Voici une application de notre théorème.

Soit F_0 la famille de tous les intervalles aux extrémités rationnelles. Comme on sait [1]), il existe pour tout ensemble linéaire E une opération de M. Hausdorff, $H_{N(E)}$, telle que $E \varepsilon H_{N(E)}(F_0)$. Soit maintenant F une famille donnée quelconque de puissance du continu d'ensembles linéaires. D'après notre théorème, il existe une opération de M. Hausdorff, H_P, telle que $H_P(F_0) \supset H_{N(E)}(F_0)$ et parsuite $E \varepsilon H_P(F_0)$ pour tout ensemble E de la famille F. On obtient ainsi la proposition suivante, due à M. Szpilrajn [2]).

Quelle que soit la famille F de puissance du continu d'ensembles linéaires, il existe toujours une opération de M. Hausdorff, H_P, telle que $H_P(F_0) \supset F$, où F_0 désigne la famille de tous les intervalles aux extrémités rationnelles.

[1]) Fund. Math. t. XV, p. 201.

[2]) Voir la Note citée de M. Szpilrajn.

Sur la décomposition du cercle ouvert en arcs simples ouverts. II.

Par

Stanisława Nikodym (Cracovie).

Le travail présent peut être considéré comme la suite d'une note insérée sous le même titre dans le volume XV des *Fund. Math.* [1]).

Théorème I. Soit G l'intérieur d'une courbe simple fermée C du plan. Supposons qu'on ait décomposé G en des arcs simples ouverts $\{K\}$ jouissant des propriétés suivantes:

1° leurs diamètres surpassent un nombre positif fixe,

2° ils sont disjoints deux-à-deux, même si l'on les ferme,

3° les deux bouts de chaque arc K ne coïncident jamais et ils sont des points se trouvant sur la frontière C du domaine G,

4° par tout point $p \varepsilon G$ passe une courbe K.

Soit $p_0, p_1, p_2, \dots p_n, \dots$ une suite de points de G, telle que $\lim p_n = p_0$. Désignons par K_n ($n = 0, 1, \dots$) l'arc de la décomposition passant par p_n.

Dans ces conditions il existe un cercle ouvert $S(p_0, a)$ tel que l'ensemble d'accumulation de la suite d'ensembles

$$\{K_n \cdot \overline{S(p_0, a)}\}$$

est contenu dans K_0.

[1]) p. 263—270. Les problèmes que je considère dans le travail présent je dois à M. O. Nikodym.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons, ce qui est permis, que les K_n $(n=0, 1, \ldots)$ sont disjoints deux-à-deux.

Envisageons un cercle arbitraire $S(p_0, a')$ tel que $\overline{S(p_0, a')} \subset G$. Posons

$$A = ens.\ d'acc. \{K_n \cdot \overline{S(p_0, a')}\}.$$

Je dis que, pour établir notre théorème, il suffit de démontrer que, dans le cas, où $A - K_0 \neq 0$, la distance

(1) $$b = \varrho[K_0, A - K_0]$$

est positive.

En effet, dans le cas, où la distance est positive, posons:

$$a = min\left[\frac{b}{2}, a'\right].$$

On a

$$\overline{S(p_0, a)} \cdot (A - K_0) = 0.$$

L'ensemble d'accumulation A^* de la suite infinie d'ensembles $\{K_n \cdot \overline{S(p_0, a)}\}$ étant évidemment contenu dans A, on obtient:

$$\overline{S(p_0, a)} \cdot (A^* - K_0) = 0,$$

d'où, puisque $A^* \subset \overline{S(p_0, a)}$, il en résulte que $A^* - K_0 = 0$, c'est-à-dire $A^* \subset K_0$.

Cela étant posé, supposons que $A - K_0 \neq 0$. Pour démontrer la relation (1), supposons le contraire:

$$\varrho[K_0, A - K_0] = 0.$$

Il existe alors une suite infinie de points $t_1, t_2, \ldots t_m, \ldots$ de $A - K_0$ tendant vers un point t_0 de K_0.

