abzählbare Menge $F = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ ohne Häufungspunkt, die also in E abgeschlossen ist. Da zwei isolierte Mengen gleicher Mächtigkeit stets homöomorph sind, so ist F sowohl mit der Zahlenmenge $F_1 = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ als auch mit $F_2 = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ homöomorph. Nach I ist dann E mit einem nicht beschränkten Raum E_1 und mit einem nicht vollständigen Raum E_2 (in dem F_2 abgeschlossen ist, d. h. eine Fundamentalfolge ohne Limes existiert) homöomorph.

Ein metrischer Satz über Diophantische Approximationen.

Von

Arnold Walfisz (Warszawa).

Man verdankt A. Khintchine folgenden metrischen Satz über Diophantische Approximationen:

Satz I: *Die Funktion $f(x)$ sei für $x \geqq 1$ positiv und stetig; für $x \to \infty$ nehme $x f(x)$ monoton gegen Null ab; das Integral*

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \tag{1}$$

divergiere. Dann besitzt die Ungleichung

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q} \tag{2}$$

für fast alle reellen θ unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen p, q mit

$$q > 0, \ (p, q) = 1 \text{ [1]}. \tag{3}$$

Als fast alle reellen θ bezeichnet man hierbei alle reellen θ bis

[1] A. Khintchine „Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen" [Mathematische Annalen **92** (1924), S. 115—125]. Zum Beweise verwendet Khintchine Hilfsmittel aus der Kettenbruchtheorie. In der späteren Abhandlung „Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen" [Mathematische Zeitschrift **24** (1926), S. 706—714 wird der Satz auf simultane Approximation mehrerer Zahlen verallgemeinert und mit rein metrischen Hilfsmitteln erledigt.

auf eine Menge N, die als lineare Punktmenge gedeutet das Lebesguesche Mass Null hat (bis auf eine Nullmenge).

Aus diesem Satz I werde ich einen anderen ableiten, der etwas mehr voraussetzt und etwas mehr aussagt, nämlich den

Satz II: *$f(x)$ erfülle die Voraussetzungen von Satz I, und überdies sei*

(4) $$\frac{f(x)}{f(2x)} \text{ für } x \geqq 1 \text{ beschränkt.}$$

Dann besitzt die Ungleichung

(5) $$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{f(k)}{k}$$

für fast alle reellen θ unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen h, k mit

(6) $$k > 0, \quad k \not\equiv 2 \pmod 4\,[2], \quad (h, k) = 1.$$

Einige einfache Bemerkungen, von denen ich später keinen Gebrauch mache, mögen die Tragweite von I und II erläutern helfen.

Für I ist es vollkommen nebensächlich, dass $(p, q) = 1$ in (3) verlangt wird (daher lässt auch Khintchine diese Bedingung weg). In der Tat darf man die rationalen θ übergehen, weil sie eine Nullmenge bilden, und für jedes irrationale θ besitzt (2) nur höchstens endlich viele Lösungen p, q mit $q > 0$ und festem Werte des Quotienten $\frac{p}{q}$. Dagegen macht bei II die in (6) erhobene Forderung $(h, k) = 1$ gerade das Satz aus. Lässt man nämlich diese Forderung fallen, so ist II eine einfache Folgerung aus I, wie man so einsieht: Mit 4θ durchläuft auch θ eine Menge fast aller Zahlen; ausserdem genügt mit $f(x)$ auch $f_1(x) = f(4x)$ den Bedingungen von Satz I. Daher ist für fast alle θ unendlich oft

$$\left|4\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{f_1(q)}{q},$$

also unendlich oft

$$\left|\theta - \frac{p}{4q}\right| < \frac{f_1(q)}{4q} = \frac{f(4q)}{4q},$$

also unendlich oft

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{f(k)}{k}; \; k > 0, \; k \equiv 0 \pmod 4.$$

Weder für I noch für II ist wesentlich, dass die Vergleichsfunktion $f(x)$ die auferlegten Bedingungen schon für $x \geqq 1$ erfüllt. Es genügt vielmehr, wenn es irgendein festes $\xi > 1$ gibt, sodass diese Bedingungen für $x \geqq \xi$ zutreffen. Man braucht nur $f(x)$ im Intervall $1 \leqq x \leqq \xi$ passend zu ergänzen, indem man etwa $f(1) = 2\xi f(\xi)$ nimmt und $x f(x)$ in jenem Intervall linear fortsetzt. Dann sind alle

[2] $\not\equiv$ ist die Negation von $\equiv$; es wird also verlangt, dass k einer der Restklassen 0 oder 1 oder 3 (mod 4) angehöre.

Voraussetzungen von I und II für dieses ergänzte $f(x)$ erfüllt, während die Ungleichungen (2) und (5) nur höchstens endlich viele Lösungen mit $q \leqq \xi$, $k \leqq \xi$ besitzen. Man darf also z. B. als Vergleichsfunktion für I und II

$$f(x) = \frac{1}{x \log x} \qquad (x \geqq 2)$$

benutzen. Ferner ist klar, dass die Forderung $\lim_{x=\infty} x f(x) = 0$ weder für I noch für II wesentlich ist. Denn ist diese Forderung nicht erfüllt, so hat man für $x \geqq \xi = \xi_f > 1$

$$f(x) > \frac{1}{x \log x},$$

sodass mit $\frac{1}{x \log x}$ als Vergleichsfunktion die Behauptungen a fortiori für das vorgelegte $f(x)$ bewiesen sind.

In I und II genügt es ferner, wenn $f(x)$ nur für ganzzahlige Werte der Variablen definiert ist. An Stelle von (1) tritt dann die Forderung, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

divergiere. Man braucht nur $n f(n)$ zwischen je zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen linear zu interpolierenden—wie ich es später beim Beweise von Satz II für die Funktion $\varphi(n)$ tue.

