On démontre que les sommes H_1 et H_2 de ces deux séries sont des *complémentaires analytiques*. Ceci achève le démonstration des deux principes.

Ces démonstrations transfinis étant obtenus, il est facile, dans l'étape ultérieure et secondaire du travail, à supprimer toutes les traces du transfini et, par suite, à donner une démonstration rigoureuse du deuxième principe où le transfini n'intervient pas explicitement. C'est cette démonstration qui sera publiée dans un autre article de ce Journal.

Nous compléterons ces réflexions par la remarque suivante. Nous avons dit que pour chaque élément E de classe α donné à l'avance il existe un élément $\mathcal{E}$ de classe α voisin de E sauf le cas où CE est dénombrable. La proposition duale est une proposition d'impossibilité, puisque ceci suppose que nous pouvons indiquer un point n'appartenant pas à l'ensemble analytique E donné.

Or, il serait fort intéressant de reconnaître la nature du problème dual du problème précédemment posé et relatif aux complémentaires d'éléments de classe α.

Ce problème dual:

étant donné un complémentaire analytique E, trouver un autre complémentaire analytique $\mathcal{E}$ n'ayant aucun point commun avec E et non séparable B de E peut avoir, dans le domaine de la Logique abstraite, une solution bien déterminée, puisque nous avons ici *deux* êtres négatifs, E et $\mathcal{E}$, dont les relations peuvent être bien déterminées, dans le domaine de la Logique abstraite.

Sur les ε-séparations irréductibles.

Par

G. T. Whyburn[1]) (Baltimore).

Dans son „Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes. Deuxième Partie“ [2]), que je viens de voir pour la première fois, Urysohn a posé les problèmes suivants:

1) *Quels sont les continus C de dimension n qui admettent, pour tout point $x \subset C$ et tout $\varepsilon > 0$, une ε-séparation irréductible* [3]) *effectuée par un ensemble de dimension $n-1$?*

2) *En particulier, existe-il des lignes Cantoriennes C, autres que les arcs simples ab, satisfaisant à l'ensemble des deux conditions suivantes:*

α) C est un continu irréductible ab;

β) quels que soit $x \subset C$ et $\varepsilon > 0$, il existe une ε-séparation irréductible du point x effectuée par un ensemble B de dimension 0?

Dans cette note je vais prouver que la réponse à la première question est: „*les continus localement connexes*“, et à la deuxième elle est *negative*.

J'aurai besoin des deux théorèmes suivants qu'on trouve dans mon article „Concerning Irreducible Cuttings of Continua“ [4]).

[1]) Fellow of the John Simon Guggenheim Memorial Foundation.

[2]) Verhand. der Akad. te Amsterdam, XIII. n°. 4, voir pp. 147, 148.

[3]) Nous disons, avec Urysohn, qu'un sous-ensemble B d'un continu C est un ensemble ε-séparant le point x, ou que l'ensemble B effectue une ε-séparation du point x dans C, si $C = A + B + D$, où les ensembles A et D sont séparés, $A \supset x$, et $\delta(A+B) < \varepsilon$. L'ensemble B est dit ensemble ε-séparant irréductible, si aucun vrai sous-ensemble de B n'est un ensemble ε-séparant le point x.

[4]) Ce journal, t. 13, pp. 42—57; voir théorèmes 2 et 10 respectivement. I) est un peu plus général que le théorème 2, mais la démonstration donnée dans mon article pour le théorème 2 suffit sans changements pour démontrer I).

I) Soient A et B deux sous-ensembles disjoints d'un continu M, soit K un ensemble irréductible séparant [5]) M entre A et B, et soient M_a et M_b deux sous-ensembles séparés de M tels que $M_a \supset A$, $M_b \supset B$, et $M_a + M_b = M - K$. Si A est connexe, l'ensemble $M_a + K$ est un continu.

II) Tout ensemble compact séparant un continu localement connexe M entre deux sous-ensembles fermés A et B de M contient un ensemble irréductible séparant M entre A et B.

Or, la proposition suivante résulte immédiatement de I):

A). *Si pour le point P du continu C il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une ε-séparation irréductible, le continu C est localement connexe au point P.*

Soit, en effet, pour un nombre $\varepsilon > 0$ donné, B un ensemble irréductible ε-séparant le point P; posons $C - B = A + D$, où les ensembles A et D sont séparés, $A \supset P$, et $\delta(A + B) < \varepsilon$. Il est aisé à voir que B est un ensemble séparant irréductible entre les ensembles P et D. On conclut donc de I) que l'ensemble $A + B$ est connexe. Le point P étant point intérieur de l'ensemble $A + B$, il s'ensuit que C est localement connexe au point P.