Les points t_0, t_m $(m = 1, 2, \ldots)$ étant contenus dans $\overline{S(p_0, a')}$, ils appartiennent tous à G. Soit L_m l'arc passant par t_m et appartenant à $\{K\}$. L'arc passant par t_0 est K_0.

Comme $t_m \epsilon A - K_0$, aucun point t_m n'appartient à K_0; par conséquent les arcs $K_0, L_1, L_2 \ldots L_m \ldots$ et les points $t_0, t_1, t_2 \ldots t_m \ldots$ se trouvent dans les conditions du théorème démontré par moi dans le travail cité.

Il existe donc une suite partielle $\nu_1, \nu_2, \ldots$ d'indices telles que l'arc $L_{\nu_{n+1}}$ divise G entre t_0 et L_{ν_n}, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Considérons le point t_{ν_1}. Il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que

(2) $$S(t_0, \varepsilon) \cdot L_{\nu_1} = 0 \quad \text{et} \quad S(t_{\nu_1}, \varepsilon) \cdot L_{\nu_2} = 0.$$

L_{ν_2} divise ainsi G entre $S(t_0, \varepsilon)$ et $S(t_{\nu_1}, \varepsilon)$.

Mais $t_{\nu_1} \epsilon A$ et, par conséquent, il existe une suite infinie d'indices $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$ et une suite infinie de points $r_{\mu_1}, r_{\mu_2}, \ldots$ tels que

$$r_{\mu_n} \epsilon K_{\mu_n} \cdot \overline{S(p_0, a')}, \quad r_{\mu_n} \epsilon S(t_{\nu_1}, \varepsilon).$$

On a

$$K_{\mu_n} \cdot L_{\nu_2} = 0$$

parce que, dans le cas contraire, on aurait $K_{\mu_n} = L_{\nu_2}$, d'où $L_{\nu_2} \cdot S(t_{\nu_1}, \varepsilon) \neq 0$, contrairement à (2).

Je dis que

(3) $$S(t_0, \varepsilon) \cdot K_{\mu_n} = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

En effet, dans le cas contraire K_{μ_n} serait un continu reliant $S(t_0, \varepsilon)$ avec r_{μ_n}, donc avec $S(t_{\nu_1}, \varepsilon)$ et n'ayant aucun point commun avec L_{ν_2}, ce qui est contradictoire.

La rélation (3) étant démontrée, il en résulte que la distance des points r_{μ_n} et t_0 est supérieure à ε, ce qui est impossible puisque $\lim t_n = t_0$.

Nous avons ainsi démontré que les relations $A - K_0 \neq 0$ et $\varrho[K_0, A - K] = 0$ sont contradictoires et, par conséquent, le théorème peut être considéré comme établi.

Théorème II. D a n s l e s c o n d i t i o n s d u t h é o r è m e I i l e x i s t e u n c e r c l e $S(p_0, \varepsilon)$ o u v e r t t e l q u e t o u t s o u s - a r c d e K_0 c o n t e n u d a n s $S(p_0, \varepsilon)$ e s t a u s s i c o n t e n u d a n s l'e n s e m b l e l i m i t e d e l a s u i t e $\{K_n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

D é m o n s t r a t i o n.

1. Supposons, ce qui est évidemment permis, que les arcs $K_0, K_1, \ldots, K_n, \ldots$ sont différents deux-à-deux et, par conséquent, sans points communs. Par conséquent $p_n \overline{\epsilon} K_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

En vertu du théorème précédent il existe un cercle $S(p_0, \varepsilon)$ contenu après la fermeture dans G et tel que l'ensemble d'accumulation de la suite

$$\{\overline{S(p_0, \varepsilon)} \cdot K_n\}$$

est contenu dans K_0 et, par conséquent, dans

$$\overline{S(p_0, \varepsilon)} \cdot K_0.$$

En fixant un sens de parcours sur K_0, et par conséquent sur $\overline{K_0}$, désignons par A_0 et B_0 respectivement l'origine et le bout de $\overline{K_0}$.