Baut man sich, wie dies bei den Anwendungen geschieht, die Khintchinesche Vergleichungsfunktion $f(x)$ aus der Log-Skala auf, indem man etwa setzt $f(x) =$

$$\frac{1}{x \log x}, \quad \frac{1}{x \log x \log\log x}, \quad \frac{1}{x \log x \log\log x \log\log\log x}, \ldots,$$

so ist der Quotient (4) stets für alle hinreichend grossen x beschränkt. Aber nicht jedes $f(x)$ aus I hat diese Eigenschaft. Denn man gehe von irgendeinem bestimmten $f(x)$ aus, das die Voraussetzungen I erfüllt, und wähle eine Folge wachsender natürlicher Zahlen

$$m_1 < m_2 < \ldots$$

irgendwie mit

$$m_1 = 1; \quad m_{2r} = 2 m_{2r-1}, \quad \frac{1}{(r+1)!} \int_{m_{2r}}^{m_{2r+1}} f(x)\, dx \geqq 1 \qquad (r \geqq 1).$$

Sodann setze man

$$f_1(x) = \frac{1}{(r+1)!} f(x) \quad \text{für} \quad m_{2r} \leqq x \leqq m_{2r+1}, \qquad r \geqq 1$$

und

$$f_1(x) = \frac{1}{r!} \lambda_r(x) f(x) \quad \text{für} \quad m_{2r-1} \leqq x \leqq m_{2r}, \qquad r \geqq 1,$$

wobei das lineare $\lambda_r(x)$ durch

$$\lambda_r(m_{2r-1}) = 1, \quad \lambda_r(m_{2r}) = \frac{1}{r+1}$$

festgelegt wird. Dann sind alle Voraussetzungen von I offenbar für $f_1(x)$ erfüllt, während andererseits

$$\frac{f_1(m_{2r-1})}{f_1(m_{2r})} = \frac{f_1(m_{2r-1})}{f_1(2m_{2r-1})} = (r+1)\frac{f(m_{2r-1})}{f(2m_{2r-1})} > r \to \infty.$$

Satz II wende ich zur Abschätzung der Potenzreihe

$$(7) \qquad \vartheta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$$

bei radialer Annäherung an fast alle Punkte des Konvergenzkreises an.

§ 1. Beweis von Satz II.

1. In diesem Paragraphen führe ich die folgenden Bezeichnungen ein: Grosse lateinische Buchstaben bedeuten Mengen reeller Zahlen θ, die als lineare Punktmengen auf der θ-Achse gedeutet werden. Der Buchstabe I ist für Intervalle vorbehalten, und zwar bedeutet $I_{\alpha,\beta}$ das abgeschlossene Intervall $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ $(\alpha < \beta)$. Mit N bezeichne ich unterschiedslos Nullmengen. Ist A definiert, so werde zur Abkürzung

$$A_{\alpha,\beta} = A\, I_{\alpha,\beta}$$

gesetzt. Zwei Mengen A und B heissen punktfremd, wenn

$$AB = 0$$

(eine leere Menge) ist. $\overline{A}$, $|A|$ bedeuten das obere Mass, das Mass von A;

$$\theta \in A, \quad \theta \,\bar{\in}\, A, \quad A \subset B$$

heisst: θ gehört zu A, θ gehört nicht zu A, A ist eine Teilmenge von B. Ist α eine beliebige feste reelle Zahl, so sei

$$A + \alpha$$

die Menge aller

$$\theta + \alpha, \quad \theta \in A.$$

Die kleinen lateinischen Buchstaben, mit Ausnahme des Funktionszeichens f und des Buchstaben x, bedeuten ganze Zahlen. Insbesondere mögen alle zusammengehörigen Paare p, q bzw. h, k (auch mit Nebenbezeichnungen, wie etwa h_1, k_1) die Bedingungen (3) bzw. (6) erfüllen. Der Buchstabe u ist für ungerade natürliche Zahlen $\geqq 3$ vorbehalten, der Buchstabe r für natürliche Zahlen.

2. Es sei von jetzt ab $f(x)$ eine beliebige aber feste Funktion, die die Voraussetzungen von Satz II erfüllt.

Die Menge $M = M(f)$ werde durch die beiden folgenden Bedingungen fixiert: M sei die Menge aller θ mit

$$(8) \qquad \theta \in I_{0,1};$$

(9) für jedes r hat die Ungleichung $\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < r\frac{f(k)}{k}$ höchstens endlich viele Lösungen.

Ich weise zunächst nach, dass M messbar ist. Zu diesem Zwecke führe ich einige Hilfsmengen ein.

1) Es sei $M^r_{h;k}$ die Menge aller θ mit

$$(10) \qquad \theta \in I_{0,1} \quad \text{und} \quad \left|\theta - \frac{h}{k}\right| \geqq r\frac{f(k)}{k};$$

2) es sei

$$(11) \qquad M^r_0 = \prod_{h,k} M^r_{h;k};$$

3) es sei

$$(12) \qquad P^r_{h;k} = I_{0,1} - M^r_{h;k};$$

4) für $s \geqq 1$ sei

$$(13) \qquad M^r_s = \sum_{h_1,k_1;\ldots;h_s,k_s} P^r_{h_1;k_1} \ldots P^r_{h_s;k_s} \prod_{h,k \neq h_1,k_1;\ldots;h_s,k_s} M^r_{h;k};$$

5) es sei

$$(14) \qquad M_r = \sum_{s=0}^{\infty} M^r_s;$$

6) schliesslich sei

$$(15) \qquad M^* = \prod_{r=1}^{\infty} M_r.$$

Ich behaupte, dass

$$(16) \qquad M^* = M$$

ist.

In der Tat sei erstens $\theta \in M^*$. Wegen (15) ist dann $\theta \in M_r$ für jedes $r \geqq 1$. Es sei jetzt r beliebig aber fest. Wegen (14) gibt es ein $s \geqq 0$ mit $\theta \in M_s^r$. Ist hierin $s=0$, so folgt aus (11), dass $\theta \in M_{h;k}^r$ für jedes Paar h, k. Wegen (10) ist dann (8) erfüllt, und hie Ungleichung (9) besitzt für das gegebene r überhaupt keine Lösung. Ist dagegen $\theta \in M_s^r$ mit einem $s \geqq 1$, so gibt es nach (13) ein System von s Paaren $h_1, k_1; \ldots; h_s, k_s$ so dass

(17) $\theta \in P_{h_1;k_1}^r, \ldots, \theta \in P_{h_s;k_s}^r, \theta \in M_{h;k}^r$ für $h, k \neq h_1, k_1; \ldots; h_s, k_s$

Wegen (12) und der ersten Beziehung (10) ist dann

$$\theta \bar{\in} M_{h_1;k_1}^r, \ldots, \theta \bar{\in} M_{h_s;k_s}^r, \theta \in M_{h;k}^r \text{ für } h, k \neq h_1; \ldots; h_s, k_s.$$

Aus (10) folgt jetzt, dass (8) erfüllt ist und die Ungleichung (9) genau die s Paare $h_1, k_1; \ldots; h_s, k_s$ als Lösungen besitzt. Ob nun also $s=0$ oder $s \geqq 1$, beidemal folgt $\theta \in M$.

