et comme plus haut nous avons démontré la formule (1), nous en concluons que

$$f(E) = S_1 S_2 S_3 \ldots \tag{35}$$

Les ensembles S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ étant ouverts, la formule (35) prouve que $f(E)$ est un ensemble G_δ.

Notre théorème est ainsi démontré.

On voit sans peine que toute transformation homéomorphe f d'un ensemble donné E transforme tout sous-ensemble de E ouvert dans E en un sous-ensemble de $f(E)$ ouvert dans $f(E)$ et parsuite satisfait aux conditions de notre théorème. Il résulte donc tout de suite de notre théorème la proposition suivante, due à M. Mazurkiewicz [1]):

Un ensemble homéomorphe à un ensemble G_δ est un G_δ

Notre théorème peut donc être regardé comme une généralisation du théorème de M. Mazurkiewicz.

[1]) S. Mazurkiewicz: *Bull. Acad. Cracovie* 1916, p. 490—494. Cf. aussi: M. Lavrentieff: *Fund. Math.* t. VI, p. 151 et W. Sierpiński: *Fund. Math.* t. VIII, p. 135.

Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires.

Par

Alfred Tarski (Varsovie).

Introduction.

Les problèmes du type suivant constituent l'objet principal des recherches exposées dans cet ouvrage: *étant donné un ensemble infini A, combien y a-t-il de classes de sous-ensembles de A pourvues d'une propriété donnée P?* Les propriétés P, envisagées ici, ne sont d'ailleurs ni arbitraires, ni trop générales: elles reviennent toutes à ce que les classes considérées de sous-ensembles soient *closes par rapport à certaines opérations élémentaires.* Il s'agit notamment des opérations $\boldsymbol{F}$ qui font correspondre à toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ une nouvelle classe d'ensembles $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})$ et, en premier lieu, des opérations consistant à former les sommes, produits, différences et complémentaires des ensembles appartenant à la classe $\boldsymbol{K}$ et d'en ajouter à cette classe tous les sous-ensembles. Une classe $\boldsymbol{K}$ s'appelle close par rapport à une opération $\boldsymbol{F}$, lorsque le résultat $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})$ de cette opération, effectuée sur $\boldsymbol{K}$, est lui-même une sous-classe de $\boldsymbol{K}$ [1]).

Quelques-uns des problèmes discutés dans ce travail m'ont été posés par MM. Poprougénko et Sierpiński.

Les principaux résultats de ces recherches sont résumés après le § 7. Je n'en mentionnerai que ceci: dans tous les problèmes envisagés dans la suite je réussis d'établir une simple relation fonctionnelle entre la puissance de la famille de toutes les

[1]) Cf. M. Fréchet, *Des familles et fonctions additives d'ensembles*, Fund. Math. IV, p. 335.

classes composées de sous-ensembles d'un ensemble infini donné, closes par rapport à telles ou autres opérations, et la puissance de l'ensemble donné lui-même; la puissance de cet ensemble étant $\mathfrak{a}$, on va voir dans la plupart des cas que celle de la famille en question est $2^{\mathfrak{a}}$ ou bien $2^{2^{\mathfrak{a}}}$

Les résultats de cette nature sont énoncés dans divers théorèmes des §§ 3—7, sous le nom des *théorèmes fondamentaux*. Au préalable, j'introduis au § 1 quelques notions auxiliaires de la Théorie générale des Ensembles et j'ésquisse au § 2 un algorythme concernant les opérations sur les classes d'ensembles; j'examine ensuite au § 3 les propriétés générales des classes closes par rapport aux opérations quelconques, j'établis aux §§ 4—7 diverses propriétés élémentaires des opérations énumérées au début et j'y introduis aussi certaines opérations de nature auxiliaire.

Dans la majeure partie de ces recherches l'*axiome du choix* joue un rôle essentiel; je ne tâcherai donc d'en éviter l'usage que dans les démonstrations des propriétés élémentaires des opérations en question et là, où cet axiome intervient dans le raisonnement, je le mentionnerai explicitement. Quelques résultats ne seront établis qu'à l'aide de l'ainsi dite *hypothèse de Cantor sur les alephs*.

Très rapprochés des problèmes de cet ouvrage, mais plus simples au point de vue logique, sont les problèmes du type suivant: *étant donné un ensemble infini A, combien y a-t-il de sous-ensembles de A ayant une propriété donnée P?* Il est remarquable que tous le problèmes de ce genre, connus à l'heure actuelle, pourvu qu'ils soient formulés entièrement en termes de la Théorie générale des Ensembles, se laissent aisément réduire à la forme qui suit: *étant donné un ensemble infini A, combien y a t-il de sous-ensembles de A, dont la puissance jouit d'une propriété donnée Q?* [1]). Or, la question ainsi posée admet une solution générale qui s'exprime par la proposition:

A étant un ensemble infini de puissance $\mathfrak{a}$, la classe de tous les sous-ensembles de A, dont la puissance jouit de la propriété Q, est de la puissance $\sum \mathfrak{a}^{\mathfrak{r}}$, la sommation s'étendant sur tous les nombres $\mathfrak{r}$ à propriété Q [2]).