Les points A_0 et B_0 sont différents (d'après l'hypothèse) et se trouvent sur la frontière C du domaine G; donc, ils n'appartiennent pas à $\overline{S(p_0, \varepsilon)}$. Il en résulte qu'il existe un sémicontinu saturé L_0' contenant p_0 et contenu dans

$$S(p_0, \varepsilon) \cdot \overline{K_0(A_0, p_0)},$$

où $\overline{K_0(A_0, p_0)}$ désigne l'arc simple cheminant de A_0 à p_0 et contenu dans $\overline{K}_0$. D'une manière analogue on voit qu'il existe un sémicontinu saturé L_0'' contenant p_0 et contenu dans $S(p_0, \varepsilon) \cdot \overline{K_0(p_0, B_0)}$. L'ensemble L_0' est un arc simple dont l'origine soit désigné par a_0; d'une manière analogue désignons par b_0 le bout de l'arc $\overline{L_0''}$. Les points a_0, b_0 sont différents, ils sont situés sur la circonférence du cercle envisagé et, en outre, l'arc *ouvert* $L_0 = K_0(a_0, b_0)$ est le sémicontinu saturé contenant p_0 et contenu dans $S(p_0, \varepsilon) \cdot K_0$.

On a

$$\overline{L}_0 = \overline{L}_0' + \overline{L}_0''.$$

2. Nous allons démontrer que

$$L_0 \subset \mathit{ens.} \lim_{n \to \infty} K_n.$$

Pour démontrer cela, supposons le contraire.

Il existe alors un point $p_0^* \in L_0$ et une suite croissante d'indices $\{\alpha_n\}$ telle que la distance du point p_0^* de chaque K_{α_n} surpasse un nombre positif, soit δ.

En désignant par S^0 la circonférence du cercle $S(p_0, \varepsilon)$, considérons le continu

$$Q = S^0 + (A_0, a_0) + (b_0, B_0)$$

où (A_0, a_0) et (b_0, B_0) sont des arc simples (fermés) contenus dans $\overline{K}_0$.

Le continu en question est distancé de point p_0 et, par conséquent, il détermine un domaine ouvert et saturé D contenant p_0 et tel que $D \cdot Q = 0$, la frontière de D étant contenue dans Q. Le domaine D qui est, d'ailleurs, l'intérieur d'une courbe simple fermée, est divisé par l'arc $\overline{L}_0$ en deux domaines, dans un au moins desquels, soit D_0 se trouve un infinité de points de la suite $\{p_{\alpha_n}\}$. En effet, comme $\lim\limits_{n \to \infty} p_{\alpha_n} = p_0$ et $p_0 \in L_0$, il y a une infinité de points de $\{p_{\alpha_n}\}$ contenus dans D.

Désignons par $\{p_{\beta_n}\}$ la suite infinie de points de $\{p_{\alpha_n}\}$ contenus dans D_0.

3. Le domaine D_0 est l'intérieur d'une courbe simple fermée, contenant $\overline{L}_0$. Le domaine D_0 est le plus petit domaine contenant les p_{β_n} et dont la frontière appartient à $S^0 + \overline{K}_0$. L'arc $\overline{L}_0$ appartient à la frontière de D_0.

L'arc L_0 divise le cercle ouvert en deux domaines; celui qui contient p_{β_1} (et, par conséquent les p_{β_n}) soit désigné par D_0'. La frontière de D_0' étant contenue dans $S^0 + K_0$, il en résulte que $D_0 \subset D_0'$. La frontière de D_0' est la somme de $\overline{L}_0$ et d'un sous-arc de S^0 qui soit désigné par S'. La frontière de D_0 est contenue dans $S' + \overline{K}_0$, ce qui se démontre aisément à l'aide du théorème de J o r d a n.