Es sei jetzt zweitens $\theta \in M$. Dann ist zunächst (8) erfüllt. Ein beliebiges r werde vorgegeben. Hat (9) für dieses r keine Lösung, so folgt aus (10), dass $\theta \in M_{h;k}^r$ für alle Paare h, k. Wegen (11) ist dann $\theta \in M_0^r$; also folgt aus (14), dass $\theta \in M_r$. Besitzt dagegen (9) genau die s Lösungspaare $h_1, k_1; \ldots; h_s, k_s$, so folgt jetzt (17) aus (10) und (12). (13) und (17) ergeben $\theta \in M_s^r$; wegen (14) ist daher $\theta \in M_r$. Stets ist also $\theta \in M_r$ und da dies für jedes r zutrifft, so liefert (15) die Beziehung $\theta \in M^*$.

Aus den Definitionen (10), (11), (12), (13), (14) und (15) geht nacheinander hervor, dass $M_{h;k}^r$, M_0^r, $P_{h;k}^r$, M_s^r, M_r und M^* messbar sind. Wegen (16) ist daher auch M messbar.

Ich setze jetzt

(18) $$|M| = \mu.$$

3. Demnächst wird es sich darum handeln, das durch (18) gegebene μ nach oben abzuschätzen. Zu diesem Zwecke gebe ich in $I_{\frac{1}{2},1}$ zwei punktfremde Mengen an, deren jede das Mass $\frac{1}{2}\mu$ besitzt, womit dann

(19) $$\mu \leqq \tfrac{1}{2}$$

gezeigt ist.

Es sei ein beliebiges θ mit

(20) $$\theta \in I_{0,1}, \quad (1-\theta) \bar{\in} M$$

gegeben. Aus (8) und (9) folgt, dass für ein geeignetes r unendlich oft

$$\left|1-\theta-\frac{h'}{k'}\right| < r\frac{f(k')}{k'},$$

d. h. mit $h = k'-h'$, $k = k'$ unendlich oft

$$\left|\theta-\frac{h}{k}\right| < r\,\frac{f(k)}{k}$$

ist. Wegen (9) hat daher (20) zur Folge, dass

$$\theta \bar{\in} M.$$

Ersetzt man θ durch $1-\theta$, so folgt: aus

$$\theta \in I_{0,1}, \quad \theta \bar{\in} M$$

ergibt sich

$$(1-\theta) \bar{\in} M.$$

Die Beziehungen

$$\theta \in M, \quad (1-\theta) \in M$$

sind also stets gleichzeitig erfüllt. Mit anderen Worten: M liegt in $I_{0,1}$ symmetrisch zum Punkte $\theta = \frac{1}{2}$. Hieraus folgt wegen (18)

(21) $$|M_{0,\frac{1}{2}}| = |M_{\frac{1}{2},1}| = \tfrac{1}{2}\mu.$$

Damit ist jetzt in $M_{\frac{1}{2},1}$ eine der beiden in Aussicht gestellten Mengen gewonnen.

Ich zeige jetzt, dass

(22) $$(M_{0,\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2})\, M = N$$

ist

In der Tat: Es sei

(23) $$\theta' \in (M_{0,\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2});$$

dann ist also nach Definition der rechten Seite von (23)

(24) $$\theta' = \theta + \tfrac{1}{2}, \quad \theta \in M_{0,\frac{1}{2}}, \quad \text{also} \quad \theta \in M, \quad \theta \in I_{0,\frac{1}{2}},$$

woraus zunächst

(25) $$\theta' \in I_{\frac{1}{2},1} \subset I_{0,1}$$

folgt. Wegen $\theta \in M$ ist nach (9) höchstens endlich oft

$$\left|\theta-\frac{h}{k}\right| < \frac{f(k)}{k}.$$

Nach Satz I gibt es also eine Nullmenge N, sodass für $\theta \,\overline{\epsilon}\, N$ unendlich oft

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q}, \quad q \equiv 2 \pmod 4 \tag{26}$$

ist.

Aus der ersten Beziehung (24) folgt also, dass für $\theta' \,\overline{\epsilon}\, (N + \tfrac{1}{2}) = N$ unendlich oft

$$\left|\theta' - \frac{q+2p}{2q}\right| < \frac{f(q)}{q} \tag{27}$$

ist. Da ferner, (26) zufolge, $q \equiv 2 \pmod 4$ ist, so muss p ungerade, also $2p \equiv 2 \pmod 4$ sein. Man hat daher

$$q + 2p \equiv 0, \quad 2q \equiv 0 \pmod 4; \quad \tfrac{1}{2}q \equiv 1 \pmod 2$$

und somit

$$\frac{q+2p}{2q} = \frac{\frac{1}{2}(q+2p)}{\frac{1}{2}q} = \frac{h'}{k'}, \tag{28}$$

denn k' ist als Teiler der ungeraden Zahl $\frac{1}{2}q$ sicherlich selbst ungerade, also $\not\equiv 2 \pmod 4$. Wegen (28) ist ferner $k' \leqq q$. Aus der Monotonieeigenschaft von f folgt daher, in Verbindung mit (27), dass für $\theta' \,\overline{\epsilon}\, N$ unendlich oft

$$\left|\theta' - \frac{h'}{k'}\right| < \frac{f(k')}{k'}$$

ist. (25), (8) und (9) ergeben

$$\theta' \,\overline{\epsilon}\, M. \tag{29}$$

(23) hat daher entweder (29) oder

$$\theta' \,\epsilon\, N$$

zur Folge, womit (22) nachgewiesen ist.

Nach (22) ist, wegen $M_{\frac{1}{2},1} \subset M$,

$$(M_{0,\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2})\, M_{\frac{1}{2},1} = N,$$

also

$$((M_{0,\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}) - N)\, M_{\frac{1}{2},1} = 0. \tag{30}$$

Wegen (21) ist

$$|M_{0,\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2}\mu,$$

also

$$|(M_{0,\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}) - N| = \tfrac{1}{2}\mu. \tag{31}$$

Wegen (23), (24) und (25) ist ferner

$$(M_{0,\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}) \subset I_{\frac{1}{2},1},$$

also

$$((M_{0,\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}) - N) \subset I_{\frac{1}{2},1}. \tag{32}$$

Die linke Seite von (32) kann somit wegen (31) und (30) als zweite der in Aussicht gestellten punktfremden Mengen gewählt werden, womit (19) nachgewiesen ist.

4. Mit Hilfe von (19) soll jetzt

$$\frac{|M_{\alpha,\beta}|}{\beta - \alpha} \leqq \tfrac{3}{4} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1 \tag{33}$$

nachgewiesen werden.

