cular, if $p=-\infty$ and $q=+\infty$, we set $u^{\pm}(\xi; -\infty, +\infty; 1-0)=u^{\pm}(\xi)$ and $u_{\pm}(\xi; -\infty, +\infty; 1-0)=u_{\pm}(\xi)$. These numbers $u^{\pm}(\xi)$, $u_{\pm}(\xi)$ — as we may readily see — are so related to the numbers $L^{\pm}(\xi)$, $l^{\pm}(\xi)$ of Kempisty [13]) that our result, that the validity of $u^{\pm}(\xi) \geqq u_{\mp}(\xi)$ for all ξ's not in a certain denumerable set, implies the theorem of Kempisty, l. c. Kempisty defines $L^{\pm}(\xi)$ as the lower boundary of all real numbers a such that $E[f(x) \leqq a, x \gtrless \xi]$ is of metric density 1 at ξ; and $l^{\pm}(\xi)$, as the upper boundary of all real numbers a such that $E[f(x) \geqq a, x \gtrless \xi]$ is of metric density 1 at ξ. If $y > L^{+}(\xi)$, the metric density of $E[f(x) > y, x > \xi]$ is 0 et ξ; therefore, if $0 < r < 1$ and $\eta > \xi$ is sufficiently near ξ, we have $u(f; \xi, \eta; -\infty, +\infty; r) \leqq y$ and hence $u^{+}(\xi) \leqq y$. We conclude that $u^{+}(\xi) \leqq L^{+}(\xi)$. If $y < l^{+}(\xi)$ the metric density of $E[f(x) < y, x > \xi]$ is 0 at ξ, therefore, if $0 < r < 1$, we have $u(f; \xi, y; -\infty, +\infty; r) \geqq y$; therefore $u_{+}(\xi) \geqq y$, and hence $u_{+}(\xi) \geqq l^{+}(\xi)$. Likewise, of course, $u^{-}(\xi) \leqq L^{-}(\xi)$ and $u_{-}(\xi) \geqq l^{-}(\xi)$. Thus, since $u^{\pm}(\xi) \geqq u_{\mp}(\xi)$ except possibly for $\aleph_0$ ξ's, we conclude:

(Theorem of Kempisty). *For every real function $f(x)$ $E[L^{+}(x) < l^{-}(x)]$ is at most denumerable.*

Since every interval function offers an application of Corollary II, it would be easy to cite other interesting implications for arbitrary real functions, or for that matter, for arbitrary planar sets.

[13]) *Sur les fonctions approximativement discontinues*, Fund. Math., vol. 6 (1924), p. 6.

Sur les suites des fonctions presque partout continues.

Par

L. Kantorovitch (Leningrad, U. R. S. S.).

Le but de cette Note est de démontrer la proposition suivante

Théorème. *Pour que la fonction $F(x)$ puisse être représentée par la relation de la forme*

(1) $$F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

où les fonctions $f_n(x)$ sont presque partout continues dans (a, b), il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions: $\varphi(x)$ du type (g_2) [1]): au plus [dans la classification de M. Young] et $\psi(x)$ du type (G_2) au plus, remplissant partout la relation

(2) $$\varphi(x) \leqslant F(x) \leqslant \psi(x)$$

et presque partout la relation

(3) $$\varphi(x) = F(x) = \psi(x).$$

Les conditions sont nécessaires. Supposons que la relation (1) a lieu. Posons:

(4) $$\bar{\varphi}_n(x) = \mathrm{Max}\,\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\}.$$

On voit que la fonction $\bar{\varphi}_n(x)$ est semicontinue inférieurement au moins dans tous les points, où toutes les fonctions $f_\nu(x)$ $[\nu = n, n+1, \ldots]$ sont continues, c'est-à-dire presque partout. D'après la définition de la fonction $\bar{\varphi}_n(x)$, nous aurons immédiatement

(5) $$\bar{\varphi}_{n+1}(x) \leqslant \bar{\varphi}_n(x); \quad \lim_{n\to\infty} \bar{\varphi}_n(x) = F(x).$$

[1]) Nous utilisons ici [et dans la suite] les notations de M. H. Hahn, v. *Theorie der reellen Funktionen* [Berlin 1921], pp. 328, 334.

