car K' n'est pas un ensemble séparant M entre Y et x. Mais comme C_p n'appartient pas a R_m, il résulte de la méthode de la définition des ensembles $[R_l]$ que $\delta(R_{p-1}+C_p)\geqslant\varepsilon$. Il existe aussi deux points p_1 et p_2 de $R_{p-1}+C_p$ pour lesquels $\varrho(p_1, p_2)\geqslant\varepsilon$. Ni p_1 ni p_2 ne peut appartenir à R_{p-1}; car s'il en était ainsi, il résulterait de (ii) et (iii) que $p_1+p_2\subset R_{p-1}+E_p\subset R_m+E_p\subset K_x$ ce qui contredit l'inégalité $\delta(K_x)<\varepsilon$. Par conséquent, $p_1+p_2\subset C_p$. Mais alors, selon (iv), il vient $\delta(E_p)\geqslant\varepsilon$, contrairement à $E_p\subset K_x$ et $\delta(K_x)<\varepsilon$. Ainsi, la supposition que K n'est pas un ensemble irréductible ε-séparant le point x implique une contradiction, et notre proposition se trouve démontrée.

Les théorèmes A) et B) donnent le théorème suivant, qui présente une condition qui caractérise les continus localement connexes:

(C). *Pour que le continu C soit localement connexe il faut et il suffit que pour tout point $x\subset C$ et tout $\varepsilon>0$ il existe une ε-séparation irréductible.*

Bien que la dimension du continu C n'intervienne dans aucun des trois théorèmes précédents, il n'est pas difficile à voir qu'ils donnent les solutions des problèmes de Urysohn. Soit, en effet, C un continu localement connexe et de dimension $\leqslant n$ [7]. Soit x un point de C et ε un nombre quelconque >0. D'après B), il existe un nombre $\delta_{\varepsilon x}>0$ tel que tout ensemble $\delta_{\varepsilon x}$-séparant le point x contient un ensemble ε-séparant irréductible. Il existe un ensemble K_0, de dimension $\leqslant(n-1)$, $\delta_{\varepsilon x}$-séparant le point x. Donc K_0 contient un ensemble K ε-séparant irréductible. L'ensemble K est évidemment de dimension $\leqslant(n-1)$. D'autre part, s'il existe, pour tout point x d'un continu C et tout $\varepsilon>0$, une ε-séparation irréductible effectuée par un ensemble quelconque, il résulte de A) ou de C) que le continu C est localement connexe. Le premier problème est donc résolu.

Envisageons, à présent un continu C qui possède les propriétés α) et β) du continu dans le deuxième problème. Il résulte de A) ou de C) que C est localement connexe. Le continu C étant irréductible entre deux points, il s'ensuit qu'il est un arc simple.

[7]) Il me semble qu'on est obligé d'interpréter „dimension n" dans le problème 1) comme „dimension n au plus", car pour aucun point d'un continu C borné quelconque il n'existe une ε-séparation irréductible effectuée par un ensemble de dimension $>(-1)$ si $\varepsilon>\delta(C)$.

Vienne, février, 1930.

Sur l'extension des fonctions de Baire définies sur les ensembles linéaires quelconques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

1. Les fonctions de classe $\leqslant\alpha$ sur un ensemble donné quelconque E sont définies par l'induction transfinie. Les fonctions de classe 0 sur E sont des fonctions définies sur E et continues sur E, et les fonctions de classe $\leqslant\alpha$ sur E sont des fonctions qui sont, sur E, limites des fonctions des classes $<\alpha$ sur E.

M. G. v. Alexits a démontré [1]) que si E est un ensemble (linéaire) [2]) quelconque et $f(x)$ — une fonction (finie) de classe $\leqslant\alpha$ sur E, il existe une fonction (finie) d'une variable réelle, de classe $\leqslant\alpha+2$, qui coïncide avec $f(x)$ sur E.

Nous démontrerons dans cet ordre d'idées un théorème plus précis que voici:

Théorème. *Si E est un ensemble (linéaire) quelconque et $f(x)$ — une fonction (finie) de classe $\leqslant\alpha$ sur E, il existe une fonction (finie) d'une variable réelle, de classe $\leqslant\alpha+1$, qui coïncide avec $f(x)$ sur E.*

Notre démonstration sera basée sur une idée différente de celle de M. v. Alexits.

