Sur les fonctions qui satisfont à la condition (N).

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

Le but de cette Note est la *construction d'une fonction continue $f(x)$ qui satisfait pour $0 \leqq x \leqq 1$ à la condition (N) de M. Lusin et même à la condition (S) de M. Banach*[1]), *tandis que la somme de $f(x)$ et d'une fonction linéaire arbitraire non constante ne satisfait pas à la condition (N)*[2]).

Supposons fixé un système de coordonnées cartesiennes x, y, désignons le point aux coordonnées x, y par $p(x, y)$, et soit $T_\alpha(p)$ la transformation: $T_\alpha(p(x, y)) = p(x, y + \alpha x)$. Désignons par $\|A\|$ la mésure (L) de l'ensemble linéaire A. Soit $P_x(B)$ resp. $P_y(B)$ la projection orthogonale de l'ensemble B sur l'axe des x, resp. sur celle des y.

Un raisonnement simple, que j'omets montre que le problème se réduit à la construction d'un ensemble plan fermé Q, possédant les propriétés suivantes:

[1]) Une fonction $f(x)$ satisfait à la condition (N) si l'ensemble des valeurs de $f(x)$ sur tout ensemble de mesure (L) zéro est de mesure (L) — zéro; elle satisfait à la condition (S) si à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$ tel que l'ensemble des valeurs de $f(x)$ sur tout ensemble de mésure $< \delta$ est de mesure $< \varepsilon$.

[2]) J'ai annoncé la construction d'une fonction $f(x)$ satisfaisant à la condition (N) et telle que $f(x) + x$ ne satisfait à pas cette condition, à la Séance de la Soc. Math. d. Pologne, Sect. Varsovie 17/II 1928 v. Ann. Soc. Math. d. Pol. VII p. 266. M. Lebesgue a construit deux fonctions satisfaisant à la condition N dont la somme ne satisfait pas à cette condition (Rend. Acad. Lincei 16 (1907) p. 285). D'après une communication de M. Saks, — M. Menchoff a construit une fonction satisfaisant à la condition (N), et une fonction absolument continue dont la somme ne satisfait pas à la condition (N). Un problème analogue — la construction de deux fonctions qui sont des fonctions absolument continues d'une fonction absolument continue, sans que leur somme possede cette propriété a été résolu par M. N. Bari (Math. Ann. t. 103).

1) toute paralléle à l'axe des y rencontre Q en un seul point au plus;
2) $P_x(Q)$ est contenu dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$
3) $\|P_x(Q)\| = 0$
4) $\|P_y(Q)\| = 0$
5) quel que soit $\alpha > 0$ on a: $\|P_y(T_\alpha(Q))\| > 0$

Nous désignerons par $R(a, b, c, d)$ le rectangle: $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$, $(a < b,\ c < d)$ par $I(c, d)$ le segment $x = 0$, $c \leqq y \leqq d$.

Nous dirons que les rectangles: $R_1, R_2, \ldots, R_m$ forment un système (K) si: 1) tous les rectangles du système sont égaux, 2) $P_x(R_i) \times P_x(R_j) = 0$ pour $i \neq j$, 3) pour $i \neq j$ on a l'une des deux relations: $P_y(R_i) = P_y(R_j)$; $P_y(R_i) \times P_y(R_j) = 0$

A tout rectangle $R = R(a, b, c, d)$ et à tout nombre naturel s nous ferons correspondre un certain système de rectangles: $\Phi_s(R)$, remplissant les conditions suivantes:

(C_1) $$\Phi_s(R) \subset R.$$

(C_2) $$\Phi_s(R) \text{ est un système } (K).$$

(C_3) Si $G = \sum_{i=1}^{m} R_i$ est un système (K) il en est de même pour

$$\Phi_s(G) = \sum_{i=1}^{m} \Phi_s(R_i).$$

(C_4) $$\|P_x(\Phi_s(R))\| \leqq \tfrac{2}{3} P_x(R) = \tfrac{2}{3}(b - a).$$

(C_5) $$\|P_y(\Phi_s(R))\| \leqq \tfrac{2}{3} P_y(R) = \tfrac{2}{3}(d - c).$$

(C_6) Pour $\frac{1}{s} \leqq \alpha \leqq s$ on a:

$$P_y[T_\alpha(\Phi_s(R))] = P_y(T_\alpha(R)) = I(c + \alpha a,\ d + \alpha b).$$

Posons[3]):

$$n_1 = E\left(\frac{2s(d - c)}{b - a}\right) + 1. \tag{1}$$

$$m_1 = E\left(\frac{s(2n_1 + 1)(b - a)}{d - c}\right) + 2. \tag{2}$$

[3]) $E(x)$ désigne le plus grand entier $\leqq x$.

