1(x)$ la fonction linéaire Kx, on obtient, d'après 1°, la fonction décroissante (cf. la note précédente).

Cette relation prouvée jusqu'alors seulement pour les points $\alpha, \beta \in H$, s'étend tout de suite, en vertu de la condition 4°, à tous les intervalles (α, β) contenus dans I. Notre lemme est ainsi prouvé.

Théorème 7. *Lorsque la dérivée $F'(x)$ d'une fonction continue $F(x)$ à propriétés (T_2) et $(N^{+\infty})$ possède une majorante $M(x)$ (au sens de M. Perron) sur l'ensemble des points où $F(x)$ est dérivable, alors $F(x)$ est à variation bornée généralisée dans le sens restreint et pour chaque intervalle (a, b) on a*

$$F(b) - F(a) \leqslant M(b) - M(a). \tag{15}$$

Démonstration. Appelons, pour l'instant, régulier chaque intervalle (a, b) pour lequel l'inégalité (15) est vérifiée, et irrégulier tout autre intervalle. Un point x sera dit point irrégulier d'un intervalle (a, b), lorsque tout son entourage contient de sous-intervalles irréguliers de (a, b). Nous prouverons que tous les intervalles (a, b) sont réguliers.

Supposons, en effet, par impossible qu'un intervalle (a_0, b_0) soit irrégulier. Soit H l'ensemble de points irréguliers de cet intervalle. H est évidemment un ensemble parfait, non-vide. La fonction $M(x)$ étant majorante au sens de M. Perron, il existe un intervalle (a_1, b_1), contenu dans (a_0, b_0), renfermant à son intérieur de points de H, et tel que pour chaque point x de la partie de H contenue dans (a_1, b_1) et chaque point y de (a_1, b_1), on ait

$$\frac{M(y) - M(x)}{y - x} > K,$$

où K est un nombre fixe [26].

[26]) Pour établir un tel intervalle, désignons, pour chaque n, par P_n l'ensemble de points x de (a_0, b_0) pour lesquels l'inégalité $|x - y| < \frac{1}{n}$ entraîne, pour chaque y de (a_0, b_0), la relation

$$\frac{M(y) - M(x)}{y - x} \geqslant -n$$

$M(x)$ étant, par hypothèse une majorante au sens de M. Perron, on a, en tout point x, $\underline{M}(x) > -\infty$, et l'ensemble H est contenu dans la somme des ensembles P_n. Or, ces ensembles étant fermés, l'un en au moins, soit P_N, contient une portion de H. Soient a_1, b_1 les extrémités de cette portion. On peut supposer évidemment que $b_1 - a_1 \leqslant \frac{1}{N}$ En posant alors $K = -N$, on obtient l'intervalle (a_1, b_1) et le nombre K vérifiant les conditions désirées.

Or, chaque sous-intervalle de (a_1, b_1) qui ne renferme pas à son intérieur de points irréguliers, est évidemment lui-même régulier, et, on conclut aisément du lemme précédent, que tous les sous-intervalles de (a_1, b_1) sont réguliers, ce qui contredit au fait que l'intervalle (a_1, b_1) contienne de points irréguliers.

Nous aboutissons donc à une contradiction qui justifie l'inégalité (15) pour tous les intervalles (a, b) où les conditions de notre théorème sont vérifiées.

La fonction $M(x)$ étant une fonction VBG^* [27], il s'ensuit maintenant de la relation (15) que la fonction $F(x)$ l'est aussi.

Notre théorème est ainsi prouvé.

Il en résulte le suivant

Théorème 8. *Pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit dans un intervalle (a, b) absolument continue généralisée dans le sens restreint (c.-à.-d. intégrale indéfinie $(\mathfrak{D}^*)$), il faut et il suffit que*

1° $F(x)$ soit à propriétés (T_2) et (N^∞);

2° $F'(x)$ possède une majorante au sens de M. Perron sur l'ensemble des points où $F(x)$ est dérivable.

Démonstration. La nécessité des conditions 1°, 2° est évidente: en effet, toute fonction $F(x)$ absolument continue généralisée satisfait (§ 5) aux conditions (T_2) et (N); d'autre part, d'après le théorème de M. Hake, la dérivée de la fonction absolument continue généralisée dans le sens restreint, étant intégrable $(\mathfrak{D}^*)$, elle possède toujours des fonctions majorantes et minorantes. Réciproquement, lorsqu'une fonction continue $F(x)$ satisfait aux conditions 1°, 2°, elle est, en vertu du théorème précédent, une fonction VBG^*, et, de plus, par le théorème 4 (§ 4) elle est une fonction ACG^*.

