FUNDAMENTA
MATHEMATICAE
160 (1999)

Sur l'invariance de la dimension infinie forte par t-équivalence

par

Robert Cauty (Paris)

Abstract. Let X and Y be metric compacta such that there exists a continuous open surjection from $C_{\mathrm{p}}(Y)$ onto $C_{\mathrm{p}}(X)$. We prove that if there exists an integer k such that X^k is strongly infinite-dimensional, then there exists an integer p such that Y^p is strongly infinite-dimensional.

1. Introduction. Pour un espace complètement régulier X, nous notons $C_{\mathrm{p}}(X)$ l'espace de toutes les fonctions réelles continues sur X avec la topologie de la convergence simple. Un espace normal X est dit *fortement de dimension infinie* s'il existe une suite $\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^{\infty}$ de couples de fermés disjoints de X telle que si, pour tout i, L_i est un fermé séparant X entre A_i et B_i, alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i \neq \emptyset$. Nous nous intéressons ici au problème suivant : soient X et Y des espaces normaux tels que $C_{\mathrm{p}}(X)$ et $C_{\mathrm{p}}(Y)$ soient homéomorphes. Si X est fortement de dimension infinie, en est-il de même de Y? Nous prouverons le résultat suivant :

Théorème. *Soient X et Y des compacts métrisables tels qu'il existe une fonction continue ouverte de $C_{\mathrm{p}}(Y)$ sur $C_{\mathrm{p}}(X)$. S'il existe un entier k tel que X^k soit fortement de dimension infinie, alors il existe un entier p tel que Y^p soit fortement de dimension infinie.*

Ce théorème résout en particulier un problème d'Arkhangel'skiĭ ([1], question 3.12 et [2], question 3.15).

Zarelua [6] a prouvé que tout compact métrisable fortement de dimension infinie contient un compact dont tout fermé est soit de dimension zéro, soit fortement de dimension infinie. Sklyarenko [5] a montré que tout compact fortement de dimension infinie contient un compact qui ne peut être

1991 *Mathematics Subject Classification*: 54C35, 54F45.
Key words and phrases: function space, strongly infinite-dimensional.

séparé par aucun fermé de dimension finie. En combinant ces résultats, nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 1. *Tout compact métrisable fortement de dimension infinie contient un compact C vérifiant*

(i) *tout fermé de C est soit de dimension zéro, soit fortement de dimension infinie,*

(ii) *si F est un fermé de C tel que $C \setminus F$ ne soit pas connexe, alors F est fortement de dimension infinie.*

Remarquons que la condition (ii) entraîne que si U est un ouvert non vide de C, alors $\overline{U}$ est fortement de dimension infinie.

Nous notons $\exp_n Y$ l'ensemble des sous-ensembles non vides de Y contenant au plus n éléments; nous munissons $\exp_n Y$ de la topologie de Vietoris. Nous munissons l'ensemble des couples d'entiers > 0 d'un ordre partiel en posant $(n,m) \le (n',m')$ si $n \le n'$ et $m \le m'$.

2. Démonstration du théorème. Soient X, Y deux compacts métrisables et k un entier tel que X^k soit fortement de dimension infinie. Supposons qu'il existe une fonction continue ouverte φ de $C_{\rm p}(Y)$ sur $C_{\rm p}(X)$. Notant 0 la fonction identiquement nulle sur X ou Y, l'homogénéité de $C_{\rm p}(X)$ nous permet de supposer que $\varphi(0) = 0$. Pour $x = (x^1, \ldots, x^k) \in X^k$, posons

$$V(x) = \{f \in C_{\rm p}(X) \mid |f(x^j)| \le 1 \text{ pour } 1 \le j \le k\}.$$

Pour un sous-ensemble A de Y et $\varepsilon > 0$, posons

$$W(A,\varepsilon) = \{g \in C_{\rm p}(Y) \mid |g(y)| < \varepsilon \text{ pour tout } y \in A\}.$$

Lemme 2. *Soit $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite de points de X^k de limite x, et soit $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de $\exp_n Y$ de limite A. Si $\varphi(W(A_i,\varepsilon)) \subset V(x_i)$ pour tout i, alors $\varphi(W(A,\varepsilon)) \subset V(x)$.*

Démonstration. Soient $x = (x^1, \ldots, x^k)$ et $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^k)$. Si $g \in W(A,\varepsilon)$, alors l'ouvert $g^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ contient A, donc il existe i_0 tel que cet ouvert contienne A_i pour $i \ge i_0$. Pour $i \ge i_0$, g appartient à $W(A_i,\varepsilon)$, donc $|\varphi(g)(x_i^j)| \le 1$ pour $1 \le j \le k$. Puisque g est continue, $\varphi(g)(x^j) = \lim \varphi(g)(x_i^j)$, donc $|\varphi(g)(x^j)| \le 1$ pour $1 \le j \le k$, d'où $\varphi(W(A,\varepsilon)) \subset V(x)$.

