Ainsi, en particulier, la propriété de Baire au sens étroit de E équivaut à celle que, quel que soit l'ensemble fermé F, l'ensemble EF est somme d'un ensemble G_δ relatif à F et d'un ensemble de I-re catégorie relativement à F. Or, F étant fermé, les ensembles G_δ relatifs sont des G_δ absolus; d'autre part, chaque ensemble Z fermé dans E étant de la forme $E\overline{Z}$, la condition précédente peut être énoncée de cette façon (condition de M. Sierpiński): *chaque ensemble Z fermé dans E est somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble de I-re catégorie dans Z.*

L'importance de ce dernier énoncé tient au fait que dans les espaces où la notion d'ensemble G_δ est un invariant topologique (par ex. dans les espaces métriques complets), cet énoncé implique directement l'invariance de la propriété de Baire au sens étroit.

Théorème sur les ensembles de première catégorie

Par

Stefan Banach (Lwów).

D'après un théorème élémentaire, *si, dans un espace métrique séparable, l'ensemble A est de I^{re} catégorie en chacun de ses points, il est tout entier un ensemble de I^{re} catégorie* [1]).

Je vais donner ici une démonstration de ce théorème qui est valable pour *chaque espace métrique*, qu'il soit séparable ou non. J'en indiquerai aussi plusieurs applications [2]).

1. Démonstration. Soit E un espace métrique. Soit

$$S_1,\ S_2, \ldots,\ S_\alpha, \ldots \tag{1}$$

une suite transfinie de sphères (ouvertes) disjointes et assujetties aux conditions suivantes: 1° AS_α est de I^{re} catégorie, 2° la suite (1) est saturée, c.-à-d. qu'il n'existe aucune sphère X telle que $XS_\alpha = 0$, pour chaque α, et que XA soit de I^{re} catégorie.

Posons: $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_\alpha + \ldots$

Je dis que *l'ensemble $E - S$ est non-dense.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, cet ensemble, comme ensemble fermé, contiendrait une sphère X. Evidemment $XS_\alpha = 0$, pour

[1]) Espace métrique = espace où la distance est définie (voir Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, p. 94). L'espace est *séparable*, lorsqu'il contient une partie dense dénombrable. Un ensemble est dit *de I^{re} catégorie* (au sens de Baire), lorsqu'il est somme d'une série dénombrable d'ensembles non-denses; un ensemble X est dit non-dense, lorsque la fermeture de X, $\overline{X}$ ne contient aucune sphère. Un ensemble A est dit de I^{re} catégorie *au point p*, lorsqu'il existe un entourage G de p tel que l'ensemble AG est de I^{re} catégorie.

[2]) Les principaux résultats de cette note ont été présentés à la Soc. Pol. de Math. Lwów le 26. X. 1929.

chaque α. Donc, selon 2⁰, XA ne peut être de Iʳᵉ catégorie et, à plus forte raison, XA ne peut être vide. Soit donc p un point de XA. Par hypothèse, A est de Iʳᵉ catégorie au point p; il existe donc une sphère X_1 telle que $p \subset X_1 \subset X$ et que $X_1 \cdot A$ est de Iʳᵉ catégorie. Mais ceci contredit la condition 2⁰, puisque $X_1 S_\alpha = 0$, quel que soit α.

Ceci établi, il suffit de prouver que l'ensemble AS est de Iʳᵉ catégorie.

Or, d'après 1⁰, on a

$$AS_\alpha = N_\alpha^1 + N_\alpha^2 + \ldots + N_\alpha^n + \ldots$$

N_α^n étant non-dense et n étant un entier positif.

Posons:

$$N^n = N_1^n + N_2^n + \ldots + N_\alpha^n + \ldots$$

On a donc: $AS = N^1 + N^2 + \ldots + N^n + \ldots$ et notre théorème sera démontré dès que nous prouverons que N^n *est non-dense.*

Supposons, par contre, que N^n n'est pas non-dense. Il existe donc un ensemble ouvert H tel que

$$0 \neq H \subset \overline{N^n}. \tag{2}$$

L'ensemble H ne peut être contenu dans l'ensemble $E - S$, puisque ce dernier est non-dense. Il existe, par conséquent, une sphère S_α telle que

$$HS_\alpha \neq 0. \tag{3}$$

Or, on a l'identité

$$N^n = N_\alpha^n + \sum_{\xi \neq \alpha} N_\xi^n, \quad \text{d'où} \quad \overline{N^n} = \overline{N_\alpha^n} + \overline{\sum_{\xi \neq \alpha} N_\xi^n} \subset \overline{N_\alpha^n} + \overline{\sum_{\xi \neq \alpha} S_\xi}$$

et en multipliant par S_α, il vient

$$\overline{N^n} \cdot S_\alpha \subset \overline{N_\alpha^n} \cdot S_\alpha + \overline{\sum_{\xi \neq \alpha} S_\xi} \cdot S_\alpha.$$

