La propriété de Baire dans les espaces métriques.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Je vais étendre, dans cette note, aux espaces métriques plusieurs énoncés concernant la propriété de Baire et j'en donnerai des simples démonstrations. J'aurai récours à la note de M. Banach, publiée dans ce volume.

1. L'espace considéré dans cette note est un espace métrique arbitraire. Nous le désignons par 1.

Nous dirons qu'un ensemble E *jouit de la propriété de Baire* (au sens large), en symboles $E \epsilon \mathfrak{B}$, lorsque E est ouvert „à un ensemble de I re catégorie près", c.-à-d. lorsque:

$$E = G - P_1 + P_2,$$

G étant ouvert et P_1 et P_2 étant deux ensembles de I-re catégorie [1]).

En tenant compte du fait que, si $E \epsilon \mathfrak{B}$, alors $1 - E \epsilon \mathfrak{B}$, on voit facilement que le terme „ouvert" peut, dans l'énoncé précédent, être remplacé par „fermé"; de sorte que:

$$E = F - P_3 + P_4.$$

En posant $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$, il vient

$$E - P = G - P = F - P, \tag{1}$$

[1]) On prouve facilement (en s'appuyant sur le théorème généralisé par M. Banach dans la note citée) que cette condition équivaut à celle qu'il n'existe aucun ensemble ouvert dans lequel E et $1 - E$ soient tous deux en chaque point de II-me catégorie. Voir W. Sierpiński: *Funkcje przedstawialne analitycznie*, Lwów, 1925, p. 53 et Fund. Math. XI, p. 305. On consultera aussi une Note de M. Szpilrajn, qui paraîtra prochainement.

ce qui signifie que $E - P$ est fermé et ouvert relativement à l'ensemble $1 - P$.

Ainsi, *pour que $E \epsilon \mathfrak{B}$, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble de I-re catégorie P tel que $E - P$ soit fermé et ouvert relativement à $1 - P$*; autrement dit, que les ensembles $E - P$ et $1 - E - P$ soient séparés.

Cette dernière condition peut encore être exprimée de la façon suivante: la fonction $f(x)$ qui s'annule pour $x \epsilon E - P$ et est égale à un pour $x \epsilon 1 - E - P$, est continue. On parvient ainsi à cet énoncé (qui généralise aux espaces métriques un théorème de M. Lusin): *la propriété de Baire de l'ensemble E et de sa fonction caractéristique sont équivalentes* [1]).

Une autre condition équivalente à la propriété de Baire est la suivante (due à M. Sierpiński): *l'ensemble E est somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble de I-re catégorie* [2]).

En effet, l'ensemble P (de la form. (1)), comme ensemble de I-re catégorie, est contenu dans un ensemble F_σ de I-re catégorie; appelons le P^*. Il vient:

$$E = E - P^* + EP^* = G - P^* + EP^*$$

où évidemment $G - P^*$ est un G_δ.

D'autre part, si un ensemble se laisse décomposer de la sorte, il possède la propriété de Baire, puisque chaque ensemble G_δ la possède [3]) et il ne cesse pas de la posséder si on lui ajoute un ensemble de I-re catégorie.

2. Théorème. *$f(x)$ étant une fonction qui transforme un espace métrique 1 en un espace séparable I, la propriété de Baire de la fonction f équivaut à celle de tous les ensembles $f^{-1}(H)$* [4]), *où H est un ensemble ouvert variable extrait de l'espace I* [5]).

[1]) On dit que *la fonction $f(x)$ jouit de la propriété de Baire*, lorsqu'il existe un ensemble P de I-re catégorie tel que la fonction $f(x/1-P)$ est continue. Le symbole $f(x/A)$ signifie, suivant M. Hausdorff, qu'on a restreint le domaine de variation de x à l'ensemble A.

[2]) Cet énoncé fut aussi trouvé par M. Szpilrajn, C. R. du Congrès des math. des Pays Slaves, Varsovie 1929, p. 299. M. Sierpiński l'avait établi dans des hypothèses plus restrictives sur l'espace, Fund. Math. IV, p. 319.