(3) $$R_{l,k} = R\left(a+(b-a)\frac{2k(n_1+1)+2l}{2m_1(n_1+1)-1},\right.$$
$$a+(b-a)\frac{2k(n_1+1)+2l+1}{2m_1(n_1+1)-1},\ c+(d-c)\frac{2l}{2n_1+1},$$
$$\left.c+(d-c)\frac{2n_1+1}{2l+1}\right).$$

(4) $$\Phi_s(R) = \sum_{l=0}^{n_1}\sum_{k=0}^{m_1-1} R_{l,k}.$$

On vérifie aisément (C_1), (C_2), (C_3). On a de plus:

(5) $$\|P_x(\Phi_s(R))\| = \sum_{l=0}^{n_1}\sum_{k=0}^{m_1-1}\frac{b-a}{2m_1(n_1+1)-1} =$$
$$= (b-a)\cdot\frac{m_1(n_1+1)}{2m_1(n_1+1)-1} \leqq \tfrac{2}{3}(b-a)$$

(6) $$\|P_y(\Phi_s(R))\| = \sum_{l=0}^{n_1}\frac{d-c}{2n_1+1} = (d-c)\frac{n_1+1}{2n_1+1} \leqq \tfrac{2}{3}(d-c).$$

c. à d. (C_4), (C_5).

Soit maintenant α un nombre tel que:

(7) $$\frac{1}{s} \leqq \alpha \leqq s.$$

Posons:

(8) $$c_{l,k} = c+(d-c)\frac{2l}{2n_1+1}+\alpha a+\alpha(b-a)\frac{2k(n_1+1)+2l}{2m_1(n_1+1)-1}.$$

(9) $$d_{l,k} = c+(d-c)\frac{2l+1}{2n_1+1}+\alpha a+\alpha(b-a)\frac{2k(n_1+1)+2l+1}{2m_1(n_1+1)-1}$$

on aura:

(10) $$P_y\left(T_\alpha\left(\sum_{k=0}^{m_1-1}R_{l,k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{m_1-1} I(c_{l,k}, d_{l,k}).$$

Evidemment: $c_{l,k} < c_{l,k+1}$, d'autre part, d'après (2), (7):

(11) $$d_{l,k} - c_{l,k+1} =$$
$$= \frac{d-c}{2n_1+1} - \alpha(b-a)\frac{2(n_1+1)-1}{2m_1(n_1+1)-1} > \frac{d-c}{2n_1+1} - \frac{s(b-a)}{m_1-1} > 0$$

c. à d. $c_{l,k+1} < d_{l,k}$; donc

(12) $$I(c_{l,k}, d_{l,k}) \times I(c_{l,k+1}, d_{l,k+1}) \neq 0.$$

(13) $$P_y\left(T_\alpha\left(\sum_{k=0}^{m_1-1}R_{l,k}\right)\right) \supset I(c_{l,0}, d_{l,m_1-1}).$$

(14) $$P_y(T_\alpha(\Phi_s(R))) \supset \sum_{l=0}^{n_1} I(c_{l,0}, d_{l,m_1-1}).$$

(15) $$c_{l,0} = c+(d-c)\frac{2l}{2n_1+1}+\alpha a+\alpha(b-a)\frac{2l}{2m_1(n_1+1)-1}$$

(16) $$d_{l,m_1-1} = c+(d-c)\frac{2l}{2n_1+1}+\alpha a+\alpha(b-a)\frac{2(m_1-1)(n_1+1)+2l+1}{2m_1(n_1+1)-1}$$

donc $c_{l,0} < c_{l+1,0}$ et d'autre part, en utilisant (1), (2), (7) on obtient

