Let T be a homeomorphism such that $T(M) \subset M$. By the preceding theorem there is a cyclic element C of M such that $T(C) \subset C$ Then by our assumed property there is a point p of C such that $T(p) = p$.

As far as homeomorphisms are concerned, this last result answers a question of C. Kuratowski[1]). The converse of this theorem is not true, i. e. there exist Peano continua M having the property that every homeomorphism of M into a subset of itself has an invariant point but containing cyclic elements not having this property. For an example take a circle plus an interval having one end point on the circle.

4. ***Theorem.*** *If every cyclic element of the Peano continuum M is an n-dimensional simplex (n may vary for different elements), then every homeomorphism of M into a subset of itself has a fixed point.*

This result follows immediately from the result of § 3 and the Brouwer fixed-point theorem.

5. ***Theorem.*** *If the Peano continuum M lies in a plane and does not separate the plane, then every homeomorphism of M into a subset of itself has an invariant point.*

Since M does not separate the plane, it follows by a theorem of Whyburn (II, p. 188) that every maximal cyclic set of M is a simple closed curve plus its interior, a two dimensional simplex. All other cyclic elements of M are points. Hence our theorem follows from the result of § 4.

This result is a partial solution of the well-known problem as to whether a general bounded continuum not separating its plane has this property. We exhibit here the result for any continuum which is locally connected.

[1]) *Quelques applications d'eléments cycliques de M. Whyburn*, Fund. Math. vol. 14 (1929), p. 139, footnote [2]).

The University of Michigan.

Sur les courbes d'ordre $\mathfrak{c}$.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer l'*existence d'une courbe péanienne* [1]) *plane K possédant les propriétés suivantes*:

I. $K^{\mathfrak{c}} = K$, *c. à d. tout point de K est d'ordre $\mathfrak{c}$*;

II. *K contient un sous-ensemble dénombrable A tel que $K - A$ est punctiforme.*

Il résulte de II, que:

II[a]. *K ne contient aucune famille non dénombrable de continus disjoints deux à deux* [2]).

Le plan euclidien sera désigné par R_2, la frontière d'un ensemble arbitraire U par $F(U)$, son diamètre par $\delta(U)$. J'appelle *domaine jordanien* tout domaine plan, borné dont la frontière est une ligne simple fermée.

A tout domaine jordanien G et à tout nombre $\eta > 0$ nous ferons correspondre une suite de domaines jordaniens $\{G_k(G, \eta)\}$ et un ensemble dénombrable $B(G, \eta)$ de manière à satisfaire aux conditions suivantes:

(C_1) On a: $\overline{G_k(G, \eta)} \subset G$; $\quad G_k(G, \eta) \times G_l(G, \eta) = 0 \quad$ pour $k \neq l$; $\lim \overline{G_k(G, \eta)} = F(G)$, et l'ensemble: $\Phi(G, \eta) = F(G) + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{G_k(G, \eta)}$ est un continu.

[1]) c. à d. d'un continu localement connexe, de dimension 1.

[2]) J'ai démontré dans une Note antérieure (Fund. Math. XV p. 222 ss.) l'existence d'un continu péanien plan K possedant la propriété II[a]) et tel que $K^{\mathfrak{c}} \neq 0$. Mais dans ce cas on avait $K^{\mathfrak{cc}} = 0$.

(C_2) $\delta(G_k(G,\eta)) \leqq \eta$.

(C_3) Désignons les composants de l'ensemble ouvert $G - \Phi(G,\eta)$ par $H_1, H_2, \dots$; on a: $\delta(H_i) \leqq \eta$; $\lim_{i\to\infty} \delta(H_i) = 0$ et les H_i sont des domaines jordaniens.

(C_4) Si $M \subset \Phi(G,\eta)$ est un continu tel que $M \times F(G) \neq 0$ alors $M \times B(G,\eta) \neq 0$.