B). *Pour tout point x d'un continu localement connexe C et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta_{\varepsilon x} > 0$ tel que tout ensemble $\delta_{\varepsilon x}$-séparant le point x contient un ensemble irréductible ε-séparant le point x.*

Démonstration. L'ensemble (supposé non vide) de tous les points q de C pour lesquels $\varrho(q, x) \geqslant \varepsilon/2$ est sous-ensemble de la somme S d'un nombre fini de composantes $C_1, C_2, \ldots, C_m$ de l'ensemble $C - x$. Posons $R_0 = R - S$; et, pour tout entier i, $0 < i \leqslant m$, posons $R_i = R_{i-1}$ si $\delta(R_{i-1} + C_i) \geqslant \varepsilon$, et $R_i = R_{i-1} + C_i$ si $\delta(R_{i-1} + C_i) < \varepsilon$. Comme $\delta(R_0) < \varepsilon$, il résulte par induction que $\delta(R_i) < \varepsilon$ pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant m$. Soit d un nombre tel que

$$0 < 4d < \varepsilon - \delta(R_m) \tag{i}$$

et tel que l'ensemble $S_c(x, d)$ de tous les points q de C pour lesquels $\varrho(q, x) \leqslant d$, est compact. (Nous supposons dans cette note que tous les continus C considérés sont localement compacts et métriques).

[5]) Le sous-ensemble K d'un continu M est dit *ensemble séparant* M entre deux sous-ensembles A et B de M si l'ensemble $M - K$ est somme de deux ensembles séparés M_a et M_b contenant les ensembles A et B respectivement. L'ensemble K est dit *ensemble irréductible séparant* M entre A et B si aucun vrai sous-ensemble de K n'est un ensemble séparant de M entre A et B.

On a d'après (i),

$$\delta[R_m + S_c(x, d)] < \varepsilon. \tag{ii}$$

Soient $C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots, C_{n_k}$ $(k \leqslant m)$ les composantes de S qui n'appartiennent pas à R_m. Pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant k$, le point x ne coupant pas le continu localement connexe $C_{n_j} + x$, il résulte [6]) qu'il existe un continu E_j tel que

$$C_{n_j} \supset E_j \supset C_{n_j} \cdot [C - S_c(x, d)], \tag{iii}$$

et

$$\delta(E_j) \geqslant \varepsilon \tag{iv}$$

si C_{n_j} contient deux points p_1 et p_2 pour lesquels $\varrho(p_1, p_2) \geqslant \varepsilon$.

Or, soit $\delta_{\varepsilon x}$ un nombre positif tel que pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant k$,

$$\delta_{\varepsilon x} < \varrho(x, E_j) \quad \text{et} \quad \delta_{\varepsilon x} < \delta(E_j).$$

Soit K_0 un ensemble quelconque $\delta_{\varepsilon x}$-séparant le point x. Posons $C - K_0 = M_x + M$, où les ensembles M_x et M sont séparés, $M_x \supset x$, et $\delta(M_x) < \delta_{\varepsilon x}$. Désignons par Y l'ensemble $\Sigma_1^k E_j$. Comme $\delta(E_j) > \delta_{\varepsilon x}$ et $K_0 \cdot E_j = 0$, pour tout j, on a $Y \subset M$. Ainsi K_0 est un ensemble séparant M entre les ensembles Y et x. D'après II), K_0 contient un sous-ensemble K qui est un ensemble irréductible séparant M entre Y et x. Par conséquent, $M - K = N_x + N_y$, où les ensembles N_x et N_y sont séparés et contiennent x et Y respectivement. D'après (iii) il résulte que $N_x \subset R_m + S_c(x, d)$ et, d'après (ii), que $\delta(N_x) < \varepsilon$. Ainsi K est un ensemble ε-séparant le point x. Je dis qu'il est irréductible relativement à cette propriété.

Supposons, au contraire, qu'on ait pour un vrai sous-ensemble K' de K, $M - K' = Q_x + Q$, où les ensembles Q_x et Q sont séparés, $Q_x \supset x$ et $\delta(Q_x) < \varepsilon$. Or, K étant un ensemble séparant irréductible entre Y et x, il est aisé à voir que

$$K' \subset K \subset \sum_1^k C_{n_j}.$$

Par conséquent, $K' \cdot R_m = 0$; et de l'inclusion $R_m \supset x$ il résulte que $R_m \subset K_x$. Or, il existe un entier p, $1 \leqslant p \leqslant k$, tel que $E_p \subset K_x$,

[6]) Voir H. M. Gehman, Proc. of the Nat. Acad. of Sciences (Amérique), vol. 14 (1928); et aussi W. L. Ayres, Mon. für Math. und Physik, Bd. 36 (1929), p. 139.

