je dis que c'est l'ensemble cherché. On vérifie sans peine que Q possède les propriétés 1) et 2). On a d'après (C_2), (C_4):

(23) $$\|P_x(Q)\| = \lim_{n\to\infty} \|P_x(Q_n)\| \leqq \lim_{n\to\infty} (\tfrac{2}{3})^n = 0$$

et d'après (C_2), (C_5)

(24) $$\|P_y(Q)\| = \lim \|P_y(Q_n)\| \leqq \lim (\tfrac{2}{3})^n = 0.$$

Soit maintenant α un nombre positif, il existe alors un nombre naturel q tel que $\frac{1}{q} \leqq \alpha \leqq q$; on aura pour $n \geqq q$ d'après (C_2), (C_6):

(25) $$P_y(T_\alpha(Q_n)) = P_y(T_\alpha(\Phi_n(Q_{n-1}))) = P_y(T_\alpha(Q_{n-1}))$$

donc:

(26) $$P_y(T_\alpha(Q)) = P_y(T_\alpha(Q_{q-1}))$$

(27) $$\|P_y(T_\alpha(Q))\| = \|P_y(T_\alpha(Q_{q-1}))\| > 0$$

c. q. f. d.

Swider 8/VII 1930.

Erweiterung einer Homöomorphie.

Von

Felix Hausdorff (Bonn).

Wir wollen den folgenden Satz über metrische Räume E, F, $\overline{F}$, $\overline{E}$ beweisen:

I. *Ist F in E abgeschlossen, so lässt sich eine Homöomorphie zwischen F und $\overline{F}$ zu einer Homöomorphie zwischen E und einem geeigneten Raum $\overline{E}$ erweitern.*

Mit andern Worten: es wird die Möglichkeit einer „Ummetrisierung" behauptet. Statt der alten Entfernungen uv, die den metrischen Raum E definieren, lassen sich neue Entfernungen $\overline{uv}$ einführen, die einen mit E homöomorphen Raum $\overline{E}$ definieren und für Punktpaare aus F die in der Metrik von $\overline{F}$ vorgeschriebenen Werte haben. (Die Homöomorphie besagt: aus $uv \to 0$ bei festem u folgt $\overline{uv} \to 0$ und umgekehrt). Man kann auch sagen: einem topologischen metrisierbaren Raum E lässt sich stets eine Metrik aufprägen, deren Teilmetrik in einer abgeschlossenen Menge $F \subset E$ vorgeschrieben ist.

Der Beweis von I ist meinem früheren Beweise (Math. Zeitschrift 5 (1919), S. 296) des Satzes von H. Tietze nachgebildet, dass eine in einer abgeschlossenen Menge stetige Funktion zu einer im ganzen Raume stetigen erweitert werden kann, aber erfordert erheblich mehr Kunstgriffe.

Wir bezeichnen mit u, v, w Punkte des Raumes E, mit a, b, c, p, q, r Punkte der abgeschlossenen Menge F, mit x, y Punkte des offenen Komplements $G = E - F$. Es sei

$$\delta(u) = \inf_p pu$$

die untere Grenze der (alten) Entfernungen des Punktes u von den Punkten $p \epsilon F$ (die untere Entfernung zwischen u und F), also $\delta(a) = 0$, $\delta(x) > 0$. Aus $pu \leqq pv + uv$ ergibt sich, indem man beiderseits die untere Grenze nach p nimmt,

$$|\delta(u) - \delta(v)| \leqq uv.$$

Wir betrachten sogleich, da wir sie später verwenden müssen, die Funktion

$$\delta(u, v) = \min\,[uv,\ \delta(u) + \delta(v)], \tag{0}$$

die symmetrisch ist und dann und nur dann verschwindet, wenn $u = v$ oder u, v zwei Punkte von F sind. Sie genügt der „Dreiecksungleichung"

$$\delta(u, v) + \delta(v, w) \geqq \delta(u, w).$$

In der Tat gelten die vier Ungleichungen

$$uv + vw \geqq uw$$
$$uv + [\delta(v) + \delta(w)] \geqq \delta(u) + \delta(w)$$
$$[\delta(u) + \delta(v)] + vw \geqq \delta(u) + \delta(w)$$
$$[\delta(u) + \delta(v)] + [\delta(v) + \delta(w)] \geqq \delta(u) + \delta(w),$$

und wenn man links und rechts den kleinsten der vier Ausdrücke nimmt, ergibt sich die Behauptung.