Soit $f(x)$ une fonction (finie) de classe $\leqslant\alpha$ sur E. Posons, pour $x\,\epsilon\, E$:

$$(1)\qquad \begin{cases} g(x)=f(x) & \text{et}\quad h(x)=0, \qquad \text{si}\quad f(x)\geqslant 0,\\ g(x)=0 & \text{et}\quad h(x)=-f(x), \quad \text{si}\quad f(x)<0: \end{cases}$$

[1]) *Fund. Math.* t. XV, p. 56 (Satz IV).

[2]) Ce n'est que pour fixer les idées que nous considérerons les ensembles *linéaires*.

nous aurons évidemment:

$$f(x) = g(x) - h(x), \quad \text{pour} \quad x \in E,$$

et il suffira de démontrer qu'il existe des fonctions (finies) $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ d'une variable réelle, des classes $\leqslant \alpha + 1$, qui coïncident sur E resp. avec $g(x)$ et $h(x)$. En effet, leur différence $\varphi(x) - \psi(x)$ sera évidemment une fonction (finie) d'une variable réelle de classe $\leqslant \alpha + 1$ qui coïncide sur E avec $f(x)$.

On dit qu'un ensemble H est un P^α, resp. un Q^α [1]) relativement à l'ensemble E, s'il est un produit de l'ensemble E par un ensemble P^α, resp. Q^α. M. Hahn a démontré un théorème qui peut être exprimé comme il suit [2]):

Lemme. *Pour qu'une fonction $f(x)$ soit de classe $\leqslant \alpha$ sur un ensemble E, il faut et il suffit que les ensembles* $\mathrm{E}[x \in E, f(x) > a]$ *et* $\mathrm{E}[x \in E, f(x) < a]$ *soient des $Q^{\alpha+1}$ relativement à E, pour tout nombre a réel.*

Soit maintenant $f(x)$ une fonction de classe $\leqslant \alpha$ sur E et définissons les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ par les formules (1). Nous aurons évidemment

(2) $$\mathrm{E}[x \in E, g(x) < a] = \mathrm{E}[x \in E, f(x) < a], \quad \text{pour} \quad a > 0$$

et

(2ª) $$\mathrm{E}[x \in E, g(x) < 0] = 0.$$

Or, d'après notre lemme, les ensembles $\mathrm{E}[x \in E, f(x) < a]$ sont des ensembles $Q^{\alpha+1}$ relativement à E: on a donc, d'après (2) et (2ª):

(3) $$\mathrm{E}\left[x \in E, g(x) < \frac{k}{2^n}\right] = E\, G_n^k, \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

où G_n^k sont des ensembles $Q^{\alpha+1}$.

Posons

(4) $$S_n^0 = 0, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

(5) $$S_1^k = G_1^1 + G_1^2 + \ldots + G_1^k, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

[1]) Quant à la définition des ensembles P^α et Q^α de M. Hausdorff, voir *Math. Zeitschrift* 5 (1919), p. 307. Cf. aussi *Fund. Math.* t. X, p. 321.

[2]) *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 349, Satz I (Les ensembles $\mathfrak{D}_\alpha$ de M. Hahn coïncident avec les ensembles Q^α.

et définissons pour $n > 1$ les ensembles S_n^k par les formules récurrentes:

(6) $$S_n^{2k-1} = G_n^{2k-1} S_{n-1}^k + S_{n-1}^{k-1}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

et

(7) $$S_n^{2k} = S_{n-1}^k.$$

Je dis que

(8) $$S_n^k \subset S_n^{k+1}, \quad \text{pour } k \text{ et } n \text{ naturels.}$$

C'est évident, d'après (5), pour $n = 1$ et k naturel. Supposons maintenant que la formule (8) est vraie pour le nombre naturel n et $k = 1, 2, 3, \ldots$ D'après (6), (7) et (8) nous trouvons (pour $k = 1, 2, 3, \ldots$)

$$S_{n+1}^{2k-1} = G_{n+1}^{2k-1} S_n^k + S_n^{k-1} \subset S_n^k + S_n^{k-1} = S_n^k = S_{n+1}^{2k}$$

et

$$S_{n+1}^{2k} = S_n^k \subset G_{n+1}^{2k+1} S_n^{k+1} + S_n^k = S_{n+1}^{2k+1},$$

donc

$$S_{n+1}^k \subset S_{n+1}^{k+1}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui prouve que la formule (8) reste vraie (pour $k = 1, 2, 3, \ldots$) lorsqu'on remplace n par $n+1$. La formule (8) est ainsi démontré par l'induction.