Es sei

$$\theta \,\epsilon\, M_{0,1-\frac{1}{u}}, \quad \theta' = \theta + \frac{1}{u}. \tag{34}$$

Dann ist zunächst

$$\theta' \,\epsilon\, I_{\frac{1}{u},1} \subset I_{0,1}. \tag{35}$$

Wegen $M_{0,1-\frac{1}{u}} \subset M$ ist ferner nach (9) für jedes r höchstens endlich oft

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < r\frac{f(k)}{k},$$

also wegen (34) höchstens endlich oft

$$\left|\theta' - \frac{k+uh}{uk}\right| < r\frac{f(k)}{k}. \tag{36}$$

Ich setze jetzt

$$\frac{k+uh}{uk} = \frac{h'}{k'}. \tag{37}$$

Das ist zulässig, denn für ungerades k ist k' als Teiler von uk ungerade und für gerades k, also $k \equiv 0 \pmod 4$, ist h ungerade, also $k + uh$ ungerade, also $k' \equiv 0 \pmod 4$; jedenfalls ist somit $k' \not\equiv 2 \pmod 4$, d. h. (6) erfüllt.

Umgekehrt ordnet (37) jedem Paar h', k' eindeutig ein Paar h, k zu. Denn $(h, k) = 1$, $k \equiv 2 \pmod 4$ hätte ungerades h, also ungerades $k + uh$, also $k' \equiv 2 \pmod 4$ zur Folge.

Nunmehr sei

$$k = (u, k)\, l, \quad u = (u, k)\, v, \tag{38}$$

also $(l, v) = 1$ und daher

(39) $(l+vh, vl) = (l+vh, v)\,(l+vh, l) = (l, v)\,(vh, l) = (h, l) = 1$

wegen $(h, k) = 1$. Aus (38) folgt

$$\frac{k+uh}{uk} = \frac{l+vh}{(u, k)\,vl};$$

in Verbindung mit (39) und (37) ergibt dies

$$k' \geqq vl,$$

d. h. wegen (38)

$$k' \geqq l \geqq \frac{k}{u}, \quad k \leqq uk'.$$

Wegen (36) und (37) ist daher höchstens endlich oft

(40) $$\left|\theta' - \frac{h'}{k'}\right| < \frac{r}{u}\,\frac{f(uk')}{k'}.$$

(4) besagt, dass es eine Konstante $c = c_f > 0$ mit

(41) $$\frac{f(x)}{f(2x)} \leqq c \quad (x \geqq 1)$$

gibt. Nunmehr werde die natürliche Zahl $n = n(u)$ durch

$$u \leqq 2^n < 2u$$

bestimmt. Dann ist nach (41)

$$\frac{f(k')}{f(uk')} \leqq \frac{f(k')}{f(2^n k')} = \frac{f(k')}{f(2k')}\,\frac{f(2k')}{f(4k')} \cdots \frac{f(2^{n-1}k')}{f(2^n k')} \leqq c^n$$

oder

(42) $$f(uk') \geqq c^{-n} f(k').$$

Aus (40) und (42) folgt, dass höchstens endlich oft

(43) $$\left|\theta' - \frac{h'}{k'}\right| < \frac{r}{uc^n}\,\frac{f(k')}{k'}$$

ist.

Nun sei ein beliebiges r' vorgegeben. Dann nehme ich

$$r \geqq uc^n r'$$

(wegen $c \geqq 1$ ist von selbst $r \geqq 1$). Aus (43) folgt dann, dass höchstens endlich oft

(44) $$\left|\theta' - \frac{h'}{k'}\right| < r'\frac{f(k')}{k'}$$

ist.

Wegen (35), (44), (8) und (9) ist also

(45) $$\theta' \in M_{\frac{1}{u},1}.$$

Umgekehrt sei jetzt

(46) $$\theta \in M_{\frac{1}{u},1}, \quad \theta'' = \theta - \frac{1}{u}.$$

Wegen der in **3** bewiesenen Symmetrieeigenschaft von M ist dann zunächst

$$1 - \theta \subset M_{0,1-\frac{1}{u}}.$$

Wendet man jetzt (34) mit $1-\theta$ statt θ an, so liefert (35)

$$1 - \theta + \frac{1}{u} \subset M_{\frac{1}{u},1},$$

woraus unter abermaliger Benutzung der Symmetrie von M

$$1 - \left(1 - \theta + \frac{1}{u}\right) = \theta - \frac{1}{u} \in M_{0,1-\frac{1}{u}},$$

also wegen (46)

(47) $$\theta'' \in M_{0,1-\frac{1}{u}}.$$

folgt.

Die Tatsache, dass (45) aus (34) und (47) aus (46) folgt lässt sich mit anderen Worten so ausdrücken: Jeder Punkt von M geht bei Verschiebung um ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{u}$ nach rechst oder links wieder in einen Punkt von M über, wenn bei dieser Verschiebung das Interval $I_{0,1}$ nicht verlassen wird.

Insbesondere ist also

$$M_{\frac{a}{u},\frac{a+1}{u}} = M_{0,\frac{1}{u}} + \frac{a}{u} \quad (0 \leqq a < u)$$

und somit

(48) $$\left|M_{\frac{a}{u},\frac{a+1}{u}}\right| = \left|M_{0,\frac{1}{u}}\right| \quad (0 \leqq a < u).$$

Wegen

$$\sum_{0 \leqq a < u} \left|M_{\frac{a}{u},\frac{a+1}{u}}\right| = |M_{0,1}| = |M| = \mu$$

liefert (48)

$$|M_{0,\frac{1}{u}}| = \frac{1}{u}\mu$$

und nochmals (48)

(49) $$|M_{\frac{a}{u},\frac{a+1}{u}}| = \frac{1}{u}\mu \quad (0 \leqq a < u).$$

Es sei jetzt ein Zahlenpaar α, β mit (33) beliebig vorgegeben Ein u mit

$$\frac{1}{u} < \frac{|I_{\alpha,\beta}|}{4}$$

werde gewählt. Zu diesem u lassen sich dann zwei Zahlen a_1, a_2 mit

$$0 \leqq a_1 < a_2 \leqq u$$

so bestimmen, dass

(50) $$I_{\alpha,\beta} \subset I_{\frac{a_1}{u},\frac{a_2}{u}}$$

und

(51) $$|I_{\frac{a_1}{u},\frac{a_2}{u}}| \leqq |I_{\alpha,\beta}| + \frac{2}{u} \leqq \frac{3}{2}|I_{\alpha,\beta}|$$

ist. Aus (50) und (49) folgt

$$|M_{\alpha,\beta}| \leqq |M_{\frac{a_1}{u},\frac{a_2}{u}}| = \frac{a_2 - a_1}{u}\mu$$
$$= |I_{\frac{a_1}{u},\frac{a_2}{u}}|\,\mu.$$

Wegen (51) ist demnach

(52) $$|M_{\alpha,\beta}| \leqq \tfrac{3}{2}|I_{\alpha,\beta}|\,\mu.$$

(52) und (19) liefern (33).