Der Satz I ist mit dem folgenden äquivalent:

II. *Ist F in E abgeschlossen und mit $\overline{F}$ homöomorph, so gibt es eine Funktion $\varphi(u, a) \geqq 0$ mit folgenden Eigenschaften:*

(α) $\varphi(b, a) = \overline{ab}$

(β) *Wenn* $\delta(x) \to 0$, $\varphi(x, a) \to 0$, *so ist* $ax \to 0$ *(bei festem a)*

(γ) *Für jedes Punktpaar u, v ist die obere Grenze*

$$\psi(u, v) = \sup_a |\varphi(u, a) - \varphi(v, a)| \tag{1}$$

endlich und konvergiert nach 0 *für* $uv \to 0$ (bei festem u).

In der Tat erfüllt, wenn I richtig ist, die neue Entfernung $\varphi(u, a) = \overline{au}$ die Forderungen von II, wobei $\psi(u, v) \leqq \overline{uv}$; ($\beta$) gilt weil mit $\overline{ax} \to 0$ zugleich $ax \to 0$, und (γ) gilt, weil mit $uv \to 0$ zugleich $\overline{uv} \to 0$.

Um andererseits aus II auf I zu schliessen, bemerken wir zuerst, dass $\psi(u, v)$ symmetrisch ist und die Dreiecksungleichung

$$\psi(u, v) + \psi(v, w) \geqq \psi(u, w)$$

erfüllt. Diese Funktion ist selbst noch nicht als neue Entfernung verwendbar, schon weil sie möglicherweise für $u \neq v$ verschwindet. Bilden wir daher mit ihr und der Funktion (0)

$$\overline{uv} = \max\,[\psi(u, v),\ \delta(u, v)] \tag{2}$$

und zeigen, dass dies eine geeignete Entfernung ist. Jedenfalls ist $\overline{uv}$ symmetrisch und erfüllt die Dreiecksungleichung $\overline{uv} + \overline{vw} \geqq \overline{uw}$.

Sprechen wir die Eigenschaft (γ) für die drei Fälle, dass u, v Punkte von F, F oder F, G oder G, G sind, gesondert aus:

(γ_1) Es ist $\psi(b, c) = \sup_a |\overline{ab} - \overline{ac}| = \overline{bc}$

(γ_2) Es ist $\psi(x, b) = \psi(b, x) = \sup_a |\varphi(x, a) - \overline{ab}| \geqq \varphi(x, b)$

endlich und konvergiert nach 0 für $xy \to 0$ (bei festem b)[1].

(γ_3) Es ist $\psi(x, y) = \sup_a |\varphi(x, a) - \varphi(y, a)|$

endlich und konvergiert nach 0 für $xy \to 0$ (bei festem x).

Jetzt sehen wir, dass $\overline{uv}$ für $u = v$ und nur in diesem Falle verschwindet. Denn $\overline{uv} = 0$ bedeutet $\delta(u, v) = \psi(u, v) = 0$; also entweder $u = v$ oder $u = b$, $v = c$ Punkte von F, aber auch in diesem Falle $\psi(b, c) = \overline{bc} = 0$, also $b = c$. Hiernach liefert $\overline{uv}$ als Entfernung einen Raum $\overline{E}$, dessen Homöomorphie mit E zu beweisen bleibt:

Wenn (bei festem u) $uv \to 0$, so ist $\delta(u, v) \to 0$ und nach (γ) $\psi(u, v) \to 0$, also $\overline{uv} \to 0$.