La proposition que nous venons de prouver peut être particularisée de plusieurs façons. On peut, p. ex., y remplacer les deux conditions (N^∞), (T_2) par la seule condition (N) qui les engendre toutes deux. On peut aussi remplacer la condition 2° par la con-

[26]) Car, toutes les fonctions majorantes et minorantes au sens de M. Perron sont des fonctions VBG^*. Cela découle immédiatement de la décomposition de l'intervalle en la somme des ensembles P_n définie dans la note précédente; en effet, la fonction $M(x)$ est évidemment à variation bornée dans le sens restreint sur tout ensemble P_n.

dition qu'il existe une fonction $f(x)$ intégrable $(\mathfrak{D}^*)$ et égale ou supérieure à $F'(x)$ en presque tout point où $F(x)$ est dérivable. On obtient ainsi un énoncé qui engendre en particulier le théorème de M-lle Bary ainsi que quelques autres théorèmes mentionnés au début de cette note (§ 1). Toute intégrale indéfinie $(\mathfrak{D})$ satisfaisant à la condition (N), on en peut encore conclure la proposition suivante: *pour qu'une fonction $f(x)$ intégrable $(\mathfrak{D})$ soit intégrable $(\mathfrak{D}^*)$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction intégrable $(\mathfrak{D}^*)$ égale ou supérieure à $f(x)$ en presque tout point où $f(x)$ est la dérivée ordinaire*[28]) *de son intégrale indéfinie $(\mathfrak{D})$.*

Conditions $(N^{+\infty})$, $(N^{-\infty})$.

§ 7. Nous avons observé déjà (§ 3) que les fonctions (VBG^*) à propriétés $(N^{-\infty})$ et $(N^{+\infty})$ resp. fournissent une extension naturelle des fonctions majorantes et minorantes de M. Perron. Les énoncés que nous allons donner dans ce § justifieront cette remarque.

Théorème 9. *Pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit VBG^* et à propriété $(N^{+\infty})$ dans un intervalle $I=(a,b)$, il faut et il suffit que I soit la somme d'une suite d'ensembles fermés tels que sur chacun d'eux $F(x)$ soit la somme d'une fonction monotone non-croissante et d'une fonction AC^*.*

Démonstration. 1° Supposons, en premier lieu, que $F(x)$ est une fonction continue VBG^*, vérifiant la condition $(N^{+\infty})$ dans l'intervalle I. On peut donc poser

$$I=\sum_n P_n,$$

où $\{P_n\}$ désigne une suite d'ensembles fermés tels que sur chacun d'eux $F(x)$ soit à variation bornée au sens restreint. Soit maintenant, pour chaque n, $F_n(x)$ la fonction identique à $F(x)$ aux points de P_n (et aux points a, b) et linéaire dans les intervalles contigus à P_n. On voit de suite que toute fonction $F_n(x)$ est à variation bornée dans l'intervalle (a,b) et que, en vertu du lemme 1 (§ 6), elle vérifie dans cet intervalle la condition $(N^{+\infty})$. Par conséquent, d'après le th. 6 (§ 5), chaque fonction $F_n(x)$ est la somme d'une fonction absolument continue dans I et d'une fonction monotone non-croissante. La fonction $F(x)$ est donc sur chaque ensemble P_n la somme d'une fonction AC^* sur cet ensemble et d'une fonction monotone non-croissante.

2° Supposons, inversement, que l'intervalle I est la somme d'une suite d'ensembles fermés P_n tels que sur chacun d'eux $F(x)$ soit la somme d'une fonction AC^* et d'une fonction non-croissante. Désignons, comme précédemment, par $F_n(x)$ la fonction identique à $F(x)$ aux points de P_n et linéaire dans les intervalles contigu à P_n. Soit, d'autre part, $R^{+\infty}$, resp. $R_n^{+\infty}$ $(n=1,2,\ldots)$ l'ensemble de points où $F(x)$, resp. $F_n(x)$, possède la dérivée infinie positive. On a évidemment

$$R^{+\infty}\subset\sum_n R_n^{+\infty}. \tag{1}$$

Or, toute fonction $F_n(x)$ satisfaisant évidemment, d'après le th. 6 (§ 5), à la condition $(N^{+\infty})$, on a, pour chaque n,

$$|F(R_n^{+\infty})|=|F_n(R_n^{+\infty})|=0,$$

donc, en vertu de (1),

$$|F(R^{+\infty})|=0,$$

et la fonction $F(x)$ vérifie la condition $(N^{+\infty})$. Notre proposition est ainsi prouvée.

Il s'en suit immédiatement le suivant

Théorème 10. *La somme de deux fonctions continues VBG^* à propriété $(N^{+\infty})$ est aussi à propriété $(N^{+\infty})$*[29]).