Soit $\overline{K_0(a_0^*, b_0^*)}$ le plus grand sous-arc simple (fermé) de K_0 contenu dans la frontière de D_0 et contenant p_0 et, par conséquent $\overline{L}_0$; soit

(1) $$A_0 \prec a_0^* \preceq a_0 \prec p_0 \prec b_0 \preceq b_0^* \prec B_0.$$

On a $a_0^* \in S^0$, $b_0^* \in S^0$.

Les points a_0^*, b_0^* se trouvent nécessairement sur l'arc $\overline{S'}$ (puisque la frontière de D_0 est contenue dans $\overline{S'} + \overline{K}_0$). En vertu de (1) les points a_0^*, b_0^* sont différents. On voit, en outre que, si l'on chemine l'arc $\overline{S'}$ dans la direction de a_0 à b_0, il est impossible qu'on ait $b_0^* \prec a_0^*$, puisque, dans ce cas, les arcs (ou points) $\overline{K_0(a_0, a_0^*)}$, $\overline{K_0(b_0, b_0^*)}$ auraient au moins un point commun. On a donc sur $\overline{S'}$:

(2) $$a_0 \preceq a_0^* \prec b_0^* \preceq b_0.$$

Je dis que l'arc ouvert

(3) $$T \underset{df}{=} \overline{S'}(a_0^*, b_0^*)$$

ne contient pas de points de $\overline{K_0(a_0^*, b_0^*)}$.

En effet, supposons p. ex. que $c \in T \cdot \overline{K_0(a_0, a_0^*)}$.

On a nécessairement sur K_0:

(4) $$a_0^* \prec c \prec a_0, \quad \text{donc} \quad a_0 \neq a_0^*.$$

Le point a_0^* et b_0^* étant des points de la frontière de D_0, il existe un arc simple ouvert P, situé dans D_0 et reliant b_0^* avec a_0^*.

Mais, on a sur S':

$$a_0 \lessgtr a_0^* \lessgtr c \lessgtr b_0^*$$

et, par conséquent $\overline{K_0(a_0, c)} \cdot \overline{P} \neq 0$.

Par conséquent soit a_0^*, soit b_0^* se trouvent sur $\overline{K_0(a_0, c)}$.

Pour b_0^* cela est impossible. Par conséquent $a_0^* \in \overline{K_0(a_0, c)}$ ce qui est en contradiction avec (4).

Nous avons ainsi démontré que l'arc T est libre de points de $\overline{K_0(a_0^*, b_0^*)}$.

4. Soit M un sémicontinu saturé (non vide) contenu dans $S(p_0, \varepsilon) \cdot K_{\beta_n}$, où n est fixé pour un moment. C'est un arc simple ouvert. Je dis que ses extrémités se trouvent nécessairement sur l'arc ouvert $T = S'(a_0^*, b_0^*)$.

En effet, M n'a pas de points communs avec $Q = S^0 + \overline{K_0(A_0, a_0)} + \overline{K_0(b_0, B_0)}$, puisque $K_0 \cdot K_{\beta_n} = 0$. Par conséquent $M \subset D_0$, car $p_{\beta_n} \in D_0$ et puisque la frontière de D_0 est contenue dans Q.

D'autre part, les extrémités de M se trouvant sur S^0, elles appartiennent à Q. Comme D_0 est un des domaines saturés contenus dans le complémentaire de Q, les dites extrémités se trouvent sur la frontière de D_0.

On voit aussi aisément qu'elles se trouvent aussi sur la frontière de D_0', donc sur S'. Il suffit maintenant de démontrer qu'aucune de ces extrémités n'appartient ni à $\overline{S'(a_0, a_0^*)}$ ni à $\overline{S'(b_0, b_0^*)}$.

Supposons que l'extrémité c appartient à $\overline{S'(a_0, a_0^*)}$.

Dans ce cas on a $a_0 \neq a_0^*$, puisque, dans le cas contraire on aurait $a_0 \in K_0 \cdot K_{\beta_n} \neq 0$, ce qui est impossible.