Pour des entiers $n, m > 0$, nous notons $G(n,m)$ l'ensemble des points x de X^k pour lesquels il existe un sous-ensemble A de Y de cardinal $\le n$ tel que $\varphi(W(A,1/m)) \subset V(x)$. Alors $G(n,m)$ est fermé. En effet, soit $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite de points de $G(n,m)$ convergeant vers un point x. Pour tout i, prenons $A_i \in \exp_n Y$ tel que $\varphi(W(A_i,1/m)) \subset V(x_i)$. La compacité de $\exp_n Y$ nous permet de supposer que $\{A_i\}$ converge vers $A \in \exp_n Y$. D'après le lemme 2, nous avons $\varphi(W(A,1/m)) \subset V(x)$, donc x appartient à $G(n,m)$.

Soit C un sous-ensemble compact de X^k vérifiant les conditions du lemme 1. La continuité de φ entraîne que X^k est la réunion des $G(n,m)$. Puisque ces ensembles sont fermés, le théorème de Baire entraîne l'existence de couples (n,m) tels que l'intérieur relativement à C de $C \cap G(n,m)$ soit non vide. Prenant (n,m) minimal pour l'ordre $\leq$ dans l'ensemble de ces couples, nous pouvons alors trouver un sous-ensemble non vide U de C, ouvert dans C et vérifiant

$$\overline{U} \subset G(n,m) \setminus \bigcup \{G(n',m') \mid (n',m') < (n,m)\}. \tag{1}$$

Pour la suite de la démonstration, nous fixons un couple (n,m) et un ouvert non vide U de C vérifiant (1). Pour x dans $\overline{U}$, soit $\mathcal{B}(x)$ l'ensemble des sous-ensembles A de Y de cardinal n vérifiant $\varphi(W(A,1/m)) \subset V(x)$; d'après (1), $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$.

LEMME 3. *$\mathcal{B}(x)$ est fini pour tout $x \in \overline{U}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Si $\mathcal{B}(x)$ était infini, nous pourrions construire inductivement une suite d'éléments $A_i = \{y_i^1, \ldots, y_i^n\}$ de $\mathcal{B}(x)$ tels que $y_i^1 \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ pour $i > 1$. Passant au besoin à une sous-suite, nous pouvons supposer que, pour $1 \leq l \leq n$, $\{y_i^l\}$ converge vers un élément y^l de Y et que, ou bien $y_i^l = y^l$ pour tout i, ou bien $y_i^l \neq y_j^l$ pour $1 \leq i < j$.

Soit A' le sous-ensemble de A formé des points y^l tels que $y_i^l = y^l$ pour tout i, et soit $A'' = A \setminus A'$. Alors A'' contient y^1, donc A' a moins de n éléments. Nous allons montrer que

$$\varphi(W(A',1/m)) \subset V(x),$$

ce qui contredit (1) si $A' \neq \emptyset$ et contredit la surjectivité de φ si $A' = \emptyset$.

Soit $f \in W(A',1/m)$. Les ensembles

$$R(f,B,\varepsilon) = \{g \in C_{\mathrm{p}}(Y) \mid |g(y) - f(y)| < \varepsilon,\ \forall y \in B\},$$

où B est un sous-ensemble fini de Y et $\varepsilon > 0$, forment une base de voisinages de f. Soit E l'ensemble des $l \in \{1,\ldots,n\}$ tels que $y^l \in A''$. Puisque, pour $l \in E$, les y_i^l, $i \geq 1$, sont tous distincts, nous pouvons, étant donné un sous-ensemble fini B de Y, trouver un i tel que $y_i^l \notin B \cup A'$ pour tout $l \in E$. Nous pouvons trouver $g \in C_{\mathrm{p}}(Y)$ telle que $g(y) = f(y)$ si $y \in B \cup A'$ et $g(y_i^l) = 0$ pour tout $l \in E$. Alors $g \in R(f,B,\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et, puisque $A_i = A' \cup \{y_i^l \mid l \in E\}$, g appartient à $W(A_i,1/m)$. Puisque $A_i \in \mathcal{B}(x)$, $\varphi(g)$ appartient à $V(x)$. Ceci montre que f appartient à la fermeture de $\varphi^{-1}(V(x))$; comme $V(x)$ est fermé, $\varphi(f)$ appartient à $V(x)$, d'où l'inclusion $\varphi(W(A',1/m)) \subset V(x)$.