[3]) Cf. S. Banach, l. c.

[4]) $f^{-1}(H) =$ l'ensemble des x tels que $f(x) \epsilon H$.

[5]) Pour le cas de fonction réelle de variable réelle, ce théorème fut démontré par M. Nikodym, Bull. Acad. Polonaise 1929, p. 591. Dans ce cas, on peut au

Démonstration. 1.[1]. Supposons que la fonction f jouit de la propriété de Baire. Il existe donc un ensemble P de I-re catégorie tel que la fonction $g(x)=f(x/1-P)$ est continue. H étant ouvert, l'ensemble $g^{-1}(H)$ est donc ouvert dans $1-P$[2]; en symboles: $g^{-1}(H)=G-P$, où G est ouvert. Or, par définition de g, on a

$$g^{-1}(H)=f^{-1}(H)-P \tag{2}$$

et par conséquent:

$$f^{-1}(H)=f^{-1}(H)-P+f^{-1}(H)\cdot P=G-P+f^{-1}(H)\cdot P,$$

ce qui prouve que $f^{-1}(H)\,\epsilon\,\mathfrak{B}$.

2. Supposons que, pour chaque ensemble ouvert H, on ait $f^{-1}(H)\,\epsilon\,\mathfrak{B}$. Il s'agit de prouver que la fonction f jouit de la propriété de Baire; autrement dit, il s'agit de définir un ensemble de I-re catégorie P tel qu'en posant $g(x)=f(x/1-P)$, l'ensemble $g^{-1}(H)$ soit ouvert dans $1-P$.

L'espace I étant par hypothèse séparable, il existe une suite $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ d'ensembles ouverts telle que chaque ensemble ouvert H est somme d'un certain nombre de termes de cette suite:

$$H=H_{k_1}+H_{k_2}+\dots \tag{3}$$

Par hypothèse, $f^{-1}(H_n)\,\epsilon\,\mathfrak{B}$, c.-à-d. on a:

$$f^{-1}(H_n)=G_n-P_n+R_n \tag{4}$$

où G_n est ouvert et P_n et R_n sont de I-re catégorie.

Posons

$$P=\sum_{n=1}^{\infty}(P_n+R_n).$$

lieu des ensembles ouverts H considérer des intervalles, puisque chaque ensemble ouvert est somme d'une infinité dénombrable d'intervalles.

[1] La première partie de la démonstration m'a été communiquée par M. Szpilrajn. Dans cette partie l'hypothèse de séparabilité n'intervient guère.

[2] Cela *équivaut* à la continuité de la fonction g. Cf. Hausdorff: *Mengenlehre*, Berlin 1927, p. 194.

En appliquant successivement les formules (2), (3) et (4), il vient:

$$g^{-1}(H)=f^{-1}(H)-P=\sum_{n=1}^{\infty}f^{-1}(H_{k_n})-P=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(G_{k_n}-P_{k_n}+R_{k_n})-P$$

et comme $P_{k_n}+R_{k_n}\subset P$, il vient $(G_{k_n}-P_{k_n}+R_{k_n})-P=G_{k_n}-P$. Par conséquent

$$g^{-1}(H)=\sum_{n=1}^{\infty}G_{k_n}-P$$

et l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty}G_{k_n}$ étant ouvert, $g^{-1}(H)$ est ouvert dans $1-P$.

3. Nous dirons qu'un ensemble E *jouit de la propriété de Baire au sens étroit*, lorsque EX jouit relativement à X de la propriété de Baire au sens large, quel que soit X.