Le point p_0 étant un point de la frontière de D_0, le point p_{β_n} peut être relié dans D_0 avec p_0 par un arc simple ouvert, soit N. Il existe donc un arc simple fermé $\overline{P}$, joignant p_0 et c et contenu dans $\overline{M(p_{\beta_n}, c)} + \overline{N}$. L'arc simple ouvert P est contenu dans D_0 et, par conséquent dans D_0'. Comme $\overline{K_0(a_0, a_0^*)}$ est un arc simple contenu dans $\overline{D_0'}$ et comme les points p_0, a_0, c, a_0^* forment une suite procédant dans un de deux sens de parcours de la frontière de D_0', il en résulte que $P \cdot \overline{K_0(a_0, a_0^*)} \neq 0$, ce qui est impossible, puisque $P \subset D_0$. Nous avons ainsi démontré que les deux extrémités de M se trouvent sur $T = S'(a_0^*, b_0^*)$.

5. Cela étant posé, considérons la suite de points $\{p_{\beta_n}\}$. Comme $\lim_{n \to \infty} p_{\beta_n} = p_0$, il existe, en vertu du théorème cité [1]), une suite partielle $\{p_{\gamma_n}\}$ extraite de $\{p_{\beta_n}\}$, telle que $K_{\gamma_{n+1}}$ divise G entre p_0 et K_{γ_n} pour $n = 1, 2, \ldots$

Posons:

$$p_n' = p_{\gamma_n}, \quad K_n' = K_{\gamma_n}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

K_2' divise G entre p_0 et p_1'; donc K_2 divise $S(p_0, \varepsilon)$ entre p_0 et p_1'. Par conséquent $K_2' \cdot S(p_0, \varepsilon)$ contient un sémicontinu saturé T_1 divisant $S(p_0, \varepsilon)$ entre p_0 et p_1'. D'après ce que nous avons dit dans le numéro 3, on a $T_1 \subset D_0$ et T_1 est un arc simple ouvert dont les extrémités se trouvent sur l'arc ouvert $T = S'(a_0^*, b_0^*)$. Désignons ces extrémités a_1, b_1, en suivant l'ordre des points de T dans le sens de a_0^* à b_0^*. La courbe simple fermée $S'(a_0^*, a_1) + \overline{T} + S'(b_1, b_0^*) + \overline{L_0}$ détermine le domaine borné que nous désignerons par D_1.

Remarquons que

$$\varrho(p_0, \overline{T_1}) \leqq \varrho(p_0, p_1').$$

En effet, dans le cas contraire le point $p_1' = p_{\gamma_1}$ serait situé dans un cercle ouvert, centré dans p_0, disjoint avec $\overline{T_1}$ et, par conséquent, $\overline{T_1}$ ne diviserait pas $S(p_0, \varepsilon)$ entre p_0 et p_1'.

Nous procédons avec l'arc K_3' d'une manière analogue, comme avec K_2', en trouvant un arc simple ouvert T_2, contenu dans $K_3' \cdot S(p_0, \varepsilon)$ et divisant $S(p_0, \varepsilon)$ entre p_0 et T_1. On démontre que T_2 divise aussi D_1 entre p_0 et T_1 et que les bouts a_2, b_2 de $\overline{T_2}$ se trouvent situés respectivement sur les sous-arc ouverts $S'(a_0, a_1)$ et $S'(b_0, b_1)$ de S' [2]). On a

$$\varrho(p_0, \overline{T_2}) \leqslant \varrho(p_0, p_2').$$

6. Supposons, d'une manière générale, qu'on ait défini les arcs ouverts $T_1, T_2, \ldots, T_m$, où $m \geqslant 2$, leurs bouts $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_m, b_m$, et les domaines $D_1, D_2, \ldots, D_m$.

Supposons que, si $m \geqslant 2$, on a:

[1]) S. Nikodym, l. c.

[2]) Cela peut se démontrer par le considération du domaine contenu dans D_1, dont la frontière contient L_0 et étant contenue dans $S^0 + K_0 + K_3'$.