(C_5) Si D est un domaine, si les ensembles $F(D) \times F(G)$ et $F(D) \times \times F(G_k(G,\eta))$ ne contiennent aucun continu ($k=1,2,\dots$) et si $D \times F(G) \neq 0 \neq (R_2 - \overline{D}) \times F(G)$, alors:

$$0 \neq \overline{D \times F(G)} \times \overline{(R_2 - \overline{D}) \times F(G)} \subset$$

$$\subset \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \overline{D \times F(G_k(G,\eta))} \times \overline{(R_2 - \overline{D}) \times F(G_k(G,\eta))}}.$$

(C_6) Si D est un domaine, si les ensembles $F(D) \times F(G)$ et $F(D) \times \times F(G_k(G,\eta))$ $k=1,2,\dots$ ne contiennent aucun continu et si

$$D \times \left[F(G) + \sum_{k=1}^{\infty} F(G_k(G(\eta)))\right] \neq 0 \neq (R_2 - \overline{D}) \times$$

$$\times \left[F(G + \sum_{k=1}^{\infty} F(G_k(G,\eta))\right]$$

alors ou bien: $D \times F(G) \neq 0 \neq (R_2 - \overline{D}) \times F(G)$, ou bien, pour une au moins valeur de k: $D \times F(G_k(G,\eta)) \neq 0 \neq (R_2 - \overline{D}) \times \times F(G_k(G,\eta))$.

Supposons fixé un système de coordonnées polaires r, φ, désignons par $z(r,\varphi)$ le point au coordonnées r, φ, par $S(r')$ le cercle $r < r'$. Il suffit évidemment de construire $G_k(G,\eta)$, $B(G,\eta)$ pour le cas spécial $G = S(1)$, on passe au cas général en utilisant l'homéomorphie d'un domaine jordanien fermé arbitraire $\overline{G}$ avec $\overline{S(1)}$. Pour abrégér nous écrirons G_k, B, Φ au lieu de $G_k(S(1),\eta)$, $B(S(1),\eta)$, $\Phi(S(1),\eta)$.

Soit $r_1 < r_2$, $\varphi_1 < \varphi_2$; nous désignérons pas $V(r_1, r_2; \varphi_1, \varphi_2)$ le domaine $r_1 < r < r_2$; $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, par $W(r_1, r_2; \varphi_1, \varphi_2)$ le domaine $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$; $r_1 < r < r_1 + (r_2 - r_1)\dfrac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$.

Posons [1]):

$$r_n = 1 - (1 - \tfrac{1}{2}\eta)^n \quad n = 1, 2, \dots \tag{1}$$

$$p = E\left(\frac{2\pi}{\eta}\right) + 2, \tag{2}$$

$$G_1 = S(r_1), \tag{3}$$

$$G_k = V\left(r_{4m-2}, r_{4m-1}; \frac{2l\pi}{p}, \frac{2(l+1)\pi}{p}\right) \tag{4}$$

$k = (m-1)(m+2)p + 2 + l$; $m = 1, 2, \dots$; $l = 0, 1, \dots p-1$

$$G_k = V\left(r_{4m}, r_{4m+1}; \frac{(2l+1)\pi}{p}, \frac{(2l+3)\pi}{p}\right) \tag{5}$$

$k = (m-1)(m+2)p + p + 2 + l$; $m = 1, 2, \dots$; $l = 0, 1, \dots p-1$

$$G_k = V\left(r_{2m-1}, r_{2m}; 0, \frac{\pi}{mp}\right) \tag{6}$$

$k = (m-1)(m+2)p + 2p + 2$; $m = 1, 2, \dots$

$$G_k = W\left(r_{2m-1}, r_{2m}; \frac{l\pi}{mp}, \frac{(l+1)\pi}{mp}\right) \tag{7}$$

$k = (m-1)(m+2)p + 2p + 2 + l$; $m = 1, 2, \dots$; $l = 1, 2, \dots 2mp-1$

$$\Phi = F(S) + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{G}_k, \tag{8}$$

$$B_0 = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} z\left(1, \frac{2m}{n}\pi\right), \tag{9}$$

$$B_m = \sum_{l=1}^{2mp-1} z\left(r_{2m}, \frac{(l+1)\pi}{mp}\right) \quad m = 1, 2, \dots \tag{10}$$

$$B = z(1,0) + B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m. \tag{11}$$

On vérifie immédiatement les conditions (C_2) et en utilisant (1),

[1]) $E(x)$ désigne le plus grand entier $\leqq x$.