Pour $x \in \overline{U}$, soit $B(x)$ la réunion des éléments de $\mathcal{B}(x)$. Pour $p \geq 1$, soit H_p l'ensemble des $x \in \overline{U}$ tels que $B(x)$ contienne au plus p éléments. Alors $H_p = \emptyset$ si $p < n$ et, d'après le lemme 3, $\overline{U} = \bigcup_{p=1}^{\infty} H_p$. Fixons une distance

d sur Y. Pour $p, q \geq 1$, soit $K(p,q)$ l'ensemble des $x \in \overline{U}$ tels que le cardinal de $B(x)$ soit égal à p et que $d(z,z') \geq 1/q$ si z, z' sont deux points distincts de $B(x)$. Evidemment, $\bigcup_{q=1}^{\infty} K(p,q) = H_p \setminus H_{p-1}$.

Lemme 4. (i) *Pour tout* $p \geq 1$, $\overline{U} \setminus H_p$ *est* σ*-compact.*

(ii) $K(p,q)$ *est fermé dans* H_p *et la restriction de* B *à* $K(p,q)$ *est une fonction continue de* $K(p,q)$ *dans* $\exp_p Y \setminus \exp_{p-1} Y$.

Démonstration. Pour $p, q \geq 1$, soit $L(p,q)$ l'ensemble des $x \in \overline{U}$ tels que $B(x)$ contienne un sous-ensemble Z de cardinal p tel que $d(z,z') \geq 1/q$ si z, z' sont deux points distincts de Z. Alors $\overline{U} \setminus H_{p-1} = \bigcup_{q=1}^{\infty} L(p,q)$ et $L(p,q) \cap H_p = K(p,q)$, donc, pour prouver (i) et la première partie de (ii), il suffit de montrer que $L(p,q)$ est fermé dans $\overline{U}$.

Soit $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite de points de $L(p,q)$ convergeant vers un point x de $\overline{U}$. Pour tout i, soit $Z_i = \{z_i^1, \ldots, z_i^p\}$ un sous-ensemble de $B(x_i)$ de cardinal p tel que $d(z_i^l, z_i^{l'}) \geq 1/q$ si $l \neq l'$. Nous pouvons supposer que, pour $1 \leq l \leq p$, la suite $\{z_i^l\}$ converge vers un point z^l. Si $l \neq l'$, alors $d(z^l, z^{l'}) = \lim d(z_i^l, z_i^{l'}) \geq 1/q$; en particulier, $Z = \{z^1, \ldots, z^p\}$ contient p éléments. Pour $i \geq 1$ et $1 \leq l \leq p$, il y a un élément A_i^l de $\mathcal{B}(x_i)$ qui contient z_i^l. Nous pouvons supposer que $\{A_i^l\}$ converge vers un élément A^l de $\exp_n Y$. D'après le lemme 2, $\varphi(W(A^l, 1/m)) \subset V(x)$. Puisque $x \in \overline{U}$, (1) garantit que A^l a exactement n éléments, donc appartient à $\mathcal{B}(x)$; par suite, $z^l \in A^l \subset B(x)$, d'où $Z \subset B(x)$, ce qui montre que $x \in L(p,q)$.

Si $x \in H_p$, alors $Z = B(x)$ puisque Z a p éléments et $B(x)$ au plus p, d'où la deuxième partie de (ii).

Puisque C vérifie les conditions du lemme 1, $\overline{U}$ est fortement de dimension infinie. Partant de $C_1 = \overline{U}$, nous construisons maintenant, aussi longtemps que cela est possible, un compact fortement de dimension infinie C_p, de façon que $C_p \subset C_{p-1} \setminus H_{p-1}$ pour $p > 1$. Cette construction ne peut se poursuivre indéfiniment, car sinon $\bigcap_{p=1}^{\infty} C_p$ serait un sous-ensemble non vide de $\overline{U} \setminus \bigcup_{p=1}^{\infty} H_p = \emptyset$. Il existe donc un entier p et un compact fortement de dimension infinie C_p, contenu dans $\overline{U} \setminus H_{p-1}$ et tel que $C_p \setminus H_p$ ne contienne aucun compact fortement de dimension infinie. Quitte à diminuer C_p, nous pouvons supposer qu'il vérifie les conditions du lemme 1. Alors, tout compact contenu dans $C_p \setminus H_p$ est de dimension zéro. D'après le lemme 4(i), $C_p \setminus H_p$ est réunion dénombrable de compacts de dimension zéro, donc est de dimension zéro. Nous pouvons donc trouver des sous-ensembles non vides U_1 et U_2 de C_p, disjoints et ouverts dans C_p tels que $C_p \setminus H_p \subset U_1 \cup U_2$. Alors, $C_p \setminus (U_1 \cup U_2)$ est un compact contenu dans $H_p \setminus H_{p-1}$ et, d'après (ii) du lemme 1, il est fortement de dimension infinie. L'ensemble $H_p \setminus H_{p-1}$ contient donc un compact fortement de dimension infinie S vérifiant les conditions du lemme 1.