1°. a_m et b_m sont situés respectivement sur l'arc ouvert $S'(a_0^*, a_{m-1})$ et $S'(b_0^*, b_{m-1})$,

2°. D_m est l'intérieur de la courbe simple fermée $S'(a_0^*, a_m) + \overline{T}_m + S'(b_m, b_0^*) + \overline{L}_0$,

3°. T_m est un sémicontinu saturé divisant $S(p_0, \varepsilon)$ entre p_0 et T_{m-1} et contenu dans $S(p_0, \varepsilon)\cdot \overline{K}'_{m+1}$; T_m est un arc simple ouvert aux extrémités a_m, b_m,

4°. $\varrho(p_0, \overline{T}_m) \leqslant \varrho(p_0, p'_4)$,

Nous nous proposons de définir T_{m+1}, a_{m+1}, b_{m+1}, D_{m+1}, et de démontrer que les propriétés 1°—4° ne cessent pas d'avoir lieu.

L'arc K'_{m+2} divise G entre p_0 et K'_{m+1} et, par conséquent, entre p_0 et p'_{m+1}. A fortiori K'_{m+2} divise $S(p_0, \varepsilon)$ entre p_0 et T_m. Par conséquent il existe dans K'_{m+2} un sémicontinu T_{m+1} saturé contenu dans $S(p_0, \varepsilon)$ et le divisant entre p_0 et T_m. T_{m+1} est un arc simple ouvert, dont les bouts sont, d'après le numéro 3, nécessairement situés sur T. L'arc T_{m+1} divise nécessairement D_m entre p_0 et T_m et, en outre, on a $T_{m+1} \subset D_m$.

Il en résulte, d'après 2°, que les extrémités de T_{m+1} se trouvent sur la courbe simple fermée

$$S'(a_0^*, a_m) + \overline{T}_m + S'(b_m, b_0^*) + \overline{L}_0.$$

Mais, d'après 3°, $T_m \subset \overline{K}'_{m+1}$ et, on sait que $\overline{K}_0$, $\overline{K}'_{m+1}$ et $\overline{K}'_{m+2}$ sont disjoints deux-à-deux. Il en résulte que l'une de deux extrémités, désignons la par a_{m+1}, se trouve sur l'arc ouvert $S'(a_0^*, a_m)$ et l'autre sur $S'(b_0^*, b_m)$. Elle ne peuvent pas se trouver sur le même de ces arcs puisque $\overline{T}_{m+1}$ divise D_m entre p_0 et T_m.

Les propriétés 1° et 3° sont établies en même temps. La somme

$$\overline{L}^0 + \overline{S'(a_0^*, a_{m+1})} + \overline{T}_{m+1} + \overline{S'(b_0^*, b_{m+1})}$$

est une courbe simple fermée dont l'intérieur nous désignerons par D_{m+1}. (La propriété 2° subsiste ainsi). D_{m+1} est un de deux domaines ouverts en lesquels T_{m+1} divise D_m.

Puisque T_{m+1} divise $S(p_0, \varepsilon)$ entre p_0 et p'_{m+1}, on trouve aisément que

$$\varrho(p_0, \overline{T}_{m+1}) \leqq \varrho(p_0, p'_{m+1}),$$

(ce qui représente la propriété 4°).

Le procédé d'induction étant accompli, on a obtenu une suite infinie d'arcs simples $\{T_n\}$, $(n \geqslant 2)$, contenus dans $D_0 \subset S(p_0, \varepsilon)$, et leurs extrémités $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ formant des suites monotones sont situées respectivement sur les arcs ouverts $S'(a_0^*, a_1)$, $S'(b_0^*, b_1)$. En outre, puisque $\varrho(p_0, \overline{T}_n) \leqslant \varrho(p_0, p'_n)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(p_0, \overline{T}_n) = 0,$$

ce qui implique l'existence des points $q_n \epsilon \overline{T}_n$, tels que $\lim_{n\to\infty} q_n = p_0$.