Soit maintenant $\varphi_n(x)$ la borne inférieure de $\overline{\varphi}_n(x)$ *au point* x, c'est-à-dire, si l'on désigne par $m_\delta[\overline{\varphi}_n(x)]$ la borne inférieure de $\overline{\varphi}_n(x)$ dans l'intervalle $(x-\delta,\ x+\delta)$, nous posons

(6) $$\varphi_n(x)=\lim_{\delta\to 0} M_\delta[\overline{\varphi}_n(x)].$$

On voit que la fonction $\varphi_n(x)$ est partout semicontinue inférieurement, et de (5) et (6) il résulte:

(7) $$\varphi_{n+1}(x)\leqslant\varphi_n(x);\quad \varphi_n(x)\leqslant\overline{\varphi}_n(x).$$

En outre, on a presque partout (notamment, dans tous les points où $\overline{\varphi}_n(x)$ est semicontinue inférieurement) la relation:

(8) $$\varphi_n(x)=\overline{\varphi}_n(x).$$

Maintenant nous définissons la fonction $\varphi(x)$ de la manière suivante:

(9) $$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x).$$

Il suit des relations (8) et (7) qu'elle est du type (g_2) et satisfait bien aux relations (2) et (3). Si nous considérerons la fonction $-F(x)$ au lieu de $F(x)$, nous trouverons la fonction $\Psi(x)$ du type (G_2) qui également satisfait aux relations (2) et (3). Donc, la nécessité des conditions (2) est (3) est établie.

L e s c o n d i t i o n s s o n t s u f f i s a n t e s. Supposons qu'il existent des fonctions $\varphi(x)$ du type (g_2) et $\Psi(x)$ du type (G_2), telles que les conditions (2) et (3) soient remplies.

Construisons les suites des fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$, semicontinues inférieurement, resp., supérieurement, telles que

(10) $$\varphi_{n+1}(x)<\varphi_n(x);\quad \psi_{n+1}(x)>\psi_n(x)$$

(11) $$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x);\quad \lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=\psi(x).$$

Posons maintenant

(12) $$\mathrm{E}_n=E[\varphi_n(x)>\psi_n(x)].$$

Les ensembles E_n sont ouverts et on voit sans peine que

(13) $$m\,C\,\mathrm{E}_n=0.$$

L'ensemble ouvert E_n est la somme d'une infinité dénombrable des intervalles ouverts $d_n^{(i)}$ sans points communs deux-à-deux, c'est-à-dire

(14) $$\mathrm{E}_n=\sum_{i=1}^{\infty} d_n^{(i)}.$$

D'après le théorème connu de M. H. H a h n [2]) [Einschiebungssatz], il existe une fonction $\lambda_n^{(i)}(x)$, continue dans $d_n^{(i)}$, telle que

(15) $$\varphi_n(x)\geqslant\lambda_n^{(i)}(x)\geqslant\psi_n(x)\quad(\text{dans } d_n^{(i)}).$$

Nous définissons maintenant la fonction $f_n(x)$ de la manière suivante:

(16) $$f_n(x)=\begin{cases}\lambda_n^{(i)}(x) & \text{dans l'intérieur de } d_n^{(i)}\ [i=1,2,3,\dots]\\ F(x) & \text{dans } C\mathrm{E}_n.\end{cases}$$

La fonction $f_n(x)$ est continue dans l'intervalle (a,b), à l'ensemble $C\mathrm{E}_n$ près, c'est-à-dire, presque partout. Nous démontrons maintenant que la relation (1) a lieu.

Soit x un point quelconque; choisissons à volonté un nombre positif ε. D'après (11) existe un nombre naturel N, tel que

(17) $$\varphi_n(x)-\varphi(x)\leqslant\varepsilon,\ \psi(x)-\psi_n(x)\leqslant\varepsilon,\ \text{pourvu que } n\geqslant N.$$

Nous montrons que l'on a, pour $n\geqslant N$,

(18) $$|f_n(x)-F(x)|\leqslant\varepsilon.$$

En effet, soit $n\geqslant N$; si le point x est contenu dans l'intérieur d'un des intervalles $d_n^{(i)}$, on a (18) d'après (2), (16), (15) et (17); or, si $x\in C\mathrm{E}_n$ l'inégalité (18) encore a lieu, d'après (16).

C. Q. F. D.

Corollaire. *La fonction $F(x)$ qui est représentable dans la forme* (1), *est équivalente à une certaine fonction de la première classe de Baire.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après le théorème précédent, il existe les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, telles que (2) et (3) sont remplies. Alors du théorème connu de MM. H a h n-H a u s d o r f f [3]) il résulte l'existence d'une fonction $\Phi(x)$ de la première classe de B a i r e, telle que

(19) $$\varphi(x)\leqslant\Phi(x)\leqslant\psi(x).$$

En vertu de (19), (2) et (3) nous avons presque partout

$$\Phi(x)=F(x)$$

C. Q. F. D.

[2]) H. H a h n. loc. cit. p. 164. Cf. aussi F. H a u s d o r f f. *Mat. Zeitschr.* B. 5 p. 295.