Il est à remarquer que l'on peut restreindre le domaine de variation de X aux ensembles *fermés*. En effet, si $E\overline{X}$ jouit de la propriété de Baire relativement à $\overline{X}$, on a $E\overline{X}=G\overline{X}-P_1+P_2$, où G est ouvert (au sens absolu) et P_1 et P_2 sont de I-re catégorie relativement à $\overline{X}$. Par conséquent

$$EX=GX-P_1X+P_2X$$

et les ensembles P_1X et P_2X étant de I-re catégorie dans $\overline{X}$, donc dans X, cette égalité prouve que EX jouit de la propriété de Baire relativement à X.

Le domaine de variation de X peut même être borné aux ensembles *parfaits*. Soit, en effet, $\overline{X}=N+C$ la décomposition de $\overline{X}$ en un ensemble parfait et un ensemble clairsemé (= ne contenant aucun ensemble dense-en-soi). Il vient $E\overline{X}=EN+EC$. L'ensemble EC (comme ensemble clairsemé) jouissant de la propriété de Baire, l'hypothèse que EN la possède relativement à N (donc à $\overline{X}$) implique que $E\overline{X}$ la possède également (relativement à $\overline{X}$).

En relativisant les énoncés des NN1 et 2 soit aux ensembles arbitraires, soit aux ensembles fermés (ou parfaits), on parvient à des énoncés analogues concernant la propriété de Baire au sens étroit.

Ainsi, en particulier, la propriété de Baire au sens étroit de E équivaut à celle que, quel que soit l'ensemble fermé F, l'ensemble EF est somme d'un ensemble G_δ relatif à F et d'un ensemble de I-re catégorie relativement à F. Or, F étant fermé, les ensembles G_δ relatifs sont des G_δ absolus; d'autre part, chaque ensemble Z fermé dans E étant de la forme $E\overline{Z}$, la condition précédente peut être énoncée de cette façon (condition de M. Sierpiński): *chaque ensemble Z fermé dans E est somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble de I-re catégorie dans Z.*

L'importance de ce dernier énoncé tient au fait que dans les espaces où la notion d'ensemble G_δ est un invariant topologique (par ex. dans les espaces métriques complets), cet énoncé implique directement l'invariance de la propriété de Baire au sens étroit.

Théorème sur les ensembles de première catégorie

Par

Stefan Banach (Lwów).

D'après un théorème élémentaire, *si, dans un espace métrique séparable, l'ensemble A est de I^{re} catégorie en chacun de ses points, il est tout entier un ensemble de I^{re} catégorie* [1]).

Je vais donner ici une démonstration de ce théorème qui est valable pour *chaque espace métrique*, qu'il soit séparable ou non. J'en indiquerai aussi plusieurs applications [2]).

1. Démonstration. Soit E un espace métrique. Soit

$$S_1,\ S_2, \dots,\ S_\alpha, \dots \tag{1}$$

une suite transfinie de sphères (ouvertes) disjointes et assujetties aux conditions suivantes: 1° AS_α est de I^{re} catégorie, 2° la suite (1) est saturée, c.-à-d. qu'il n'existe aucune sphère X telle que $XS_\alpha = 0$, pour chaque α, et que XA soit de I^{re} catégorie.

Posons: $S = S_1 + S_2 + \dots + S_\alpha + \dots$

Je dis que *l'ensemble $E - S$ est non-dense.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, cet ensemble, comme ensemble fermé, contiendrait une sphère X. Evidemment $XS_\alpha = 0$, pour

[1]) Espace métrique = espace où la distance est définie (voir Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, p. 94). L'espace est *séparable*, lorsqu'il contient une partie dense dénombrable. Un ensemble est dit *de I^{re} catégorie* (au sens de Baire), lorsqu'il est somme d'une série dénombrable d'ensembles non-denses; un ensemble X est dit non-dense, lorsque la fermeture de X, $\overline{X}$ ne contient aucune sphère. Un ensemble A est dit de I^{re} catégorie *au point p*, lorsqu'il existe un entourage G de p tel que l'ensemble AG est de I^{re} catégorie.

[2]) Les principaux résultats de cette note ont été présentés à la Soc. Pol. de Math. Lwów le 26. X. 1929.