Sei (bei festem u) $\overline{uv} \to 0$, also $\delta(u, v) \to 0$ und $\psi(u, v) \to 0$. Ist $u = x$ Punkt von G, so ist $\delta(x, v) = \min\,[xv,\ \delta(x) + \delta(v)]$ und wegen des festen $\delta(x) > 0$ folgt schon aus $\delta(x, v) \to 0$, dass $xv \to 0$. Ist $u = b$ Punkt von F, so ist $\delta(b, v) = \min\,[bv, \delta(v)] = \delta(v) \to 0$ und $\psi(b, v) \to 0$. Hier sind die Fälle $v = c \epsilon F$ und $v = y \epsilon G$ zu unterscheiden (von denen mindestens einer bei dem variablen v un-

[1]) $xb \to 0$ bei festem x kommt nicht in Frage.

endlich oft eintreten muss). Im ersten Fall ist $\psi(b, c) = \overline{bc} \to 0$ und $bc \to 0$, im zweiten ist $\delta(y) \to 0$ und $\psi(b, y) \to 0$ oder erst recht $\varphi(y, b) \to 0$, auf Grund von (β) also $by \to 0$. Stets ist also mit $\overline{uv} \to 0$ auch $uv \to 0$.

Damit ist gezeigt, dass I aus II folgt. Es handelt sich nunmehr um Konstruktion einer Funktion $\varphi(u, a)$, die die Eigenschaften (α) (β) (γ) hat, oder einer Funktion $\varphi(x, a)$, die die Eigenschaften (β) (γ_1) (γ_2) hat.

Wir bilden (für $p \epsilon F$, wie verabredet) die untere Grenze

$$\omega(x, c) = \inf_p \left[\overline{cp} + 2\frac{px}{\delta(x)} - 2\right] \tag{3}$$

und die obere Grenze

$$\varphi(x, a, c) = \sup_p \left[\overline{ap} - \overline{cp} - \frac{px}{\delta(x)} + 1\right], \tag{4}$$

die (auch bei unbeschränktem F) gewiss endlich ist, weil der eingeklammerte Ausdruck $\leqq \overline{ac}$ ist. Dann ist

$$-\varphi(x, a, c) = \inf_p \left[\overline{cp} - \overline{ap} + \frac{px}{\delta(x)} - 1\right] \leqq \omega(x, c)$$

und demnach sei

$$\varphi(x, a) = \varphi(x, a, c) + \omega(x, c) \geqq 0, \tag{5}$$

wo c irgend ein fester Punkt von F ist. Der Beweis, dass $\varphi(x, a)$ die verlangten Eigenschaften hat, wird durch folgende Überlegungen erbracht.

(A) Wir wählen einen von x abhängigen Punkt p mit $px < \delta(x) + \delta(x)^2$, also $\frac{px}{\delta(x)} - 1 < \delta(x)$. Dann ist

$$\omega(x, c) < \overline{cp} + 2\delta(x),$$

$$\varphi(x, a, c) > \overline{ap} - \overline{cp} - \delta(x).$$

Wenn nun, bei festem b, $bx \to 0$, so ist $\delta(x) \to 0$, $px \to 0$, $bp \to 0$, also $\overline{bp} \to 0$, $\overline{ap} \to \overline{ab}$, $\overline{cp} \to \overline{cb}$, und wir erhalten: für $bx \to 0$ ist

$$\overline{\lim}\, \omega(x, c) \leqq \overline{cb}, \quad \underline{\lim}\, \varphi(x, a, c) \geqq \overline{ab} - \overline{cb}.$$

(B) Wir wählen einen von x (und c) abhängigen Punkt q mit

$$\omega(x, c) + \delta(x) > \overline{cq} + 2\frac{qx}{\delta(x)} - 2. \tag{6}$$

Andererseits ist

$$\omega(x, c) \leqq \overline{cb} + 2\frac{bx}{\delta(x)} - 2.$$

Dies verbunden gibt

$$2\frac{qx}{\delta(x)} < \overline{cb} + 2\frac{bx}{\delta(x)} + \delta(x),$$

$$2qx < 2bx + \overline{cb}\,\delta(x) + \delta(x)^2$$

Hieraus folgt wieder, wenn $bx \to 0$ (bei festem b), dass $qx \to 0$, $bq \to 0$, $\overline{bq} \to 0$, $\overline{cq} \to \overline{cb}$, und aus (6) oder $\omega(x, c) > \overline{cq} - \delta(x)$

$$\underline{\lim}\, \omega(x, c) \geqq \overline{cb},$$

in Verbindung mit (A) also: für $bx \to 0$ ist $\omega(x, c) \to \overline{cb}$.

