Il résulte d'un raisonnement de M. Lebesgue [1]) que la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles jouissant de la propriété de Baire jouit encore de cette propriété, si l'on suppose l'espace séparable. Or, cette dernière hypothèse peut être omise, lorsqu'on applique le théorème du $N2$; le raisonnement de M. Lebesgue est alors valable pour chaque espace métrique, qu'il soit séparable ou non.

De là résulte aussitôt que *dans chaque espace métrique tous les ensembles de Borel jouissent de la propriété de Baire* [2]).

[1]) Journ. de Math. S. 6, t. I, p. 186.

[2]) Pour d'autres applications du théorème démontré ici à la propriété de Baire, voir la note de M. Kuratowski, publiée dans ce volume.

Remarque sur un théorème de M. Nikodym.

Par

H. Wileński (Varsovie).

Dans son travail sur une généralisation de l'intégrale de M. Radon [1]), M. O. Nikodym [2]) a démontré le théorème suivant:

$F(E)$ étant une fonction d'ensemble, (définie pour les sous-ensembles E d'une variété abstraite $\mathcal{E}$, formant un corps K), absolument additive dans ce corps et absolument continue, relativement a une mesure $\mu(E) \geqslant 0$, il existe une fonctionelle [3]) $f(x)$ (où x designe un élément quelconque de la variété E) telle, que: $F(E) = \int_E f(x)d\mu$ pour chaque ensemble $E \epsilon K$.

M. Nikodym s'appuie sur un lemme, que nous démontrerons d'une manière plus simple et sans faire usage des nombres transfinis. Je crois, que les considérations qui vont suivre, permettent de simplifier l'exposé de la théorie développée dans le travail cité de M. Nikodym.

Nous nous appuyons sur un théorème de M. Hahn [4]) (qui à été d'ailleurs employé par M. Nikodym dans la suite de sa démonstration).

Thèorème (de M. Hahn): soit $F(E)$ une fonction d'ensemble absolument additive dans un corps K. Chaque ensemble E_0 de K se décompose en deux ensembles: P et N, tels, que: $P \epsilon K$, $N \epsilon K$

$$\text{et:}\quad \begin{array}{lll} F(E) \geqslant 0 & \text{pour chaque} & E \subset P,\ E \epsilon K \\ F(E) \leqslant 0 & \text{''}\quad\text{''} & E \subset N,\ E \epsilon K. \end{array}$$

[1]) J. Radon: Theorie und Anwendungen der abs. add. Mengenfunct. *Sitzber. der Math. Nat.-Wiss. Ak. d. Wissen* Wien 1913.

[2]) O. Nikodym: Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon *Fund. Math.* T. XV (131—179).

[3]) M. Fréchet: Sur l'intégrale d'un fonctionelle étendue a un ensemble abstrait. *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. XLIII; 1915.

[4]) Hahn: Theorie der reellen Funktionen 404; Sierpiński Fund. Math. T. V. 125; aussi: Franck: Fund. Math. T. V. 252.

Soit $\mathcal{E}$ une variété abstraite et supposons que: $F(\mathcal{E}) \geqslant 0$.

Définition[1]). Soit un nombre $\alpha \geqslant 0$, P un ensemble appartenant à K. Désignons par L_α^P la classe de tous les ensembles $E \subset P$, tels que pour chaque $E' \subset E$, $E' \epsilon K$: $F(E') \geqslant \alpha\mu(E')$.

Voilà maintenant le lemme en question[2]):

Lemme 1. Si $F(P) > 0$ et $0 \leqslant \alpha < \dfrac{F(P)}{\mu(P)}$ [car $F(P) > 0$ entraîne d'après l'hypothèse[3]) $\mu(P) > 0$], la classe L_α^P contient un ensemble maximum E_0 tel, que: $\mu(E_0) > 0$.

Démonstration. Posons: $\Phi(E) = F(E) - \alpha\mu(E)$; on a donc: $\Phi(P) = F(P) - \alpha\mu(P) > 0$; d'après le théorème de M. Hahn, il existe un ensemble maximum E_0, tel qu'on ait: $\Phi(E) \geqslant 0$ pour chaque: $E \subset E_0$, $E \epsilon K$; il s'en suit que: $E_0 \epsilon L_\alpha^P$ est un ensemble maximum de L_α^P, et comme $F(P) > 0$, on a, à plus fort raison, $F(E_0) > 0$, c'est à dire: $\mu(E_0) > 0$ [car $F(E_0) > 0 \rightarrow \mu(E_0) > 0$].

Nous allons de même donner une démonstration simple d'un autre lemme de M. Nikodym.

Lemme 2. E étant un ensemble maximum de L_α (c'ést à dire $L_\alpha^{\mathcal{E}}$, où $\mathcal{E}$ est la variété abstraite fondamentale), EP est l'ensemble maximum de L_α^P (pour $P \subset \mathcal{E}$).

Démonstration. Soit E l'ensemble maximum de L_α (donc si E_1 est un ensemble du corps, tel que pour chaque $E_2 \subset E_1$: $\alpha\mu(E_2) \geqslant F(E_2)$, alors on a $E_1 \subset E$ et inversement),

On a évidemment $EP \subset P$; d'autre part $EP \subset E$, donc pour chaque $E' \subset EP$, $E' \epsilon K$ on a: $\alpha\mu(E') \leqslant F(E')$ (car $E' \subset E$), donc: $EP \epsilon L_\alpha^P$.

Soit enfin un ensemble quelconque $E_1 \epsilon L_\alpha^P$; nous avons donc pour chaque $E_2 \subset E_1$, $E_2 \epsilon K$ (d'après la définition de L_α^P): $\alpha\mu(E_2) \leqslant \leqslant F(E_2)$; d'autre part $E_1 \subset P \subset \mathcal{E}$, donc: $E_1 \epsilon L_\alpha$, c'est à dire $E_1 \subset E$, mais comme $E_1 \subset P$ (d'après $E_1 \epsilon L_\alpha^P$), on a: $E_1 \subset EP$, c'est-à-dire: EP est l'ensemble maximum de L_α^P.

Je tiens à exprimer ici mon afectueuse gratitude à M. St. Saks pour ses précieux conseils.

[1]) Nikodym: l. c. p. 168.

[2]) Nikodym: l. c. p. 170.

[3]) Nikodym: l. c. p. 168.