5. Den Ausdruck

$$\frac{\bar{A}_{\alpha,\beta}}{\beta - \alpha} = \Delta(\alpha, \beta)$$

bezeichnet K. Knopp als Dichte (genauer mittlere äussere Dichte) von A bezüglich $I_{\alpha,\beta}$[3]). Knopp zeigt ferner: *„Ist eine in einem Intervall I gelegene Menge A so beschaffen, dass für jedes Teilintervall*

[3]) K. Knopp „Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten" [Mathematische Annalen **95** (1925), S. 409—426], S. 412.

$I_{\alpha,\beta}$ die dortige Dichte $\Delta(\alpha,\beta)$ unterhalb eines festen echten Bruches ϑ bleibt, so ist A eine Nullmenge" [4]).

Diesen Satz kann ich wegen (8) und (33) mit $I = I_{0,1}$, $A = M$ anwenden, da dann $\vartheta = \frac{3}{4}$ zulässig ist. Also ist

$$M = N$$

und daher auch für jedes m

(53) $$M + m = N.$$

Es sei jetzt M^∞ die Menge aller θ mit (9) (die Forderung (8) lasse ich jetzt fallen). Aus (8) und (9) folgt sofort

(54) $$M_{0,1}^\infty = M.$$

Es sei

(55) $$\theta \in M^\infty,\ m \text{ beliebig}.$$

Wäre $(\theta + m)\,\bar{\epsilon}\,M^\infty$, so gäbe es nach (9) ein passendes r, so dass die Ungleichung

$$\left|\theta + m - \frac{h'}{k'}\right| < r\frac{f(k')}{k'}$$

unendlich viele Lösungen besässe. Mit

$$h = h' - mk', \quad k = k'$$

würde dann auch die Ungleichung (9) unendlich viele Lösungen besitzen, gegen die Voraussetzung (55). Aus (55) folgt daher

$$(\theta + m) \in M^\infty.$$

Es ist mithin, in Verbindung mit (54),

$$M^\infty = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_{m,m+1}^\infty = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(M_{0,1}^\infty + m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(M + m).$$

(53) ergibt jetzt

(56) $$M^\infty = N.$$

6. Es erfülle $f(x)$ die Voraussetzungen von II. Ich will jetzt eine Funktion $\varphi(x)$ konstruieren, welche diese Voraussetzungen ebenfalls erfüllt, und für die überdies

[4]) l. c., Satz 2, S. 412—413.

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{f(n)} = 0 \tag{57}$$

ist. Diese Konstruktion erfolgt in zwei Etappen.

1) Aus der Divergenz von (1) folgt

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(m) \text{ divergiert.} \tag{58}$$

In der Tat ist für $n \to \infty$, wegen der Monotonie von $f(x)$

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) \geqq \sum_{m=1}^{n} \int_{m}^{m+1} f(x)\, dx = \int_{1}^{n+1} f(x)\, dx \to \infty.$$

Ich setze jetzt

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) = \sigma_n \quad (n \geqq 1), \quad \sigma_0 = 0 \tag{59}$$

und definiere

$$\varphi(n) = \frac{f(n)}{\sqrt{\sigma_n} + \sqrt{\sigma_{n-1}}} \quad (n \geqq 1). \tag{60}$$

Dann ist zunächst klar, dass

$$\varphi(n) > 0 \quad (n \geqq 1). \tag{61}$$

Zweitens ist

$$n\,\varphi(n) \text{ monoton gegen Null abnehmend.} \tag{62}$$

Denn für $1 \leqq n_1 < n_2$ ergibt sich mit Hilfe von (60) und (59)

$$n_1\,\varphi(n_1) = \frac{n_1 f(n_1)}{\sqrt{\sigma_{n_1}} + \sqrt{\sigma_{n_1-1}}} > \frac{n_1 f(n_1)}{\sqrt{\sigma_{n_2}} + \sqrt{\sigma_{n_2-1}}} \geqq \frac{n_2 f(n_2)}{\sqrt{\sigma_{n_2}} + \sqrt{\sigma_{n_2-1}}} = n_2\,\varphi(n_2)$$

und

$$n_1\,\varphi(n_1) \leqq \frac{n_1 f(n_1)}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_0}} = \frac{1}{f(1)}\, n_1 f(n_1) \to 0$$

für $n_1 \to \infty$.

Drittens ist leicht einzusehen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \text{ divergiert.} \tag{63}$$

Denn aus (60) und (59) folgt

$$\varphi(n) = \frac{f(n)\,(\sqrt{\sigma_n} - \sqrt{\sigma_{n-1}})}{\sigma_n - \sigma_{n-1}} = \sqrt{\sigma_n} - \sqrt{\sigma_{n-1}},$$

also wegen (58), (59) für $n \to \infty$

$$\sum_{m=1}^{n} \varphi(m) = \sum_{m=1}^{n} (\sqrt{\sigma_m} - \sqrt{\sigma_{m-1}}) = \sqrt{\sigma_n} \to \infty.$$

Wegen der Monotonie von f ist ferner für $n \geqq 1$ nach (59)

$$\sum_{m=n+1}^{2n} f(m) \leqq \sum_{m=1}^{n} f(m) = \sigma_n,$$

also

$$\sigma_{2n} = \sigma_n + \sum_{m=n+1}^{2n} f(m) \leqq 2\sigma_n,$$

also

$$\frac{\sqrt{\sigma_{2n}} + \sqrt{\sigma_{2n-1}}}{\sqrt{\sigma_n} + \sqrt{\sigma_{n-1}}} \leqq \frac{2\sqrt{\sigma_{2n}}}{\sqrt{\sigma_n}} \leqq 3. \tag{64}$$

Aus (60), (41) und (64) folgt

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = \frac{f(n)}{f(2n)} \frac{\sqrt{\sigma_{2n}} + \sqrt{\sigma_{2n-1}}}{\sqrt{\sigma_n} + \sqrt{\sigma_{n-1}}} \leqq c' \quad (n \geqq 1) \tag{65}$$

mit $c' = c_f' = 3c$.