Weiter ist auch

$$\varphi(x, a, c) \geqq \overline{aq} - \overline{cq} - \frac{qx}{\delta(x)} + 1,$$

zu (6) addiert

$$\varphi(x, a) + \delta(x) > \overline{aq} + \frac{qx}{\delta(x)} - 1$$

und hierin ist der Beweis von (β) enthalten; denn wenn, bei festem a, $\varphi(x, a) \to 0$ und $\delta(x) \to 0$, so ist $\overline{aq} \to 0$ und $\frac{qx}{\delta(x)} - 1 \to 0$, also $aq \to 0$, $qx \to 0$, $ax \to 0$.

Endlich folgern wir aus $\varphi(x, a) > \overline{aq} - \delta(x)$

$$\overline{ab} - \varphi(x, a) < \overline{ab} - \overline{aq} + \delta(x) \leqq \overline{bq} + \delta(x)$$

und hiermit ist eine Hälfte von (γ_2) bewiesen, denn die positive Schranke $\overline{bq} + \delta(x)$, unter der $\overline{ab} - \varphi(x, a)$ bleibt, ist von a unabhängig (q hing nur von x und dem ein für alle Male festen c ab), also Funktion von x, b allein und konvergiert mit bx nach 0, da wir oben $\overline{bq} \to 0$ gefunden haben.

(C) Wir wählen einen von x, a (und c) abhängigen Punkt r mit

(7) $$\varphi(x, a, c) - \delta(x) < \overline{ar} - \overline{cr} - \frac{rx}{\delta(x)} + 1 \leqq \overline{ac} - \frac{rx}{\delta(x)} + 1;$$

andererseits ist

$$\varphi(x, a, c) \geqq \overline{ab} - \overline{cb} - \frac{bx}{\delta(x)} + 1 \geqq -\overline{ac} - \frac{bx}{\delta(x)} + 1,$$

und beides verbunden gibt

$$\frac{rx}{\delta(x)} < 2\overline{ac} + \frac{bx}{\delta(x)} + \delta(x),$$

$$rx < bx + 2\overline{ac} \cdot \delta(x) + \delta(x)^2.$$

Hieraus folgt wieder, wenn $bx \to 0$ bei festem b, dass auch $rx \to 0$, $br \to 0$, $\overline{br} \to 0$, $\overline{ar} \to \overline{ab}$, $\overline{cr} \to \overline{cb}$; aus (7) oder $\varphi(x, a, c) < \overline{ar} - \overline{cr} + \delta(x)$ also $\overline{\lim}\, \varphi(x, a, c) \leqq \overline{ab} - \overline{cb}$ und in Verbindung mit (A): für $bx \to 0$ ist $\varphi(x, a, c) \to \overline{ab} - \overline{cb}$.

Aus den für $bx \to 0$ gültigen Limesgleichungen

$$\omega(x, c) \to \overline{cb}, \quad \varphi(x, a, c) \to \overline{ab} - \overline{cb}$$

folgt dann durch Addition $\varphi(x, a) \to \overline{ab}$, insbesondere $\varphi(x, b) \to 0$.

(D) Aus $\overline{ap} \leqq \overline{bp} + \overline{ab}$ folgt, indem man beiderseits

$$-\overline{cp} - \frac{px}{\delta(x)} + 1$$

addiert und die obere Grenze nach p nimmt,

$$\varphi(x, a, c) \leqq \varphi(x, b, c) + \overline{ab},$$

durch Addition von $\omega(x, c)$

$$\varphi(x, a) \leqq \varphi(x, b) + \overline{ab}.$$

Hierin steckt die zweite Hälfte der Behauptung (γ_1); denn wie $\overline{ab} - \varphi(x, a)$, so hat nun auch $\varphi(x, a) - \overline{ab}$ eine von a unabhängige,

nur von x, b abhängige obere Schranke $\geqq 0$, nämlich $\varphi(x, b)$, die für $bx \to 0$ nach 0 konvergiert.