[3]) F. H a u s d o r f f., loc. cit., p. 309.

Remarque I. M. M. Feldstein et Sierpiński[4]) ont posé le problème suivant: Existe-t-il une fonction de deuxième classe qui ne soit pas la limite des fonctions presque partout continues? Ce problème a été résolu par M. Zalcwasser[5]). D'après le corollaire, la solution affirmative de ce problème résulte de l'exemple connu d'une fonction de deuxième classe qui n'est équivalente à aucune fonction de première classe.

Remarque II. Dans le corollaire, nous avons énoncé que l'équivalence de la fonction $F(x)$ à une fonction de première classe est nécessaire pour qu'elle soit représentable dans la forme (1).

On pourrait croire, que cette condition est suffisante aussi; or, il en n'est pas ainsi, comme le montre l'exemple suivant:

Soit E un ensemble G_δ de mesure nulle, tel que CE est l'ensemble de première catégorie. Désignons par $F(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E, c'est-à-dire, posons

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans E} \\ 0 & \text{dans CE.} \end{cases}$$

Nous démontrons que la fonction $F(x)$ n'est pas représentable dans la forme (1). En effet, s'il en était autrement, il existait une fonction $\Psi(x)$ du type (G_2), équivalente à $F(x)$ et telle que $\Psi(x) \geqslant F(x)$. Or, l'ensemble $E_1 = E(\Psi(x) > \frac{1}{2}) \supset E$ étant du type F_σ et de deuxième catégorie, il aura forcément une mesure *positive* $m E_1 > 0$ et, par conséquent, $\Psi(x)$ n'est pas équivalente à $F(x)$. Donc, il est impossible qu'il existe une fonction $\Psi(x)$ remplissant les conditions du théorème au debut, ce qui prouve notre assertion.

[4]) *Fund. Math.*, t. I, p. 224, problème 10.

[5]) C'est signalé dans les *Fund. Math.* t. IV, p. 369. [L'exemple de M. Zalcwasser est la fonction caractéristique d'un ensemble F_σ qui, en même temps que son complémentaire, est de mesure positive dans tout intervalle. *Rem. de la Rédaction*].

Über Grenzzahlen und Mengenbereiche.

Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.

Von

Ernst Zermelo (Freiburg i. Br).

In der folgenden Arbeit handelt es sich um die Untersuchung der „Bereiche", bestehend aus Mengen und Urelementen, in denen die „allgemeinen" Axiome der Mengenlehre (die „Zermelo-Fraenkelschen Axiome" mit einer Ergänzung) erfüllt sind, und um den Nachweis, daß ein solcher „Normalbereich" bis auf isomorphe Abbildungen bestimmt ist durch zwei Zahlen, durch die Mächtigkeit seiner „Basis" d. h. der Gesamtheit seiner „Urelemente" (die keine eigentlichen Mengen sind) und durch seine „Charakteristik" d. h. den Ordnungstypus aller in ihm enthaltenen „Grundfolgen" oder aller in ihm durch Mengen vertretenen Ordnungszahlen. Es wird gezeigt, daß diese beiden Zahlen unabhängig von einander beliebig gewählt werden können, sofern die „Charakteristik" den Bedingungen einer „Grenzzahl" genügt, nämlich gleichzeitig eine „Kernzahl" oder „reguläre Anfangszahl" und „Eigenwert" oder „kritische Zahl" einer gewissen „Normalfunktion" zu sein. Die schrankenlose Fortsetzbarkeit der transfiniten Zahlenreihe gestattet danach die Darstellung der Mengenlehre in einer ebenso unbegrenzten Folge wohlunterschiedener „Modelle". Und eben die scharfe Unterscheidung zwischen den verschiedenen Modellen des (nicht-kategorischen!) Axiomensystems sichert uns auch eine befriedigende Aufklärung der „ultrafiniten Antinomien", indem immer die „Unmengen" des einen Modells sich als eigentliche „Mengen" darstellen im nächstfolgenden wie in allen höheren Modellen.

Als Hilfsmittel der Untersuchung bieten sich einmal die „Grundfolgen", nämlich die in jedem Normalbereich vorhandenen einfachsten Vertreter der verschiedenen Ordnungszahlen, und zweitens die „Entwickelung" des Normalbereiches, seine Zerlegung in eine wohlgeordnete Folge getrennter „Schichten", wobei die einer Schicht