Théorème 11. *$G(x)$ et $H(x)$ étant deux fonctions continues VBG^* dans un intervalle (a,b), $G(x)$ à propriété $(N^{-\infty})$ et $H(x)$ à propriété $(N^{+\infty})$, pour que la différence $G(x)-H(x)$ soit monotone et décroissante dans cet intervalle, il faut et il suffit qu'on ait presque partout*

$$G'(x)\geqslant H'(x). \tag{2}$$

Démonstration. Posons

$$T(x)=G(x)-H(x).$$

[28]) En général, il n'en est presque partout que la dérivée approximative.

[29]) Il est important de remarquer que la somme de deux fonctions VBG à propriété $(N^{+\infty})$ ne jouit plus, en général, de cette propriété. Même si l'on modifie, à la fois, la condition $(N^{+\infty})$ en y remplaçant la dérivée ordinaire par la dérivée approximative, le th. 10 reste en défaut pour les fonctions VBG.

Il est évident que la condition (2) est **nécessaire** pour que la fonction $T(x)$ soit non-décroissante. Supposons donc inversement que l'inégalité (2) est presque partout remplie, c.-à-d. que presque partout

$$T'(x) \geqslant 0.$$

La fonction $T(x)$, étant une fonction VBG^*, elle satisfait à la condition (T_2), et, d'autre part, d'après le théorème précédent elle jouit de la propriété $(N^{-\infty})$. Or, il s'ensuit immédiatemment du théorème 5 (§ 6) que toute fonction vérifiant les conditions (T_2) et $(N^{-\infty})$, à dérivée presque partout non-négative, est une fonction monotone non-décroissante. La fonction $T(x)$ est donc non-décroissante, ce qui prouve notre énoncé.

On peut maintenant compléter le théorème de MM. Looman-Alexandroff en y remplaçant les fonctions majorantes et minorantes par les fonctions VBG^* à propriétés $(N^{-\infty})$ et $(N^{+\infty})$ resp. Nous prouverons notamment le suivant

Théorème 12. *Pour qu'une fonction $f(x)$ soit intégrable $(\mathfrak{D}^*)$ dans un intervalle (a, b), il faut et il suffit qu'on puisse attacher à chaque nombre $\varepsilon > 0$ un couple des fonctions continues VBG^*, $G(x)$ à propriété $(N^{-\infty})$ et $H(x)$ à propriété $(N^{+\infty})$, de manière qu'on ait*

$$G(x) - H(x) \leqslant \varepsilon \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{3}$$

et que presque partout

$$G'(x) \geqslant f(x) \geqslant H'(x). \tag{4}$$

Démonstration. La condition est **nécessaire** comme il suit du théorème de M. Hake[30]), d'après lequel toute fonction intégrable $(\mathfrak{D}^*)$ est intégrable au sens de M. Perron, c.-à.-d. que, pour toute fonction $f(x)$ intégrable $(\mathfrak{D}^*)$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction majorante $G(x)$ et une fonction minorante $H(x)$ vérifiant les inégalités (3) et (4). Supposons donc que, inversement, les conditions de notre énoncé sont remplies. On peut former, par conséquent, deux suites de fonctions VBG^* continues, $G_n(x)$ à propriété $N^{-\infty}$ et $H_n(x)$ à propriété $N^{+\infty}$, de manière qu'on ait, pour tout n,

[30]) Hake, **9**; Alexandroff, **1**; Saks, **16**, p. 311.

$$G_n(a) = H_n(a) = 0, \quad G_n(x) - H_n(x) \leqslant \frac{1}{n} \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{5}$$

et que presque partout

$$G'_n(x) \geqslant f(x) \geqslant H'_n(x). \tag{6}$$

D'après le théorème précédent les différences $G_n(x) - H_m(x)$ sont, pour tous les indices n, m, non-décroissantes, donc en vertu de (5) les suites $\{G_n(x)\}$ et $\{H_n(x)\}$ convergent en tout point x de (a, b) vers une fonction continue $F(x)$. La différence $F(x) - H_n(x)$ étant évidemment non-décroissante et la fonction $H_n(x)$ étant, pour tout n, une fonction VBG^*, il en résulte que la fonction $F(x)$ est aussi VBG^*. Nous prouverons que, de plus, elle est absolument continue généralisée dans le sens restreint.

Soit, à cet effet, ε un nombre positif quelconque et $N > \frac{2}{\varepsilon}$. On peut, en vertu du théoréme 9, décomposer l'intervalle (a, b) en une suite d'ensembles $\{P_i\}$ tels que sur chacun d'eux $H_n(x)$ soit la somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction non-croissante, et $G_n(x)$ la somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction non-décroissante.