Or, je dis que

(9) $$E\, S_n^k = E\, G_n^k, \quad \text{pour } n \text{ et } k \text{ naturels.}$$

En effet, d'après (3) on a, pour n et k naturels:

(10) $$E\, G_{n+1}^{2k} = E\, G_n^k$$

(11) $$E\, G_n^{k-1} \subset E\, G_{n+1}^{2k-1} \subset E\, G_n^k,$$

ce qui donne

$$E\, G_1^1 + E\, G_1^2 + \ldots + E\, G_1^k = E\, G_1^k,$$

donc, d'après (5):

$$E\, S_1^k = E\, G_1^k, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui prouve que la formule (9) est vraie pour $n=1$ et $k=1, 2, 3, \ldots$

Supposons maintenant que la formule (9) est vraie pour le nombre naturel n et $k=1, 2, 3, \dots$ D'après (7), (9) et (10) nous trouvons (pour $k=1, 2, 3, \dots$):

$$ES_{n+1}^{2k} = ES_n^k = EG_n^k = EG_{n+1}^{2k} \tag{12}$$

et, d'après (6), (9) et (11)

$$ES_{n+1}^{2k-1} = EG_{n+1}^{2k-1}\, S_n^k + ES_n^{k-1} = EG_{n+1}^{2k-1}\, G_n^k + EG_n^{k-1} = EG_{n+1}^{2k-1}. \tag{13}$$

Les formules (12) et (13) prouvent que

$$ES_{n+1}^k = EG_{n+1}^k, \quad \text{pour} \quad k=1, 2, 3, \dots,$$

c'est-à-dire que la formule (9) est vraie (pour $k=1, 2, 3, \dots$), lorsqu'on y remplace n par $n+1$. La formule (9) est ainsi démontrée par l'induction.

De (9) résulte que

$$E(S_n^{k+1} - S_n^k) = E(G_n^{k+1} - G_n^k), \quad \text{pour } n \text{ et } k \text{ naturels}. \tag{14}$$

Soit maintennnt n un nombre naturel donné.

Posons

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n} \quad \text{pour} \quad x \in S_n^{k+1} - S_n^k \quad (k=0, 1, 2, \dots) \tag{15}$$

et

$$\varphi_n(x) = 0, \quad \text{pour} \quad x \text{ non} \in \sum_{k=1}^{\infty} S_n^k. \tag{16}$$

D'après (4) et (8) on voit sans peine que la fonction $\varphi_n(x)$ est ainsi définie pour tous les x réels.

Les ensembles S_n^k étant des $Q^{\alpha+1}$, les ensembles $S_n^{k+1} - S_n^k$ et $C\sum_{k=1}^{\infty} S_n^k$ sont des $Q^{\alpha+2}$, et les formules (15) et (16) prouvent (d'après notre lemme, appliqué à l'ensemble de tous les nombres réels) que $\varphi_n(x)$ est une fonction (d'une variable réelle) de classe $\leqslant \alpha+1$.

Je dis que

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad \text{pour } x \text{ réels}. \tag{17}$$

En effet, si, pour un entier $k \geqslant 0$:

$$x \in S_n^{k+1} - S_n^k, \tag{18}$$

on a, d'après (15):

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}. \tag{19}$$

Or, si $k=2l$, on a. d'après (6) et (8):

$$S_n^{2l+1} \subset S_{n-1}^{l+1} + S_{n-1}^l = S_{n-1}^{l+1}$$

et, d'après (7):

$$S_n^{2l} = S_{n-1}^l,$$

donc

$$S_n^{2l+1} - S_n^{2l} \subset S_{n-1}^{l+1} - S_{n-1}^l,$$

ce qui donne, d'après (18) et $k=2l$:

$$x \in S_{n-1}^{l+1} - S_{n-1}^l,$$

donc, d'après (15):

$$\varphi_n(x) = \frac{l}{2^{n-1}},$$

ce qui donne, d'après (19) et $k=2l$:

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x).$$

Or, si $k=2l-1$, on a, d'après (7) et (6):

$$S_n^{2l} = S_{n-1}^l, \quad \text{et} \quad S_n^{2l-1} \supset S_{n-1}^{l-1},$$

d'où

$$S_n^{2l} - S_n^{2l-1} \subset S_{n-1}^l - S_{n-1}^{l-1},$$

donc, d'après (18) et $k=2l-1$:

$$x \in S_{n-1}^l - S_{n-1}^{l-1},$$

ce qui donne, d'après (15):

$$\varphi_{n-1}(x) = \frac{l-1}{2^{n-1}},$$

donc, d'après (19) et $k=2l-1$:

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = \frac{1}{2^n}.$$

La formule (18) entraîne donc toujours la formule (17). Or, soit

$$x \text{ non} \in \sum_{k=1}^{\infty} S_n^k; \tag{20}$$

d'après (16) on a donc

(21) $$\varphi_n(x)=0.$$

De (6), (7) et (8) résulte tout de suite que

$$S_{n-1}^k \subset S_n^{2k+1}, \quad \text{pour} \quad k=1,2,3,\ldots,$$

ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_{n-1}^k \subset \sum_{k=1}^{\infty} S_n^k$$

et, d'après (20):

$$x \text{ non } \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} S_{n-1}^k,$$

d'où, d'après (16):

$$\varphi_{n-1}(x)=0$$

et la formule (21) donne:

$$\varphi_n(x)=\varphi_{n-1}(x).$$

La formule (17) est ainsi établie pour tous les x réels.

De (17) résulte que la suite infinie des fonctions $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ converge uniformément (dans l'ensemble de tous les nombres réels). Les fonctions $\varphi_n(x)$ étant des classes $\leqslant \alpha+1$ (pour $n=1,2,3,\ldots$), on en conclut d'après un théorème connu que

(22) $$\varphi(x)=\lim_{n=\infty}\varphi_n(x)$$

est une fonction (d'une variable réelle) de classe $\leqslant \alpha+1$.

Or, je dis que

(23) $$\varphi(x)=g(x) \quad \text{pour} \quad x \,\epsilon\, E.$$

En effet, soit x un nombre de E et n — un nombre naturel donné. D'après $g(x)\geqslant 0$ il existe un entier $k\geqslant 0$, tel que

(24) $$\frac{k}{2^n}\leqslant g(x)<\frac{k+1}{2^n},$$

ce qui donne, d'après (3):

$$x \,\epsilon\, E\, G_n^{k+1} \quad \text{et} \quad x \text{ non } E\, G_n^k,$$

donc

$$x \,\epsilon\, E\,(G_n^{k+1}-G_n^k),$$

d'où, d'après (14):

$$x \,\epsilon\, E\,(S_n^{k+1}-S_n^k).$$

donc, d'après (15):

(25) $$\varphi_n(x)=\frac{k}{2^n}.$$

Les formules (24) et (25) donnent:

$$0\leqslant g(x)-\varphi_n(x)\leqslant\frac{1}{2^n},$$

donc, en limite pour $n=\infty$, d'après (22), on trouve la formule (23), c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré qu'il existe une fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle, de classe $\leqslant \alpha+1$, qui coïncide avec $g(x)$ sur E. Pareillement on démontre qu'il existe une fonction $\psi(x)$ d'une variable réelle de classe $\leqslant \alpha+1$ qui coïncide avec $h(x)$ sur E.

Notre théorème est ainsi démontré.

2. De notre lemme résulte tout de suite la proposition suivante [1]):

Pour que $f(x)$ soit une fonction de Baire sur l'ensemble E, il faut et il suffit que les ensemble $\mathrm{E}[x \,\epsilon\, E, f(x)>a]$ et $\mathrm{E}[x \,\epsilon\, E, f(x)<a]$ soient mesurables (B) relativement à E, pour tout nombre réel a.

Dans le cas où E est l'ensemble de tous les nombres réels, il en résulte tout de suite (moyennant le théorème connu de Souslin) que

Pour qu'une fonction d'une variable réelle, $f(x)$, soit une fonction de Baire, il faut et il suffit que les ensembles $\mathrm{E}[f(x)>a]$ et $\mathrm{E}[f(x)<a]$ soient analytiques, pour tout nombre réel a.