Schliesslich ist (57) erfüllt; denn aus (60), (59) und (58) folgt für $n \to \infty$

$$\frac{\varphi(n)}{f(n)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_n} + \sqrt{\sigma_{n-1}}} \leqq \frac{1}{\sqrt{\sigma_n}} \to 0.$$

2) Ich setze jetzt für $n \geqq 1$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = &- (n\,\varphi(n) - (n+1)\,\varphi(n+1)) + \\ &+ \frac{n\,(n+1)}{x} (\varphi(n) - \varphi(n+1)) \quad (n \leqq x \leqq n+1) \end{aligned} \tag{66}$$

und behaupte, dass $\varphi(x)$ allen Anforderungen genügt.

Zunächst einmal nimmt die rechte Seite von (66) für $x = n$ den Wert $\varphi(n)$, für $x = n+1$ den Wert $\varphi(n+1)$ an, wie es sich gehört. Da ferner $\varphi(x)$ wegen (66) im Intervall $I_{n,n+1}$ stetig ist, so ist $\varphi(x)$ für $x \geqq 1$ stetig.

(67) $$\varphi(x) > 0 \quad (x \geqq 1)$$

ist für ganze x wegen (61) erfüllt und für $n < x < n+1$ folgt es aus (66), da wegen (62) $\varphi(n)$ monoton abnimmt, so:

$$\varphi(x) \geqq -(n\varphi(n)-(n+1)\varphi(n+1)) + \frac{n(n+1)}{n+1)}(\varphi(n)-\varphi(n+1)) = \\ = \varphi(n+1) > 0.$$

(68) $$x\,\varphi(x) \text{ monoton gegen Null abnehmend}$$

ist für ganze x wegen (62) erfüllt und für $n \leqq x_1 < x_2 \leqq n+1$ folgt aus (66) sowie (62)

$$x_1\,\varphi(x_1) - x_2\,\varphi(x_2) = (n\,\varphi(n)-(n+1)\,\varphi(n+1))\,(x_2-x_1) \geqq 0.$$

Ferner ist wegen der Monotonie von $\varphi(x)$ und (63) für $n \to \infty$

$$\int_1^{n+1} \varphi(x)\,dx = \sum_{m=1}^{n} \int_m^{m+1} \varphi(x)\,dx \geqq \sum_{m=1}^{n} \varphi(m+1) \to \infty,$$

also

(69) $$\int_1^{\infty} \varphi(x)\,dx \quad \text{divergent.}$$

Schliesslich ist wegen der Monotonie von $\varphi(x)$ und (65) für $x \geqq 1$, $n \leqq x < n+1$

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} \leqq \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n+2)} \leqq \frac{\varphi(n)}{\varphi(4n)} = \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}\,\frac{\varphi(2n)}{\varphi(4n)} \leqq c'^2,$$

also

(70) $$\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} \quad \text{für} \quad x \geqq 1 \quad \text{beschränkt.}$$

67), (68), (69) und (70) zeigen jetzt, dass die in Aussicht gestellte Konstruktion von $\varphi(x)$ durchgeführt ist.

7. Es erfülle $f(x)$ die Voraussetzungen von II, $\varphi(x)$ sei die zu $f(x)$ nach **6** konstruierte Funktion. Zu $\varphi(x)$ bilde ich die Menge

(71) $$M^{\infty} = M^{\infty}(\varphi).$$

Zu jedem θ, das nicht (71) angehört, also nach (56) *zu fast jedem* θ,

gibt es wegen (9) mit φ statt f ein passendes r, so dass die Ungleichung

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < r\,\frac{\varphi(k)}{k}$$

unendlich viele Lösungen mit (6) besitzt. Wegen (57) ist für alle hinreichend grossen k

$$r\,\varphi(k) < f(k).$$

Also besitzt auch die Ungleichung (5) unendlich viele Lösungen mit (6).

§ 2. Anwendung.

Für die Potenzreihe

(7) $$\vartheta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$$

werde ich mit Hilfe von II zeigen, dass bei radialer Annäherung

(72) $$z = r\,e^{2\pi i\theta}, \quad r \to 1$$

an fast alle Punkte des Konvergenzkreises

(73) $$\vartheta(z) = \Omega\left\{\sqrt[4]{\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}}\right\}$$

ist.

Die Behauptung (73) ist, wie aus (72) hervorgeht, mit

(74) $$\vartheta(e^{-2\pi(\varrho - i\theta)}) = \Omega\left\{\sqrt[4]{\frac{1}{\varrho}\log\frac{1}{\varrho}}\right\} \quad (\varrho > 0,\ \varrho \to 0)$$

gleichwertig.

Es sei h, k irgendein Zahlenpaar mit (6) Ich setze ferner zur Abkürzung

(75) $$\varrho - i\left(\theta - \frac{h}{k}\right) = w.$$

Dann ist also

$$\varrho - i\,\theta = w - i\,\frac{h}{k}$$

und wegen (72)

$$\vartheta\left(e^{-2\pi(\varrho-i\theta)}\right)=\vartheta\left(e^{-2\pi\left(w-i\frac{h}{k}\right)}\right)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi\left(w-i\frac{h}{k}\right)m^2}$$

$$=\sum_{a=0}^{k-1}\sum_{b=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi\left(w-i\frac{h}{k}\right)(a+bk)^2}$$

$$=\sum_{a=0}^{k-1}e^{\frac{2\pi iha^2}{k}}\sum_{b=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi w(a+bk)^2}$$

$$(76)\qquad =\frac{1}{k\sqrt{2w}}\sum_{a=0}^{k-1}e^{\frac{2\pi iha^2}{k}}\sum_{b=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi b^2}{2k^2w}+\frac{2\pi iab}{k}},$$

wobei die Wurzel mit positivem Realteil auszuziehen ist [5]).