(2) on obtient facilement (C_2), (C_3). Passons à (C_4); il s'agit de démontrer que, $M \subset \Phi$ étant un continu tel que $M \times F(S) \neq 0$ on a $M \times B \neq 0$, c. à d. l'une au moins des trois relations:

$$M \supset z(1, 0). \tag{12}$$

$$M \times B_0 \neq 0. \tag{13}$$

$$M \times \sum_{m=1}^{\infty} B_m \neq 0. \tag{14}$$

Si $M \times F(S)$ contient un continu, on a certainement (13) car tout arc de la circonférence $F(S)$ contient un point de B_0. Dans le cas contraire on a $M - F(S) \neq 0$. Soit $z(r', \varphi')$ un point de $M - F(S)$. On a $r' < 1$ et comme $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$ on peut determiner un m_0 tel que $m \geqq m_0$ entraîne $r' < r_{2m}$. Soit I_m l'arc $r = r_{2m}$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{mp}$. On a:

$$M \times \overline{S(r_{2m})} \supset z(r', \varphi') \neq 0 \neq M \times F(S) \subset M \times (\overline{S} - S(r_{2m})) \qquad m \geqq m_0 \tag{15}$$

donc M étant un continu:

$$0 \neq M \times \overline{S(r_{2m})} \times (\overline{S} - S(r_{2m})) = M \times [\Phi \times \overline{S(r_{2m})}] \times \times [\Phi \times (\overline{S} - S(r_{2m}))] = M \times (B_m + I_m) \qquad m \geqq m_0. \tag{16}$$

Donc, si (14) n'a pas lieu, on aura, M étant fermé et $\overline{\lim}\, I_m = z(1, 0)$, la relation (13). (C_4) est ainsi démontré.

Soit maintenant D un domaine tel que $F(D) \times F(S)$ et $F(D) \times F(G_k)$ ne contiennent aucun continu et que:

$$D \times F(S) \neq 0 \neq (R_2 - \overline{D}) \times F(S) \tag{17}$$

$F(D) \times F(S)$ étant punctiforme, donc non dense sur $F(S)$ on a:

$$F(S) = \overline{D \times F(S)} + \overline{(R_2 - \overline{D}) \times F(S)} \tag{18}$$

donc, $F(S)$ étant un continu:

$$\overline{D \times F(S)} \times \overline{(R_2 - \overline{D}) \times F(S)} \neq 0. \tag{19}$$

Soit $z(1, \overline{\varphi})$ un point de l'ensemble (19); nous pouvons supposer $0 \leqq \overline{\varphi} < 2\pi$; il existe par suite un entier non négatif $l' \leqq p - 1$

tel que l'on a l'une au moins des inégalités:

$$\frac{2l'\pi}{p} < \overline{\varphi} < \frac{2(l'+1)\pi}{p}, \tag{20}$$

$$\frac{(2l'+1)\pi}{p} < \overline{\varphi} < \frac{(2l'+3)\varphi}{p}. \tag{21}$$

Supposons que l'on a (20). Soit $\sigma > 0$. Le point $z(1, \overline{\varphi})$ étant contenu dans l'ensemble (19), nous pouvons determiner φ', φ'', de manière à avoir:

$$z(1, \varphi') \subset D; \quad z(1, \varphi'') \subset R_2 - \overline{D}. \tag{22}$$

$$|\overline{\varphi} - \varphi'| < \frac{\sigma}{2} > |\overline{\varphi} - \varphi''|. \tag{23}$$

$$\frac{2l'\pi}{p} < \varphi' < \frac{2(l'+1)\pi}{p}; \quad \frac{2l'\pi}{p} < \varphi'' < \frac{2(l'+1)\pi}{p}. \tag{24}$$

D et $R_2 - \overline{D}$ étant des domaines, on peut d'après $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$ et (22) determiner un entier positif m_1 de manière à avoir:

$$z' = z(r_{4m_1-1}, \varphi') \subset D; \quad z'' = z(r_{4m_1-1}, \varphi'') \subset R_2 - \overline{D}, \tag{25}$$

$$1 - r_{4m_1-1} < \frac{\sigma}{2}. \tag{26}$$

D'après (24) l'un des deux arcs de la circonférence $r = r_{4m_1-1}$, aux extrémités z', z'' est contenu dans l'arc: $r = r_{4m_1-1}$, $\frac{2l'\pi}{p} \leqq \varphi \leqq \frac{2(l'+1)\pi}{p}$, donc d'après (4) dans $F(G_{k_1})$, où $k_1 = (m_1 - 1)(m_1 + 2)p + 2 + l'$. Désignons cet arc par L. D'après (25) $L \times D \neq 0 \neq L \times (R_2 - \overline{D})$; d'autre part L est un continu et $L \times F(D)$ est punctiforme. Il en résulte:

$$\overline{L \times D} \times \overline{L \times (R_2 - \overline{D})} \neq 0. \tag{27}$$

