Sur un crible universel.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Un ensemble plan C sera dit *crible normal* (plan) de M. Lusin, s'il est une somme d'une infinité dénombrable de segments parallèles à l'axe $0x$ et dont les extrémités ont des coordonnées rationnelles [1]).

Pareillement, nous dirons qu'un ensemble Γ situé dans l'espace est un crible normal à 3 dimensions, s'il est une somme d'une infinité dénombrable de rectangles, dont les côtés sont parallèles aux axes $0x$ et $0y$ et dont les sommets ont des coordonnées rationnelles.

M. Lusin m'a posé le problème de construire un *crible universel* à 3 dimensions, c'est-à-dire un crible normal à 3 dimensions, U, tel que, quel que soit le crible normal plan C, il existe un nombre réel c, tel que l'intersection de l'ensemble U par le plan $y=c$ est le crible C.

Le but de cette Note est la construction d'un tel crible U.

Soit

(1) $$r_1, r_2, r_3, \dots$$

la suite formée de tous les nombres rationnels (différents), et soit

(2) $$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$$

la suite formée de tous les intervalles aux extrémités rationnelles, l'intervalle vide y inclus.

Nous dirons qu'un rectangle R situé dans l'espace jouit de la

[1]) Cf. N. Lusin *Fund. Math.* t. X, p. 9 et p. 20; cf. aussi le livre de M. Lusin: *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris, Gauthier-Villars 1930, p. 178.

propriété P, si ses côtés sont parallèles aux axes $0x$ et $0y$ et s'il existe des nombres naturels

$$k,\ l,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ldots,\ n_{2^{k-1}(2l-1)},$$

tels que R est située sur le plan $z=r_k$ et que les projections de R sur les axes $0x$ et $0y$ sont respectivement les intervalles

$$\delta_{n_{2^{k-1}(2l-1)}} \tag{3}$$

et

$$\left(\frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\ldots+\frac{1|}{|n_{2^{k-1}(2l-1)}},\ \frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\ldots+\frac{1}{|n_{2^{k-1}(2l-1)}+1}\right). \tag{4}$$

Soit U l'ensemble-somme de tous les rectangles R jouissant de la propriété P. Je dis que U est le crible universel cherché.

Soit C un crible normal plan donné quelconque, situé sur le plan $X0Z$. k étant un indice donné, désignons par

$$\delta_{m_1^{(k)}},\ \delta_{m_2^{(k)}},\ \delta_{m_3^{(k)}},\ldots \tag{5}$$

tous les intervalles de la suite (2) appartenant à C et situés sur la droite $z=r_k$. (Nous pourrons toujours supposer la suite (5) infinie, en repetant, s'il y a besoin, une infinité de fois l'intervalle vide).

p étant un nombre naturel, il existe, comme on sait, deux nombres naturels bien déterminés par p, k et l, tels que

$$p=2^{k-1}(2l-1):$$

désignons-les resp. par $\varphi(p)$ et $\psi(p)$.

Posons

$$\nu_p=m_{\psi(p)}^{(\varphi(p))},\quad \text{pour}\quad p=1,2,3,\ldots \tag{6}$$

et

$$\eta=\frac{1|}{|\nu_1}+\frac{1|}{|\nu_2}+\frac{1|}{|\nu_3}+\ldots \tag{7}$$

Je dis que l'intersection de l'ensemble U par le plan $y=\eta$ est le crible C.

Il suffira évidemment de démontrer que, quel que soit le nombre naturel k donné, l'intersection de U par la droite $y=\eta$, $z=r_k$ est la somme des intervalles (5).

Soit l un indice donné et désignons par R le rectangle situé dans le plan $z=r_k$ aux côtés parallèles aux axes $0x$ et $0y$ et dont

les projections sur les axes $0x$ et $0y$ sont respectivement les intervalles

$$\delta_{\nu_{2^{k-1}(2l-1)}}$$

et

$$\left(\frac{1|}{|\nu_1}+\frac{1|}{|\nu_2}+\ldots+\frac{1|}{|\nu_{2^{k-1}(2l-1)}},\ \frac{1|}{|\nu_1}+\frac{1|}{|\nu_2}+\ldots+\frac{1}{|\nu_{2^{k-1}(2l-1)}+1}\right). \tag{8}$$

Le rectangle R jouit évidemment de la propriété P.

D'après (6) et d'après la définition des fonctions φ et ψ, nous avons:

$$\delta_{\nu_{2^{k-1}(2l-1)}}=\delta_{m_l^{(k)}}.$$

Or, d'après (7). le nombre η appartient à l'intervalle (8). On en déduit sans peine que la droite $y=\eta$, $z=r_k$ a en commun avec R, donc, à plus forte raison, avec U, l'intervalle $\delta_{m_l^{(k)}}$.

L'indice l pouvant être quelconque, nous avons démontré que la somme des intervalles (5) appartient à la fois à U est à la droite $y=\eta$, $z=r_k$.

Soit maintenant R un rectangle jouissant de la propriété P qui a des points communs avec la droite $y=\eta$, $z=r_k$ et dont les projections sur les axes $0x$ et $0y$ sont respectivement les intervalles (3) et (4). Le nombre η appartient donc à l'intervalle (4) et on en déduit tout de suite que

$$n_i=\nu_i,\quad \text{pour}\quad i\leqslant 2^{k-1}(2l-1);$$

donc, d'après (6):

$$\delta_{n_{2^{k-1}(2l-1)}}=\delta_{\nu_{2^{k-1}(2l-1)}}=\delta_{m_l^{(k)}},$$

d'où résulte que l'intersection de R par la droite $y=\eta$, $z=r_k$ est un des intervalles (5). R pouvant être un rectangle quelconque jouissant de la propriété P et ayant des points communs avec la droite $y=\eta$, $z=r_k$, nous avons ainsi démontré que le produit de U par la droite $y=\eta$, $z=r_k$ est contenu dans la somme des intervalles (5).

Il est ainsi établi que l'intersection de U par la droite $y=\eta$, $z=r_k$ est la somme des intervalles (5), et cela prouve, comme nous avons, que l'ensemble U est un crible universel, c. q. f. d.

Une Note ultérieure de M. Lusin contiendra une application importante du crible universel [1]).

[1]) ce volume, p. 4.