car K' n'est pas un ensemble séparant M entre Y et x. Mais comme C_p n'appartient pas a R_m, il résulte de la méthode de la définition des ensembles $[R_i]$ que $\delta(R_{p-1}+C_p)\geqslant\varepsilon$. Il existe aussi deux points p_1 et p_2 de $R_{p-1}+C_p$ pour lesquels $\varrho(p_1,p_2)\geqslant\varepsilon$. Ni p_1 ni p_2 ne peut appartenir à R_{p-1}; car s'il en était ainsi, il résulterait de (ii) et (iii) que $p_1+p_2\subset R_{p-1}+E_p\subset R_m+E_p\subset K_x$ ce qui contredit l'inégalité $\delta(K_x)<\varepsilon$. Par conséquent, $p_1+p_2\subset C_p$. Mais alors, selon (iv), il vient $\delta(E_p)\geqslant\varepsilon$, contrairement à $E_p\subset K_x$ et $\delta(K_x)<\varepsilon$. Ainsi, la supposition que K n'est pas un ensemble irréductible ε-séparant le point x implique une contradiction, et notre proposition se trouve démontrée.

Les théorèmes A) et B) donnent le théorème suivant, qui présente une condition qui caractérise les continus localement connexes:

(C). *Pour que le continu C soit localement connexe il faut et il suffit que pour tout point $x\subset C$ et tout $\varepsilon>0$ il existe une ε-séparation irréductible.*

Bien que la dimension du continu C n'intervienne dans aucun des trois théorèmes précédents, il n'est pas difficile à voir qu'ils donnent les solutions des problèmes de Urysohn. Soit, en effet, C un continu localement connexe et de dimension $\leqslant n$ [7]. Soit x un point de C et ε un nombre quelconque >0. D'après B), il existe un nombre $\delta_{\varepsilon x}>0$ tel que tout ensemble $\delta_{\varepsilon x}$-séparant le point x contient un ensemble ε-séparant irréductible. Il existe un ensemble K_0, de dimension $\leqslant(n-1)$, $\delta_{\varepsilon x}$-séparant le point x. Donc K_0 contient un ensemble K ε-séparant irréductible. L'ensemble K est évidemment de dimension $\leqslant(n-1)$. D'autre part, s'il existe, pour tout point x d'un continu C et tout $\varepsilon>0$, une ε-séparation irréductible effectuée par un ensemble quelconque, il résulte de A) ou de C) que le continu C est localement connexe. Le premier problème est donc résolu.

Envisageons, à présent un continu C qui possède les propriétés α) et β) du continu dans le deuxième problème. Il résulte de A) ou de C) que C est localement connexe. Le continu C étant irréductible entre deux points, il s'ensuit qu'il est un arc simple.

[7]) Il me semble qu'on est obligé d'interpréter „dimension n" dans le problème 1) comme „dimension n au plus", car pour aucun point d'un continu C borné quelconque il n'existe une ε-séparation irréductible effectuée par un ensemble de dimension $>(-1)$ si $\varepsilon>\delta(C)$.

Vienne, février, 1930.

Sur l'extension des fonctions de Baire définies sur les ensembles linéaires quelconques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

1. Les fonctions de classe $\leqslant\alpha$ sur un ensemble donné quelconque E sont définies par l'induction transfinie. Les fonctions de classe 0 sur E sont des fonctions définies sur E et continues sur E, et les fonctions de classe $\leqslant\alpha$ sur E sont des fonctions qui sont, sur E, limites des fonctions des classes $<\alpha$ sur E.

M. G. v. Alexits a démontré [1]) que si E est un ensemble (linéaire) [2]) quelconque et $f(x)$ — une fonction (finie) de classe $\leqslant\alpha$ sur E, il existe une fonction (finie) d'une variable réelle, de classe $\leqslant\alpha+2$, qui coïncide avec $f(x)$ sur E.

Nous démontrerons dans cet ordre d'idées un théorème plus précis que voici:

Théorème. *Si E est un ensemble (linéaire) quelconque et $f(x)$ — une fonction (finie) de classe $\leqslant\alpha$ sur E, il existe une fonction (finie) d'une variable réelle, de classe $\leqslant\alpha+1$, qui coïncide avec $f(x)$ sur E.*

Notre démonstration sera basée sur une idée différente de celle de M. v. Alexits.

Soit $f(x)$ une fonction (finie) de classe $\leqslant\alpha$ sur E. Posons, pour $x\in E$:

$$(1)\qquad \begin{cases} g(x)=f(x) \quad \text{et} \quad h(x)=0, & \text{si } f(x)\geqslant 0,\\ g(x)=0 \quad \text{et} \quad h(x)=-f(x), & \text{si } f(x)<0: \end{cases}$$

[1]) *Fund. Math.* t. XV, p. 56 (Satz IV).

[2]) Ce n'est que pour fixer les idées que nous considérerons les ensembles *linéaires*.