Les limites $a' = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b' = \lim_{n\to\infty} b_n$ existent et sont différents, comme appartenant respectivement à $\overline{S'(a_0^*, a_1)}$ et $\overline{S'(b_0^*, b_1)}$ qui sont des arcs disjoints.

Considérons la suite infinie des arcs $\overline{T_n(a_n, b_n)}$ et son ensemble d'accumulation K'.

D'après le théorème connu de Janiszewski, K' est un continu contenant a', p_0 et b'.

D'autre part, comme $\overline{T_n(a_n, b_n)} \subset \overline{D}_0$, on a nécessairement $K' \subset \overline{D}_0$. En outre, en tenant compte de ce que le cercle $S(p_0, \varepsilon)$ est choisi de sorte que

$$\text{ens. d'acc. } [K_n \cdot \overline{S(p_0, \varepsilon)}] \subset K_0,$$

on trouve que

$$K' = \text{ens. d'acc. } \overline{T_n(a_n, b_n)} \subset \overline{K}_0.$$

Il s'ensuit que

$$K' \subset \overline{K}_0 \cdot \overline{D}_0$$

et, par conséquent K' est contenu dans la frontière de D_0. Comme $K' \subset \overline{K}_0$ et comme $p_0 \epsilon K'$, il s'ensuit que $K' \subset \overline{K_0(a_0^*, b_0^*)}$.

Par conséquent $a' \epsilon \overline{K_0(a_0^*, b_0^*)}$.

Puisque $a_n \epsilon S'(a_0^*, a_1) \subset T$ pour $n > 1$ et sur T il n'y a pas de points de $\overline{K_0(a_0^*, b_0^*)}$, on a nécessairement $a' = a^*$.

En effet $\overline{T}$ ne contient que les points a^* et b^* de $\overline{K_0(a_0^*, b_0^*)}$, mais $b_0^* \bar{\epsilon} \overline{S'(a_0^*, a_1)}$.

D'une manière analogue on démontre que $b' = b^*$.

Par conséquent K' contient $\overline{K_0(a_0^*, b_0^*)}$ donc, à fortiori, L_0. Il en résulte que $p^* \epsilon K'$ (voir le numéro 1) ce qui est en contradiction avec le fait que la distance de p_1 à tous les K_{α_n} est supérieure à $\delta > 0$.

Le théorème est ainsi démontré.

Les deux théorèmes que nous venons de démontrer peuvent être réunis de manière que l'on dise: dans les conditions 1°, 2°, 3°, 4° la décomposition $\{K\}$ est *partout localement continue*, si l'on définie ce mot par les deux propriétés spécifiées dans les thèses.

A Theorem on Arbitrary Functions of Two Variables with Applications.

By

Henry Blumberg (Columbus, Ohio, U. S. A.).

The object of the present paper is to enunciate a theorem — on unrestricted real functions of two variables — which, somewhat unexpectedly, appears as a common source of a number of theorems — on arbitrary real functions of a single variable — that have appeared, from time to time, in the literature without in themselves readily suggesting a common origin [1]). It turns out that these special theorems are obtainable by considering *particular* real interval functions [2]) associated with a given function; whereas the theorem of the present paper yields an analogous result for *every* interval function.

Let $f(x, y)$, then, be an arbitrary, real, one-valued [3]) function of two real variables defined in an entire plane π. Let s be a straight line of π, and d, a given direction in π. If P is a point of s, we denote by l_{Pd}, u_{Pd} the *lim inf*, *lim sup* of f as (x, y) approaches P along the direction d; and by $I_{Pd} = (l_{Pd}, u_{Pd})$ the interval of approach of f at P along d [4]). We may now state the

[1]) See Examples 1, 2, 4 and 5 below.

[2]) The argument of an interval function is a linear interval, or the pair of its end points, their order being disregarded. If the interval function is real, the dependent variable is a real number.

[3]) The condition of one-valuedness is inserted for simplicity of statement. The argument holds essentially for many-valued functions also, the requisite modifications in statement for the latter case being evident.

[4]) We permit l_{Pd} and u_{Pd} to be $\pm\infty$.