Nous avons $S = \bigcup_{q=1}^{\infty}(S \cap K(p,q))$. D'après le lemme 4(ii), $S \cap K(p,q)$ est fermé dans S. Le théorème de Baire entraîne l'existence d'un q tel que l'intérieur de $S \cap K(p,q)$ relativement à S soit non vide. Soit T un compact contenu dans $S \cap K(p,q)$ et dont l'intérieur relativement à S est non vide. Puisque S vérifie la condition (ii) du lemme 1, T est fortement de dimension infinie. D'après le lemme 4(ii), $B|T$ est une fonction continue de T dans $\exp_p Y \setminus \exp_{p-1} Y$.

Tout point de $\exp_p Y \setminus \exp_{p-1} Y$ a un voisinage homéomorphe à un ouvert de Y^p. Si Y^p n'était pas fortement de dimension infinie, nous pourrions trouver $Z \in \exp_p Y$ et un sous-ensemble infini D de T tels que $B(x) = Z$ pour tout $x \in D$ (voir [4] ou [5], problème 6.3.C). Puisque Z ne contient qu'un nombre fini de sous-ensembles à n éléments, il existerait un $A \subset Z$ et un sous-ensemble infini D' de D tels que $A \in \mathcal{B}(x)$ pour tout $x \in D'$, et nous aurions

$$\varphi(W(A, 1/m)) \subset \bigcap_{x \in D'} V(x).$$

Mais, D' étant infini, le terme de droite de cette inclusion a un intérieur vide, tandis que le terme de gauche est un ouvert non vide, puisque $W(A, 1/m)$ est un voisinage ouvert de 0 et φ ouverte. Cette contradiction achève la démonstration.

Remarque. En modifiant légèrement les arguments précédents, on peut démontrer le résultat un peu plus fort suivant : Soient X et Y des espaces métrisables tels qu'il existe une application continue ouverte de $C_{\mathrm{p}}(Y)$ sur $C_{\mathrm{p}}(X)$. S'il existe un entier k tel que X^k contienne un compact fortement de dimension infinie, alors il existe un entier p tel que Y^p contienne un compact fortement de dimension infinie. Il suffit pour cela d'utiliser le fait suivant, qui renforce le lemme 2 :

Soit $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite de points de X^k de limite x et, pour $i \geq 1$, soit $A_i = \{y_i^1, \ldots, y_i^n\}$ tel que $\varphi(W(A_i, \varepsilon)) \subset V(x_i)$. Supposons que, pour $1 \leq j \leq n$, ou bien $\{y_i^j\}_{i=1}^{\infty}$ converge, ou bien cette suite ne contient aucune sous-suite convergente (il y a toujours une sous-suite de $\{A_i\}$ vérifiant cette condition). Alors, si A est l'ensemble des points de Y qui sont limite de l'une des suites $\{y_i^j\}_{i=1}^{\infty}$, $1 \leq j \leq n$, on a $\varphi(W(A, \varepsilon)) \subset V(x)$.

Bibliographie

[1] A. V. Arkhangel'skiĭ, *Quelques résultats récents et problèmes ouverts en topologie générale*, Uspekhi Mat. Nauk 52 (1997), no. 5, 45–70 (en russe).

[2] —, *Embeddings in C_p-spaces*, Topology Appl. 85 (1998), 9–33.

[3] R. Engelking, *Theory of Dimension, Finite and Infinite*, Heldermann, Lemgo, 1995.

[4] R. Pol, *On light mappings without perfect fibers on compacta*, Tsukuba J. Math. 20 (1996), 11–19.

[5] E. G. Sklyarenko, *Sur les propriétés dimensionnelles des espaces de dimension infinie*, Izv. Akad. Nauk SSSR 23 (1959), 197–212 (en russe).

[6] A. V. Zarelua, *Construction de compacts fortement de dimension infini à l'aide des anneaux de fonctions continues*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 214 (1974), 264–267 (en russe).

Université Paris VI
UFR 920
Boîte Courrier 172
4, pl. Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: cauty@ccr.jussieu.fr

Received 5 January 1999