Sur la recherche d'une condition de planeité d'un arc simple de Jordan.

Par

Georges Bouligand (Poitiers).

1. Soient, dans l'espace euclidien à trois dimensions, les axes $0xyz$. Soit d'autre part le continu jordanien défini par les équations

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t).$$

Une condition pour sa planeité est la suivante, ou *condition A*:

Il existe trois constantes a, b, c *telles que la fonction*

$$\varphi(t) = a f(t) + b g(t) + c h(t)$$

ait, d'un côté déterminé, la droite par exemple, *ses nombres dérivés de signes contraires, lorsque chacun diffère de zéro.*

Cet énoncé est un corollaire immédiat de ce théorème

Si l'on sait que les deux nombres dérivés à droite d'une fonction $\varphi(t)$ *ne sont jamais simultanément différents de zéro et de même signe, la fonction est constante* [1]).

2. Cet énoncé faisant intervenir la représentation paramétrique, j'ai cherché une condition intrinsèque de planeité, applicable à un arc simple [2]). En chaque point M d'un tel arc AB, je prends le système des demi-tangentes à la portion MB postérieure à M [3]),

[1]) Lebesgue, *Leçons sur l'Intégration*, 2e édition, p. 77.

[2]) Sur une condition de planeité d'un arc simple. Bull. des Scienc. Math. Mai 1930.

[3]) C'est de ce système que je me suis servi, t. XV, 1930, p. 215—218, du présent recueil, pour démontrer l'existence des demi-tangentes à une courbe simple de Jordan, lorsque tout plan la coupe en un nombre fini de points. J'ai prouvé que dans les mêmes conditions, l'existence d'un demi-plan osculateur de chaque côté résulte du même principe, et de son côté M. Gaston Rabaté en a étendu aussi le champ d'applications. Voir pour toutes ces questions son mémoire développé qui paraîtra incessamment aux Annales de Toulouse, et en attendant, mon article *Sur quelques points de Méthodologie Géométrique* — Revue Générale des Sciences. 15 novembre 1930.

système auquel j'ai donné, en raison de son utilité fréquente, le nom de *contingent*: une demi-droite MT fait partie du contingent d'un ensemble ponctuel E en un point d'accumulation M de E, si tout cône circulaire droit de sommet M et d'axe MT enferme quelque point de E distinct de M (d'où résulte aussitôt que le contingent est fermé).

3. Dans mon article cité du *Bulletin des Sciences Mathématiques*, j'ai énoncé que l'arc simple AB est plan si l'on sait qu'*il existe un plan Π tel qu'en chaque point N de AB, le contingent de la portion MB postérieure à M englobe toujours une demi-droite parallèle à Π.* Mais ma démonstration est défectueuse et cette condition B, aussi bien que les conséquences C, D qui en sont données dans la section II de ma note aux *Comptes Rendus* (30 nov. 1930, t. 191, p. 822—823) doivent être considérées ***comme faisant l'objet d'autant de questions demeurant en suspens.*** La condition B n'est d'ailleurs pas réductible à la condition A: en prenant Π pour plan des xy, B signifie que zéro est l'une des valeurs limites possibles de $\dfrac{h(t+\varepsilon)-h(t)}{\sqrt{[f(t+\varepsilon)-f(t)]^2+[g(t+\varepsilon)-g(t)]^2}}$ pour $\varepsilon > 0$ tendant vers zéro; A exprime dans le cas envisagé la même propriété pour $\dfrac{h(t+\varepsilon)-h(t)}{\varepsilon}$.