Soit maintenant i_0 une valeur quelconque de l'indice i.

On peut attacher à ε un nombre $\eta > 0$ tel que, pour chaque système d'intervalles $\{(a_p, b_p)\}$ n'empiétant pas et dont les extrémités appartiennent à P_{i_0}, l'inégalité

$$\sum_p (b_p - a_p) < \eta \tag{7}$$

entraîne

$$\sum_p [G_N(b_p) - G_N(a_p)] > -\frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\sum_p [H_N(b_p) - H_N(a_p)] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, les fonctions $G_N(x) - F(x)$, $F(x) - H_N(x)$ étant monotones non-décroissantes, il s'ensuit de (5), que pour chaque système d'intervalles $\{(a_p, b_p)\}$ n'empiétant pas et dont les extrémités sont agrégées a P_{i_0}, l'inégalité (7) implique

$$-\varepsilon < -\frac{1}{N} + \sum_p [H_N(b_p) - H_N(a_p)] < \sum_p [F(b_p) - F(a_p)] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_p [G_N(b_p) - G_N(a_p)] + \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

donc

$$\left| \sum_p [F(b_p) - F(a_p)] \right| < \varepsilon,$$

ce qui montre que la fonction $F(x)$ est absolument continue sur chaque ensemble P_{i_0} et, parsuite, absolument continue généralisée dans l'intervalle (a, b). $F(x)$ étant, à la fois, VBG^*, il s'en suit qu'elle est aussi absolument continue généralisée dans le sens restreint [31]).

Pour démontrer maintenant l'intégrabilité $(\mathfrak{D}^*)$ de $f(x)$, il suffit à prouver qu'on a presque partout

$$F'(x) = f(x). \tag{8}$$

Or, les fonctions $G_n(x) - F(x)$, $F(x) - H_n(x)$, $G_n(x) - H_n(x)$ étant non-décroissantes, on a, pour tout n, presque partout

$$G'_n(x) \geqslant F'(x) \geqslant H'_n(x),$$

donc, en vertu de (5) et (6),

$$\int_a^b |F'(x) - f(x)|\, dx \leqslant \int_a^b [G'_n(x) - H'_n(x)]\, dx \leqslant G_n(b) - H_n(b) \leqslant \frac{1}{n},$$

d'où

$$\int_a^b |F'(x) - f(x)|\, dx = 0,$$

ce qui revient à l'égalité (8) presque partout.

Notre théorème est ainsi démontré.

Bibliographie.

1. Alexandroff P. *Über die Äquivalenz des Perronschen und des Denjoynschen Integralbegriffes. Math. Zeitschr.*, t. 20, (1924).
2. Banach, S. *Sur les lignes rectifiables. Fund. Math.*, t. 8. (1926).
3. — *Sur une classe de fonctions continues. Fund. Math.*, t. 7. (1924), p. 225.
4. — *Sur les ensembles de points où la dérivée est infinie. Comptes Rendus*, t. 173, (1921), p. 457.

[31]) Voir, p. ex., Saks, **16**, p. 239.

5. Bary, N. *Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues. Math. Ann.*, t. 103, (1930). Première Partie, p. 184. Deuxième Partie, p. 598.
6. — *Sur les fonctions jouissant de la propriété (N). Comptes Rendus*, t. 189, (1929), p. 441.
7. Denjoy, A. *Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non-sommables. Ann. Éc. Norm. Sup.*, (S. 3), t. 33, (1916).
8. — *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions. Journ. des Math.*, (S. 7), t. 1, (1915).
9. Hake, H. *Über de la Vallée Poussin Ober- und Unterfunktionen. Math. Ann.*, t. 83, (1921).
10. Kamke, E. *Das Lebesguesche Integral.* Leipzig-Berlin. 1925.
11. Looman H. *Über die Perronsche Integraldefinition. Math. Ann.*, t. 93, (1924).
12. Lusin, N. *L'intégrale et série trigonométrique.* (Thèse, en russe). Moscou. 1915.
13. Saks, S. *La condition (N) et l'intégrale de MM. Denjoy-Perron. Fund. Math.*, t. 13, (1928).
14. — *Sur un théorème de M. Lusin. Fund. Math.*, t. 6, (1924).
15. — *Sur l'intégrale de M. Denjoy. Fund. Math.*, t. 15, (1930).
16. — *Zarys teorji całki. (Théorie de l'intégration* en polonais). Warszawa. 1930.
17. Vallée-Poussin (de la), Ch. J. *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classe de Baire.* Paris. 1916.
18. Vitali, G. *Sulle funzioni continue. Fund. Math.*, t. 8, (1926).