(E) Um noch (γ_3) zu beweisen, beachten wir, dass

$$px \cdot \delta(y) - py \cdot \delta(x) = [px - py]\,\delta(y) + py\,[\delta(y) - \delta(x)]$$

absolut $\leqq xy \cdot [\delta(y) + py] \leqq 2xy \cdot py$ ist. Nun können wir unbeschadet der Allgemeinheit den Raum E als beschränkt, etwa vom Durchmesser $\leqq \frac{1}{2}$ annehmen, da jeder Raum mit einem beschränkten homöomorph ist (man ersetze die Entfernungen δ durch $\frac{\delta}{1+\delta}$, wobei die Dreiecksungleichung erhalten bleibt. Dagegen wäre es nicht zulässig, die Menge F als beschränkt vorauszusetzen, ohne die Tragweite des Satzes I zu verkleinern). Dann ist also

$$\left|\frac{px}{\delta(x)} - \frac{py}{\delta(y)}\right| \leqq \frac{xy}{\delta(x)\,\delta(y)}$$

und nach derselben Schlussweise wie bei (D)

$$|\omega(x, c) - \omega(y, c)| \leqq \frac{2xy}{\delta(x)\,\delta(y)},$$

$$|\varphi(x, a, c) - \varphi(y, a, c)| \leqq \frac{xy}{\delta(x)\,\delta(y)},$$

$$|\varphi(x, a) - \varphi(y, a)| \leqq \frac{3xy}{\delta(x)\,\delta(y)},$$

wo rechts eine von a unabhängige Schranke steht, die für $xy \to 0$ bei festem x (wo $\delta(y) \to \delta(x) > 0$) nach 0 konvergiert.

Hiermit ist der Beweis des Satzes I vollendet.

Eine einfache Konsequenz sind die beiden folgenden Sätze, von denen der zweite auf anderem Wege von V. Niemytzki und A. Tychonoff bewiesen wurde (Fund. Math. 12 (1928). Seite 118—120):

Ein metrisierbarer Raum ist dann und nur dann kompakt, wenn er in jeder Metrik beschränkt ist.

Ein metrisierbarer Raum ist dann und nur dann kompakt, wenn er in jeder Metrik vollständig ist.

Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar. Ist andererseits der Raum E nicht kompakt (in sich kompakt), so enthält er eine abzählbare Menge $F = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ ohne Häufungspunkt, die also in E abgeschlossen ist. Da zwei isolierte Mengen gleicher Mächtigkeit stets homöomorph sind, so ist F sowohl mit der Zahlenmenge $F_1 = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ als auch mit $F_2 = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ homöomorph. Nach I ist dann E mit einem nicht beschränkten Raum E_1 und mit einem nicht vollständigen Raum E_2 (in dem F_2 abgeschlossen ist, d. h. eine Fundamentalfolge ohne Limes existiert) homöomorph.

Ein metrischer Satz über Diophantische Approximationen.

Von

Arnold Walfisz (Warszawa).

Man verdankt A. Khintchine folgenden metrischen Satz über Diophantische Approximationen:

Satz I: *Die Funktion $f(x)$ sei für $x \geqq 1$ positiv und stetig; für $x \to \infty$ nehme $x f(x)$ monoton gegen Null ab; das Integral*

$$\int_1^\infty f(x)\, dx \tag{1}$$

divergiere. Dann besitzt die Ungleichung

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q} \tag{2}$$

für fast alle reellen θ unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen p, q mit

$$q > 0, \ (p, q) = 1 \tag{3}$$ [1].

Als fast alle reellen θ bezeichnet man hierbei alle reellen θ bis

[1]) A. Khintchine „Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen" [Mathematische Annalen **92** (1924), S. 115—125]. Zum Beweise verwendet Khintchine Hilfsmittel aus der Kettenbruchtheorie. In der späteren Abhandlung „Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen" [Mathematische Zeitschrift **24** (1926), S. 706—714 wird der Satz auf simultane Approximation mehrerer Zahlen verallgemeinert und mit rein metrischen Hilfsmitteln erledigt.