Soit $z''' = z(r_{4m_1-1}, \varphi''')$ un point de (27). En utilisant la définition de L, et les inégalités (23), (26) on obtient facilement l'inégalité:

$$\varrho(z''', z(1, \overline{\varphi})) < \sigma. \tag{28}$$

D'autre part

$$z''' \subset \overline{D\times F(G_{k_1})}\times\overline{(R_2-D)\times F(G_{k_1})} \subset \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \overline{D\times F(G_k)}\times\overline{(R_2-\overline{D})\times F(G_k)}},$$

σ étant quelconque il en résulte:

$$z(1,\bar{\varphi})\subset \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \overline{D\times F(G_k)}\times\overline{(R_2-\overline{D})\times F(G_k)}}. \tag{29}$$

On obtient le même résultat si l'on suppose (21). (C_5) est ainsi démontré. Reste à démontrer (C_6). Faisons d'abord la remarque suivante: étant donné G_{k_1} et G_{k_2} il existe une suite d'entiers: $q_1, q_2, \ldots, q_n$, telle que les ensembles: $F(G_{k_1})\times F(G_{q_1})$, $F(G_{q_i})\times F(G_{q_{i+1}})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $F(G_{q_n})\times F(G_{k_2})$ contiennent des continus. Soit maintenant D un domaine remplissant les conditions de (C_6). Si $D\times F(G) \neq 0 \neq (R_2-\overline{D})\times F(G)$, — ($C_6$) est vérifiée. — Dans le cas contraire on voit facilement en s'appuyant sur la relation $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{G}_k = F(G)$, qu'il existe deux indices k_1, k_2 tel que

$$D\times F(G_{k_1}) \neq 0 \neq (R_2-\overline{D})\times F(G_{k_2}). \tag{30}$$

En utilisant la remarque précedente et le fait que les ensembles $F(D)\times F(G_{k_i})$ sont punctiformes on déduit facilement de (30) l'existence d'un indice q tel que:

$$D\times F(G_q) \neq 0 \neq (R_2-\overline{D})\times F(G_q). \tag{31}$$

Passons maintenant à la définition de K.

S désignant le cercle $r<1$ posons:

$$T(n_1) = G_{n_1}(S, 1) \qquad n_1 = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

$$T(n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}) = G_{n_{k+1}}\left(T(n_1, n_2, \ldots, n_k), \frac{1}{n_1+n_2+\ldots+n_k}\right) \tag{33}$$

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1} = 1, 2, \ldots$$

$$U_k = \overline{\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} T(n_1, n_2, \ldots, n_k)}, \tag{34}$$

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} U_k, \tag{35}$$

$$B_0 = B(S, 1), \tag{36}$$

$$B(n_1, n_2, \ldots, n_k) = B\left(T(n_1, n_2, \ldots, n_k), \frac{1}{n_1+n_2+\ldots+n_k}\right), \tag{37}$$

$$A = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} B(n_1, n_2, \ldots, n_k), \tag{38}$$

A est evidemment un ensemble dénombrable.

On a d'après (34) et (C_1):

$$U_{k+1} = \overline{\sum \Phi\left(T(n_1, n_2, \ldots, n_k), \frac{1}{n_1+n_2+\ldots+n_k}\right)} \tag{39}$$

d'ou il résulte que U_k est un continu; donc K est un continu.