(17) $$d_{l,m_1-1} - c_{l+1,0} = \alpha(b-a)\frac{2(m_1-1)(n_1+1)-1}{2m_1(n_1+1)-1} - \frac{d-c}{2n_1+1} \geqq$$
$$\geqq \frac{(b-a)}{s}\,\frac{2(m_1-1)(n_1+1)-1}{2m_1(n_1+1)} - \frac{d-c}{2n_1+1} \geqq$$
$$\geqq \frac{b-a}{s}\left(1-\frac{1}{m_1}-\frac{1}{2m_1(n_1+1)}\right) - \frac{d-c}{2n_1+1} \geqq \frac{b-a}{4s} - \frac{d-c}{2n_1+1} > 0$$

c. à d. $c_{l+1,0} < d_{l,m_1-1}$ il en résulte:

(18) $$I(c_{l,0}, d_{l,m_1-1}) \times I(c_{l+1,0}, d_{l+1,m_1-1}) \neq 0$$

donc:

(19) $$P_y(T_\alpha(\Phi_s(R))) \supset I(c_{0,0}, d_{n_1,m_1-1}) = I(c+\alpha a, d+\alpha b)$$

(C_6) est par suite démontré.

Posons maintenant:

(20) $$Q_0 = R(0, 1, 0, 1)$$

(21) $$Q_n = \Phi_s(Q_{n-1}).$$

Si Q_{n-1} est un système (K) il en est de même pour Q_n; (20), (21) définissent donc une suite infinie: $Q_0, Q_1, \ldots$ Soit:

(22) $$Q = \prod_{n=0}^{\infty} Q_n$$

je dis que c'est l'ensemble cherché. On vérifie sans peine que Q possède les propriétés 1) et 2). On a d'après (C_2), (C_4):

$$\|P_x(Q)\| = \lim_{n\to\infty} \|P_x(Q_n)\| \leqq \lim_{n\to\infty} (\tfrac{2}{3})^n = 0 \tag{23}$$

et d'après (C_2), (C_5)

$$\|P_y(Q)\| = \lim \|P_y(Q_n)\| \leqq \lim (\tfrac{2}{3})^n = 0. \tag{24}$$

Soit maintenant α un nombre positif, il existe alors un nombre naturel q tel que $\frac{1}{q} \leqq \alpha \leqq q$; on aura pour $n \geqq q$ d'après (C_2), (C_6):

$$P_y(T_\alpha(Q_n)) = P_y(T_\alpha(\Phi_n(Q_{n-1}))) = P_y(T_\alpha(Q_{n-1})) \tag{25}$$

donc:

$$P_y(T_\alpha(Q)) = P_y(T_\alpha(Q_{q-1})) \tag{26}$$

$$\|P_y(T_\alpha(Q))\| = \|P_y(T_\alpha(Q_{q-1}))\| > 0 \tag{27}$$

c. q. f. d.

Swider 8/VII 1930.

Erweiterung einer Homöomorphie.

Von

Felix Hausdorff (Bonn).

Wir wollen den folgenden Satz über metrische Räume E, F, $\overline{F}$, $\overline{E}$ beweisen:

I. *Ist F in E abgeschlossen, so lässt sich eine Homöomorphie zwischen F und $\overline{F}$ zu einer Homöomorphie zwischen E und einem geeigneten Raum $\overline{E}$ erweitern.*

Mit andern Worten: es wird die Möglichkeit einer „Ummetrisierung" behauptet. Statt der alten Entfernungen uv, die den metrischen Raum E definieren, lassen sich neue Entfernungen $\overline{uv}$ einführen, die einen mit E homöomorphen Raum $\overline{E}$ definieren und für Punktpaare aus F die in der Metrik von $\overline{F}$ vorgeschriebenen Werte haben. (Die Homöomorphie besagt: aus $uv \to 0$ bei festem u folgt $\overline{uv} \to 0$ und umgekehrt). Man kann auch sagen: einem topologischen metrisierbaren Raum E lässt sich stets eine Metrik aufprägen, deren Teilmetrik in einer abgeschlossenen Menge $F \subset E$ vorgeschrieben ist.

Der Beweis von I ist meinem früheren Beweise (Math. Zeitschrift 5 (1919), S. 296) des Satzes von H. Tietze nachgebildet, dass eine in einer abgeschlossenen Menge stetige Funktion zu einer im ganzen Raume stetigen erweitert werden kann, aber erfordert erheblich mehr Kunstgriffe.

Wir bezeichnen mit u, v, w Punkte des Raumes E, mit a, b, c, p, q, r Punkte der abgeschlossenen Menge F, mit x, y Punkte des offenen Komplements $G = E - F$. Es sei

$$\delta(u) = \inf_p pu$$