Les termes de la suite (1) étant des ensembles ouverts et disjoints, on a

$$\overline{\sum_{\xi \neq \alpha} S_\xi} \cdot S_\alpha = 0.$$

Donc

$$\overline{N^n} \cdot S_\alpha \subset \overline{N_\alpha^n} \cdot S_\alpha \subset \overline{N_\alpha^n}$$

d'où, en vertu de (2): $HS_\alpha \subset \overline{N_\alpha^n}$. Nous arrivons ainsi à la conclusion que l'ensemble $\overline{N_\alpha^n}$ contient un ensemble ouvert et non-vide (selon (3)), ce qui contredit l'hypothèse que N_α^n est non-dense.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

2. Le théorème entraîne la conséquence suivante (qui en présente d'ailleurs une généralisation): *A étant un ensemble arbitraire* (dans un espace métrique) *et A_1 désignant l'ensemble de points de A où A est de Iʳᵉ catégorie, A_1 est un ensemble de Iʳᵉ catégorie.*

En effet, A est en chaque point de A_1 de Iʳᵉ catégorie, donc A_1, comme sous-ensemble de A, l'est, à plus forte raison. Selon le théorème précédent, A_1 est un ensemble de Iʳᵉ catégorie.

3. En généralisant un théorème de Baire, M. Kuratowski[1]) a démontré l'énoncé suivant: *étant donnée une suite convergente de fonctions $f_n(x)$ continues et définies sur un espace métrique séparable et dont les valeurs appartiennent à un espace métrique arbitraire, les points de discontinuité de la fonction $f(x) = \lim f_n(x)$ constituent un ensemble de Iʳᵉ catégorie.*

Les résultats que nous venons d'établir permettent d'omettre dans cet énoncé la condition que l'espace soit *séparable.* A ce but il suffit, dans le raisonnement de M. Kuratowski, au lieu d'appliquer le théorème du $N2$ aux espaces séparables — de l'appliquer aux espaces métriques les plus généraux.

D'une façon analogue, on étend aux espaces métriques (séparables ou non) le théorème suivant (provenant aussi de Baire) [2]): *chaque fonction représentable analytiquement, définie sur un espace métrique, est continue, lorsqu'on néglige les ensembles de Iʳᵉ catégorie.*

4. On dit qu'un ensemble A *jouit de la propriété de Baire*, s'il n'existe aucune sphère dans laquelle l'ensemble A et son complémentaire soient tous deux en chaque point de deuxième catégorie.

[1]) Fund. Math. V, p. 80.
[2]) cf. ibid., p. 82.

Il résulte d'un raisonnement de M. Lebesgue [1]) que la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles jouissant de la propriété de Baire jouit encore de cette propriété, si l'on suppose l'espace séparable. Or, cette dernière hypothèse peut être omise, lorsqu'on applique le théorème du $N2$; le raisonnement de M. Lebesgue est alors valable pour chaque espace métrique, qu'il soit séparable ou non.

De là résulte aussitôt que *dans chaque espace métrique tous les ensembles de Borel jouissent de la propriété de Baire* [2]).

[1]) Journ. de Math. S. 6, t. I, p. 186.

[2]) Pour d'autres applications du théorème démontré ici à la propriété de Baire, voir la note de M. Kuratowski, publiée dans ce volume.

Remarque sur un théorème de M. Nikodym.

Par

H. Wileński (Varsovie).

Dans son travail sur une généralisation de l'intégrale de M. Radon [1]), M. O. Nikodym [2]) a démontré le théorème suivant:

$F(E)$ étant une fonction d'ensemble, (définie pour les sous-ensembles E d'une variété abstraite $\mathcal{E}$, formant un corps K), absolument additive dans ce corps et absolument continue, relativement a une mesure $\mu(E) \geqslant 0$, il existe une fonctionelle [3]) $f(x)$ (où x designe un élément quelconque de la variété E) telle, que: $F(E) = \int\limits_E f(x)d\mu$ pour chaque ensemble $E \epsilon K$.

M. Nikodym s'appuie sur un lemme, que nous démontrerons d'une manière plus simple et sans faire usage des nombres transfinis. Je crois, que les considérations qui vont suivre, permettent de simplifier l'exposé de la théorie développée dans le travail cité de M. Nikodym.

Nous nous appuyons sur un théorème de M. Hahn [4]) (qui à été d'ailleurs employé par M. Nikodym dans la suite de sa démonstration).

Théorème (de M. Hahn): soit $F(E)$ une fonction d'ensemble absolument additive dans un corps K. Chaque ensemble E_0 de K se décompose en deux ensembles: P et N, tels, que: $P \epsilon K$, $N \epsilon K$

$$\text{et:}\quad \begin{array}{lll} F(E) \geqslant 0 & \text{pour chaque} & E \subset P,\ E \epsilon K \\ F(E) \leqslant 0 & \quad ,, \qquad ,, & E \subset N,\ E \epsilon K. \end{array}$$

[1]) J. Radon: Theorie und Anwendungen der abs. add. Mengenfunct. *Sitzber. der Math. Nat.-Wiss. Ak. d. Wissen* Wien 1913.

[2]) O. Nikodym: Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon *Fund. Math.* T. XV (131—179).

[3]) M. Fréchet: Sur l'intégrale d'un fonctionelle étendue a un ensemble abstrait. *Bull. de la Soc. Math. de France,* t. XLIII; 1915.

[4]) Hahn: Theorie der reellen Funktionen 404; Sierpiński Fund. Math. T. V. 125; aussi: Franck: Fund. Math. T. V. 252.