Désignons par $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}$ les composants de:

$$T(n_1, n_2, \ldots, n_k) - \Phi\left(T(n_1, n_2, \ldots, n_k), \frac{1}{n_1+n_2+\ldots+n_k}\right) \tag{40}$$

$n_{k+1} = 1, 2, \ldots$ On a alors:

$$R_2 - K = (R_2 - \overline{S}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, \ldots, n_k} H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}. \tag{41}$$

$R_2 - S$ et les $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, $n_1, n_2, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots$ étant les composants de $R_2 - K$. D'après (C_3) on aura:

$$\lim_{n_{k+1}\to\infty} \delta(H_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}) = 0; \quad \lim_{n_1\to\infty} \delta(H_{n_1}) = 0. \tag{42}$$

$$\delta(H_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}) \leq \frac{1}{n_1+n_2+\ldots+n_k}. \tag{43}$$

Donc pour un $\sigma>0$ donné il n'y qu'un nombre fini des composants de $R_2 = K$ de diamètre $>\sigma$. Les frontières de ces composants étant des lignes simples fermés d'après un théorème de Schoenfliess. *K est un continu Péanien.*

Soit $M\subset K$ un continu. Il résulte de (C_2):

$$\delta(T(n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1})) \leq \frac{1}{n_1+n_2+\ldots+n_k} \leq \frac{1}{k}. \tag{44}$$

Soit k_1 un entier tel que $\frac{1}{k_1} < \delta(M)$. (34) et ($C_1$) donnent:

$$U_{k_1+1} = F(S) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} F(T(n_1, n_2, \dots, n_k)) + \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{k+1}} \overline{T(n_1, n_2, \dots, n_{k+1})}, \tag{45}$$

donc, comme $M \subset U_{k+1}$:

$$M = [M \times F(S)] \times \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} M \times F(T(n_1, n_2, \dots, n_k)) + \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{k_1+1}} \overline{T(n_1, n_2, \dots, n_{k_1+1})} \times M. \tag{46}$$

(46) donne une décomposition de M en une infinité dénombrablo d'ensembles fermés. Un au moins de ces ensembles contient un continu. Nous avons à distinguer trois cas:

a) $M \times F(S)$ contient un continu M_1. Alors $M_1 \subset \Phi(S, 1)$, $M_1 \times F(S) \neq 0$, donc d'après (C_4), (36), (38): $M \times A \supset M_1 \times B_0 = M_1 \times B(S, 1) \neq 0$.

b) Pour un système d'indices $n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_2}$, $k_2 \leqq k_1$, $M \times F(T(n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_2}))$ contient un continu M_1.

Alors $M_1 \subset \Phi\left(T(n'_1, n'_2, n'_{k_2}), \frac{1}{n'_1 + \dots + n'_{k_2}}\right)$ et $M_1 \times F(T(n'_1, \dots, n'_{k_2})) \neq 0$ donc d'après (C_4), (37), (38): $M \times A \supset M_1 \times B(n'_1, \dots, n'_{k_2}) \neq 0$.

c) Pour un systéme d'indices $n'_1, \dots, n'_{k_1+1}$, $\overline{T(n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_1+1})} \times M$ contient un continu. D'après la définition de k_1 et d'après (44) M n'est pas contenu dans $\overline{T(n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_1+1})}$, car son diamètre est supérieur à celui de ce dernier ensemble. Donc $M \times F(T(n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_1+1})) \neq 0$. Si $M \times T(n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_1+1}) \neq 0$, il résulte d'un théorème de Janiszewski[1]), qu'il existe un continu $M_1 \subset M \times \overline{T(n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_1+1})}$ tel que l'on a: $M_1 \times F(T(n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_1+1})) \neq 0$. Comme d'autre part, $M_1 \subset M \subset K \subset \Phi(T(n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_1+1}))$, on aura d'après ($C_4$), (37), (38): $M \times A \supset M_1 \times B(n'_1, \dots, n'_{k_1+1}) \neq 0$. Si $M \times T(n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_1+1}) = 0$ alors $M \times F(T(n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_1+1}))$ est identique avec $M \times \overline{T(n'_1, n'_2, \dots, n'_{k_1+1})}$) donc contient un continu et en raisonnant comme dans le cas b)

[1]) Janiszewski: Sur les continus irréductibles entre deux points. Thèse. Paris 1913, p. 22.

on a: $M \times A \neq 0$. On voit que cette dernière relation est satisfaite quel que soit le continu $M \subset K$. *Donc $K - A$ est punctiforme* c. à d. *K possède la propriété II.*

Soit maintenant D un domaine tel que $K \times D \neq 0 \neq K \times (R_2 - \overline{D})$, nous montrerons que $K \times F(D)$ est un ensemble non dénombrable. C'est certainement le cas si l'un des ensembles $F(D) \times F(S)$ et $F(D) \times F(T(n_1, n_2, \dots, n_k))$ contient un continu. Supposons maintenant, que tous ces ensembles sont punctiformes. Nous distinguerons deux cas.

a) $D \times F(S) \neq 0 \neq (R_2 - \overline{D}) \times F(S)$.