Aus (76) folgt weiter

$$(77)\qquad \vartheta\left(e^{-2\pi(\varrho-i\theta)}\right)=S_1+S_2,$$

$$(78)\qquad S_1=\frac{1}{k\sqrt{2w}}\sum_{a=0}^{k-1}e^{\frac{2\pi iha^2}{k}},$$

$$(79)\qquad S_2=\frac{1}{k\sqrt{2w}}\sum_{a=0}^{k-1}e^{\frac{2\pi iha^2}{k}}\sum_{b\neq 0}e^{-\frac{\pi b^2}{2k^2w}+\frac{2\pi iab}{k}}.$$

Bekanntlich ist

$$\left|\sum_{a=0}^{k-1}e^{\frac{2\pi iha^2}{k}}\right|=\begin{cases}\sqrt{k} & \text{für } k\equiv 1 \pmod 2\\ \sqrt{2k} & \text{für } k\equiv 0 \pmod 4\text{ [6]).}\end{cases}$$

Jedenfalls ist also

$$\left|\sum_{a=0}^{k-1}e^{\frac{2\pi iha^2}{k}}\right|\geqq\sqrt{k}$$

[5]) Vgl. hierzu A. Krazer „Lehrbuch der Thetafunktionen" (Leipzig 1903, B. G. Teubner), S. 97, Formel (21).

[6]) Dagegen verschwindet die Summe für $k\equiv 2 \pmod 4$ und daran liegt es, wie der folgende Beweis zeigt, dass diese k-Werte ausgesondert werden müssen.

und daher wegen (78)

$$(80)\qquad |S_1|\geqq\frac{1}{\sqrt{2k|w|}}.$$

Für die Summe (79) gibt die triviale Abschätzung, wegen (75),

$$|S_2|\leqq\frac{1}{k\sqrt{2|w|}}\sum_{a=0}^{k-1}\sum_{b\neq 0}e^{-\frac{\pi\varrho b^2}{2|kw|^2}},$$

also

$$(81)\qquad |S_2|\leqq\sqrt{\frac{2}{|w|}}\sum_{b=1}^{\infty}e^{-\frac{\pi\varrho b^2}{2|kw|^2}}.$$

(77), (80) und (81) ergeben

$$(82)\qquad \left|\vartheta\left(e^{-2\pi(\varrho-i\theta)}\right)\right|\geqq\frac{1}{\sqrt{2k|w|}}-\sqrt{\frac{2}{|w|}}\sum_{b=1}^{\infty}e^{-\frac{\pi\varrho b^2}{2|kw|^2}}.$$

Ich wende jetzt Satz II mit

$$(83)\qquad f(x)=\frac{1}{2x\log 2x}\quad(x\geqq 1)$$

an. Danach gibt es unendlich viele Brüche $\frac{h}{k}$ mit (6), so dass

$$(84)\qquad \left|\theta-\frac{h}{k}\right|<\frac{1}{2k^2\log 2k}$$

ist. Für jeden solchen Bruch bestimme ich $\varrho=\varrho_k$ durch

$$(85)\qquad \frac{1}{\varrho}=k^2\log 2k,$$

sodass also $\varrho\to 0$ für $k\to\infty$.

Aus (75) folgt

$$(86)\qquad |w|\geqq\varrho;$$

aus (75), (84) und (85) folgt

$$(87)\qquad |w|\leqq\varrho+\left|\theta-\frac{h}{k}\right|\leqq\tfrac{3}{2}\varrho.$$

Wegen (87) ist

$$(88)\qquad \frac{1}{\sqrt{2k|w|}}\geqq\frac{1}{\sqrt{3k\varrho}}\geqq\frac{1}{2\sqrt{k\varrho}}.$$

Ich schätze jetzt den zweiten Bestandteil der rechten Seite von (82) nach oben ab. Aus (86), (87) und (85) folgt

$$\sqrt{\frac{2}{|w|}}\sum_{b=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi\varrho b^2}{2|kw|^2}} \leqq \sqrt{\frac{2}{|w|}}\sum_{b=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi\varrho b}{2|kw|^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{|w|}}\,\frac{e^{-\frac{\pi\varrho}{2|kw|^2}}}{1-e^{-\frac{\pi\varrho}{2|kw|^2}}} \leqq \sqrt{\frac{2}{\varrho}}\,\frac{e^{-\frac{2\pi}{9k^2\varrho}}}{1-e^{-\frac{2\pi}{9k^2\varrho}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\varrho}}\,\frac{e^{-\frac{2\pi\log 2k}{9}}}{1-e^{-\frac{2\pi\log 2k}{9}}} \leqq \sqrt{\frac{2}{\varrho}}\,\frac{e^{-\frac{2\log 2k}{3}}}{1-e^{-\frac{2}{3}\log 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\varrho}}\,\frac{(2k)^{-\frac{2}{3}}}{1-2^{-\frac{2}{3}}} \leqq \sqrt{\frac{1}{\varrho}}\,\frac{k^{-\frac{2}{3}}}{1-2^{-\frac{2}{3}}}$$

(89) $$= \frac{k^{-\frac{1}{6}}}{1-2^{-\frac{2}{3}}}\,\frac{1}{\sqrt{k\varrho}}.$$

Wenn also überdies

(90) $$k \geqq \left(\frac{4}{1-2^{-\frac{2}{3}}}\right)^6$$

angenommen wird, so folgt aus (89)

(91) $$\sqrt{\frac{2}{|w|}}\sum_{b=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi\varrho b^2}{2|kw|^2}} \leqq \frac{1}{4\sqrt{k\varrho}}.$$

(82), (88) und (91) ergeben für alle unsere k mit (90)

(92) $$|\vartheta(e^{-2\pi(\varrho-i\theta)})| \geqq \frac{1}{4\sqrt{k\varrho}}.$$

Aus (85) folgt (die asymptotischen Gleichungen beziehen sich auf wachsendes k)

$$\log\frac{1}{\varrho} \sim 2\log k \sim 2\log 2k,$$

$$\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{2}\varrho\log\frac{1}{\varrho},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sim \left(\frac{1}{2}\varrho\log\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}},$$

(93) $$\frac{1}{\sqrt{k\varrho}} \sim \left(\frac{1}{2\varrho}\log\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

(92) und (93) ergeben (74), d. h. (73).

Die beiden letzten Abschätzungen lassen sich mühelos verschärfen. Man braucht hierzu nur (83), (84) und (85) etwa durch

(83 a) $$f(x) = \frac{1}{2x\log 2x\log\log 27x},$$

(84 a) $$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{2k^2\log 2k\log\log 27k},$$

(85 a) $$\frac{1}{\varrho} = k^2\log 2k\log\log 27k$$

zu ersetzen. Wegen

$$\log\log 27k \geqq \log\log 27 \geqq 1$$

gelten dann (87), (88), (89) und (91) mit (90), also (92) mit (90). Ferner folgt aus (85 a).

$$\log\frac{1}{\varrho} \sim 2\log k \sim 2\log 2k,$$

$$\log\log\frac{1}{\varrho} \sim \log\log k \sim \log\log 27k,$$

$$\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{2}\varrho\log\frac{1}{\varrho}\log\log\frac{1}{\varrho},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k\varrho}} \sim \left(\frac{1}{2\varrho}\log\frac{1}{\varrho}\log\log\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Auf diese Weise ergibt sich

$$\vartheta(e^{-2\pi(\varrho-i\theta)}) = \Omega\left(\frac{1}{\varrho}\log\frac{1}{\varrho}\log\log\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}},$$

d. h.