Or, la question se pose si une proposition analogue a lieu pour les fonctions définies sur un ensemble (linéaire) E quelconque. Nous prouverons que ce n'est pas le cas.

En effet, M. Lusin a démontré [2]) qu'il existe deux ensembles (CA) (complémentaires analytiques) linéaires M et N disjoints qui ne sont pas réparables (B).

Posons: $E=M+N$ et $f(x)=1$ pour $x \,\epsilon\, M$ et $f(x)=0$ pour $x \,\epsilon\, N$.

L'ensemble $\mathrm{E}[x \,\epsilon\, E, f(x)>a]$ est évidemment égal à 0 pour $a\geqslant 1$, à $M=E\cdot CN$ pour $0\leqslant a<1$, et à E pour $a<0$, et l'en-

[1]) Cf. Hahn, l. c., p. 351, Satz IV.

[2]) *C. R.* t. 189, p. 391 et 423.

semble $\mathrm{E}[x \epsilon E, f(x) < a]$ est égal à 0 pour $a \leqslant 0$, à $N = E \cdot CM$ pour $0 < a \leqslant 1$, et à E pour $a > 1$. Les esembles M et N étant des (CA), CM et CN sont des ensembles (A), et parsuite les ensembles

$$\mathrm{E}[x \epsilon E, f(x) > a] \quad \text{et} \quad \mathrm{E}[x \epsilon E, f(x) < a]$$

sont analytiques relativement à l'ensemble E, quel que soit le nombre réel a.

Or, $f(x)$ n'est pas une fonction de Baire relativement à E, puisque dans ce cas les ensembles

$$M = \mathrm{E}[x \epsilon E, f(x) > 0] \quad \text{et} \quad N = \mathrm{E}[x \epsilon E, f(x) < 1]$$

seraient mesurables (B) relativement à E, donc, comme disjoints, séparables (B), contrairement à leur définition.

3. E étant un ensemble linéaire donné, désignons par $Q(E)$ l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \epsilon E$.

$f(x)$ étant une fonction définie dans l'ensemble (linéaire) E, désignons par $J(f, E)$ l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \epsilon E$ et $y = f(x)$.

Dans le cas particulier, où E est l'ensemble de tous les nombres réels, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit une fonction de Baire est que l'ensemble $J(f, E)$ soit mesurable (B) [1]. Or, la question se pose: E étant un ensemble linéaire donné quelconque, suffit-il, pour que la fonction $f(x)$ définie sur E soit une fonctions de Baire relativement à E, que l'ensemble $J(f, E)$ soit mesurable (B) relativement à $Q(E)$? [2]. Nous prouverons que la réponse y est négative.

M. Lusin a récemment démontré qu'il existe dans l'espace à 3 dimensions un ensemble H mesurable (B), dont l'ensemble d'unicité H_1 n'est situé sur aucune surface uniforme mesurable (B) [3]. Or, comme on sait, il existe deux fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ d'une variable réelle t, de classe 1, telles que les formules

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

[1]) Voir: *Fund. Math.* t. II, p. 78, Th. III.

[2]) La nécessité de cette condition résulte sans peine de notre théorème du n° 1.

[3]) *C. R.*, t. 189, p. 423. L'ensemble d'unicité H_1 de H est formé de tous les points p de H, tels que la parallèle à l'axe $0Z$ menée par p ne coupe H en aucun point distincts de p.

établissent une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les nombres réels t et l'ensemble de tous les points (x, y) du plan.

Désignons par Γ l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $(\varphi(x), \psi(x), y) \epsilon H$. Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions de Baire, on voit sans peine que Γ sera un ensemble plan mesurable (B) et que l'ensemble d'unicité Γ_1 de Γ ne sera situé sur aucune courbe uniforme mesurable (B).

Soit maintenant E la projection de Γ_1 sur l'axe $0X$, et définissons sur E la fonction $f(x)$, en désignant pour $x \epsilon E$ par $f(x)$ l'ordonnée du point (unique) de Γ_1 dont l'abscisse est x. On voit sans peine que $J(f, E) = \Gamma_1 = \Gamma \cdot Q(E)$, donc que $J(f, E)$ est mesurable (B) relativement à $Q(E)$. Or, il résulte tout de suite de la proprieté de Γ_1 et de notre théorème de n° 1 que $f(x)$ n'est pas une fonction de Baire relativement à E.