Posons:

$$N = \overline{[D \times F(S)} \times \overline{(R_2 - \overline{D}) \times F(S)]} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \overline{D \times F(T(n_1, n_2, \dots, n_k))} \times \overline{(R_2 - \overline{D}) \times F(T(n_1, n_2, \dots, n_k))}. \tag{47}$$

On a $N \subset K \times F(D)$. D'autre part, en vertu des propriétés de D on peut utiliser (C_5) ce qui donne:

$$0 \neq N \subset \overline{\sum_{n_1=1}^{\infty} \overline{D \times F(T(n_1))} \times \overline{(R_2 - \overline{D}) \times F(T(n_1))}} + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \sum_{n_{k+1}=1}^{\infty} \overline{D \times F(T(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1})} \times \overline{(R_2 - \overline{D}) \times F(T(n_1, n_2, \dots, n_{k+1}))}} \subset \overline{N} \tag{48}$$

c. à d. N est un ensemble dense en soi. L'ensemble fermé $K \times F(D)$ contient donc un ensemble parfait $\overline{N}$, il est par suite de la puissance du continu.

b) On a l'une des relations:

$$D \times F(S) > 0. \tag{49}$$

$$(R_2 - \overline{D}) \times F(S) = 0. \tag{50}$$

et on peut toujours supposer que c'est la première (si on aurait (50), on remplacerait D par $R_2 - \overline{D}$). Considérons l'ensemble:

$$L = F(S) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} F(T(n_1, n_2, \dots, n_k)). \tag{51}$$

On a $K = \overline{L}$, donc:

(52) $$D \times L \neq 0 \neq (R_2 - \overline{D}) \times L.$$

Soit k le plus petit entier tel que, pour un certain système $m_1, m_2, \ldots, m_k$:

(53) $$D \times F(T(m_1, m_2, \ldots, m_k)) \neq 0$$

un tel entier k existe certainement, d'après (49) et (52).

Supposons d'abord $k = 1$: on aura alors:

(54) $$D \times \left(F(S) + \sum_{m=1}^{\infty} F(T(m))\right) \neq 0 \neq (R_2 - D) \times \times \left(F(S) + \sum_{m=1}^{\infty} F(T(m))\right)$$

et, d'après les propriétés de D on peut appliquer (C_6), ce qui donne, pour un certain entier m_1':

(55) $$D \times F(T(m_1')) \neq 0 \neq (R_2 - \overline{D}) \times F(T(m_1')).$$

En remplaçant dans le cas a), $F(S)$ par $F(T(m_1'))$ on démontre par un raisonnement analogue à celui de a), que $K \times F(D)$ a la puissance du continu. Supposons maintenant $k > 1$. Alors d'après la signification de k, on aura:

(56) $$D \times F(T(m_1, m_2, \ldots, m_{k-1})) = 0$$

donc:

(57) $$D \times \left[F(T(m_1, m_1, \ldots, m_{k-1})) + \sum_{m=1}^{\infty} F(T(m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m)\right] \neq 0 \neq$$
$$\neq (R_2 - D) \times \left[F(T(m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}) + \sum_{m=1}^{\infty} F(T(m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m))\right].$$

D'après (C_6) il existe un m_k' tel que:

(58) $$D \times F(T(m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m_k')) \neq 0 \neq (R_2 - \overline{D}) \times \times F(T(m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m_k')).$$

En raisonnant comme dans le cas a) (où l'on remplace $F(S)$ par $F(T(m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m_k'))$ on voit que $K \times F(D)$ a la puissance du continu.

Donc, quel-que soit le domaine D remplissant la condition:

(56) $$D \times K \neq 0 \neq (R_2 - \overline{D}) \times K$$

l'ensemble $F(D) \times K$ a la puissance du continu. *Donc, tout point de K est d'ordre* $\mathfrak{c}$, $K^c + K$ c. à d. K *possède la propriétés 1.*

Świder, 19/VII 1930.