(94) $$\vartheta(z) = \Omega\left(\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Durch Hinzuziehung einer weiteren Log-Iteration erhält man

$$\vartheta(z) = \Omega\left(\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}\log\log\frac{1}{1-r}\log\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{95}$$

und dieses Spiel lässt sich nach Belieben fortsetzen.

Schon die Abschätzung (73) ist aber ziemlich scharf. Man hat nämlich unter den gleichen Voraussetzungen nach oben

$$\vartheta(z) = O\left\{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\frac{1}{1-r}\right\} \tag{96}$$

für beliebiges festes $\varepsilon > 0$. Zum Beweise von (96) verwende ich die „andere Hälfte" des Khintchineschen Satzes I, nämlich den folgenden Satz Ia, welcher kurz gesagt lautet:

Satz Ia: *Die Ungleichung* (2) *besitzt höchstens endlich viele Lösungen, wenn das Integral* (1) *konvergiert* [7]).

Ich bezeichne von jetzt ab mit c unterschiedslos positive Konstanten, die nur von θ und ε abhängen dürfen. Wählt man

$$f(x) = \frac{1}{x\log^{1+\varepsilon}3x} \qquad (x \geqq 1), \tag{97}$$

so liefert Satz Ia: Gehört θ einer geeigneten Menge fast aller Zahlen an, so ist

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geqq \frac{c}{q^2\log^{1+\varepsilon}3q} \tag{98}$$

für jedes Paar ganzer Zahlen p, q mit $q > 0$.

Ich nehme jetzt ohne Beschrankung der Allgemeinheit $0 < \theta < 1$, θ irrational an. Es sei

$$\theta = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \cdots \tag{99}$$

die Entwicklung von θ in einen regelmässigen unendlichen Kettenbruch; $\frac{p_n}{q_n}$ $(n \geqq 1)$ möge der n-te Näherungsbruch der Darstellung (99) sein. Es ist dann bekanntlich

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}. \tag{100}$$

Aus (98) folgt andererseits

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| \geqq \frac{c}{q_n^2\log^{1+\varepsilon}3q_n}. \tag{101}$$

(100) und (101) ergeben

$$q_{n+1} \leqq c\, q_n \log^{1+\varepsilon}3q_n. \tag{102}$$

Aus dem Beweise von Hilfssatz 2 meiner dritten Ellipsoidarbeit [8]) folgt nunmehr

$$\left|\sum_{n=0}^{N} e^{2\pi i n^2\theta}\right| \leqq c\sqrt{N}\log^{\frac{1}{4}+\varepsilon}N \qquad (N \geqq 2). \tag{103}$$

Nach (7) und (72) ist

$$\vartheta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{n^2} e^{2\pi i n^2\theta}$$

$$= -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} r^{n^2} e^{2\pi i n^2\theta}$$

$$= -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} k_n r^n e^{2\pi i n\theta}, \tag{104}$$

wober

$$k_n = \begin{cases} 1, \text{ wenn } n \text{ eine Quadratzahl} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{105}$$

ist.

Setze ich

$$\sum_{n=0}^{N} k_n e^{2\pi i n\theta} = T(N) \qquad (N \geqq 0), \tag{106}$$

[7]) Um die Darstellung einheitlicher zu gestalten, verzichte ich auf einen bekannten älteren Borel-Bernsteinschen Satz, welcher für unsere Zwecke dieselben Dienste leistet und in ähnlichem Zusammenhange zuerst von Hardy und Littlewood benutzt worden ist. Übrigens sei hervorgehoben, dass Khintchine (vgl. seine erste in der Fussnote 1) erwähnte Abhandlung) Ia in 11 Zeilen auf die einfachste Art beweist.

[8]) „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Dritte Abhandlung." [Mathematische Zeitschrift **27** (1927), S. 245—268]; vgl. insbesondere zu (102) die dortige Formel (99).

so folgt aus (104) und (106)

$$\vartheta(z) = -1 + 2(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, r^n. \tag{107}$$

Aus (105), (106), (107) und (103) ergibt sich für $r \geqq \frac{2}{3}$

$$|\vartheta(z)| \leqq c\left(1 + (1-r)\sum_{n=4}^{\infty} |T(n)|\, r^n\right)$$

$$\leqq c\left(1 + (1-r)\sum_{n=4}^{\infty} n^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}+\varepsilon} n\, r^n\right)$$

$$\leqq c\left(1 + (1-r)\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{5}{4}} \log^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \frac{1}{1-r}\right)$$

$$\leqq c\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \frac{1}{1-r},$$

womit (96) nachgewiesen ist.

Zieht man, statt die Wahl (97) vorzunehmen, noch eine weitere Log-Iteration hinzu, setzt also analog zu (83a)

$$f(x) = \frac{1}{x \log 3x\, (\log\log 27x)^{1+\varepsilon}},$$

so liefert die Anwendung von Satz Ia nach obigem Muster statt (96) die schärfere Abschätzung

$$\vartheta(z) = O\left\{\left(\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right\},$$

welche insbesondere mit (94) zu vergleichen ist. Die weitere Station ist dann

$$\vartheta(z) = O\left\{\left(\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\log\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right\},$$

als Gegenstück zu (95). Schreitet man auf diese Weise von beiden Seiten fort, so lassen sich die O-Ω-Abschätzungen bis auf einen beliebig oft iterierten Logarithmus nahebringen, ohne dass eine vollständige Anpassung möglich wird.

Ich möchte noch erwähnen, dass Hardy und Littlewood für den Fall, dass das irrationale θ beschränkte Kettenbruchnenner a_n in (99) besitzt (diese θ bilden allerdings nur eine Nullmenge), das betreffende O-Ω-Problem mit dem Ergebnis

$$\vartheta(z) = O\left\{\sqrt[4]{\frac{1}{1-r}}\right\}, \qquad \vartheta(z) = \Omega\left\{\sqrt[4]{\frac{1}{1-r}}\right\}$$

vollständig gelöst haben [9].

[9]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood „Some problems of Diophantine Approximation. II. The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ-functions" [Acta Mathematica **37** (1914), S. 193—239], Theorem 2.25.

Radość, den 22. Juni 1930.