[1]) L'observation de ce phénomène n'est à présent que purement empirique; s'il est général, il serait bien intéressant de l'expliquer et de le préciser par des raisonnements rigoureux de la Métamathématique.

[2]) Cette proposition est la conséquence facile d'un théorème connu, cité ici p. 195 dans la démonstration du lem. 10^b du § 1.

Ainsi les problèmes en question rentrent totalement dans le domaine de l'Arithmétique des Nombres Cardinaux.

§ 1. Notations; notions et théorèmes auxiliaires.

Je vais me servir dans ce travail d'une série des notions et symboles connus de la Théorie générale des Ensembles sans les définir explicitement; je vais aussi m'appuyer sur diverses propriétés connues de ces notions sans citer les théorèmes qui les concernent.

Je désignerai par $a, b, \ldots, x, y, \ldots$, les *individus*, donc les objets qui ne sont pas des ensembles (ou dont je n'admet par l'hypothèse qu'ils soient des ensembles); par $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$ les ensembles d'individus; par $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \ldots, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \ldots$ les ensembles de ces ensembles, que j'appelle d'habitude *classes d'ensembles;* par $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \ldots, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \ldots$ les ensembles de classes d'ensembles, appelés *familles de classes*; par $\alpha, \beta, \ldots, \zeta, \eta, \ldots$ les nombres ordinaux et par $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{r}, \mathfrak{y}, \ldots$ les nombres cardinaux. Les signes $f, g, h, \ldots$, $F, G, H, \ldots$, $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \ldots$, $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \ldots$, $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ et $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \ldots$ vont désigner les fonctions (opérations univoques) qui admettent respectivement comme valeurs: des individus, des ensembles, des classes, des familles, des nombres ordinaux et des nombres cardinaux Dans le cas des *suites du type α*, c'est-à-dire des fonctions ne définies que pour les nombres ordinaux inférieures à un nombre α, donné d'avance, je vais employer les signes de la forme f_ξ au lieu des symboles habituels du type $f(\xi)$; outre les lettres $f, g, h, \ldots$ je me servirai dans de tels cas des lettres $a, b, \ldots, x, y, \ldots$, en écrivant p. ex. a_ξ, x_ξ etc. Les classes de fonctions et de suites seront désignées respectivement par $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \ldots$ et $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}, \ldots$

Je vais employer dans le sens habituel les signes et notions du Calcul des Ensembles. En particulier, les signes 0 et 1 étant reservés pour désigner les nombres ordinaux ou cardinaux, je désignerai par *0* l'ensemble vide et par *1* l'ensemble universel (composé de tous les individus qui entrent dans le domaine des considérations). Au fond, ce symbole *1* présente le caractère d'un signe variable désignant l'ensemble de tous les individus envisagés dans un théorème donné, et, comme tel, il est susceptible aux interprétations les plus variées; cependant, pour simplifier les notations, je vais l'employer comme fixe, sans mentionner par conséquent dans les énoncés des théorèmes les hypothèses telles que $a \in 1$ où $A \subset 1$ et, lorsqu'il s'agit des notions générales, relatives à l'ensemble *1*, sans mettre cette relativité an évidence dans leurs symboles (cf. déf. 5^c, 13, 14 et 16). — Pour désigner l'ensemble-somme, resp. le produit (la partie commune), de tous les ensembles d'une classe $\boldsymbol{K}$ donnée, je vais employer le symbole abregé $\Sigma(\boldsymbol{K})$, resp. $\Pi(\boldsymbol{K})$, en dehors du symbol habituel $\sum\limits_{X \in \boldsymbol{K}} X$, resp. $\prod\limits_{X \in \boldsymbol{K}} X$.

Les formules $a \in A$, resp. $a \bar{\in} A$ vont dire que l'élément a appartient, resp. n'appartient pas à l'ensemble A. Pour désigner l'ensemble composé d'un seul élément a, je vais employer le symbole $\{a\}$ ou parfois $J(a)$; les symboles $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$ etc. désigneront respectivement les ensembles composés exclusivement d'éléments a et b ou d'éléments a, b et c etc. Je vais désigner par $\underset{f(x)}{E}[\ ]$ l'ensemble de toutes les valeurs d'une fonction donnée f correspondant aux valeurs de l'argument x qui satisfont à la condition formulée entre les parenthèses [ ]; la signification du symbole $\underset{f(x,y)}{E}[\ ]$ est analogue.

De plus, je vais employer sans explication plusieurs signes et notions connues dans l'Arithmétique des Nombres Ordinaux et Cardinaux. Je vais désigner, comme d'habitude, par $\overline{\overline{A}}$ la puissance de l'ensemble A; je pose, en particulier,

$$\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{\underset{\xi}{E}[\xi < \alpha]}} \quad \text{et} \quad \aleph_\alpha = \overline{\overline{\omega_\alpha}} = \overline{\overline{\underset{\xi}{E}[\xi < \omega_\alpha]}}.$$

Je vais représenter toujours les nombres cardinaux infinis sous la forme des alephs $\aleph_\alpha$; cela va nous permettre de donner aux théorèmes fondamentaux de ce travail un aspect extérieur uniforme, sans en diminuer en même temps de la généralité (en raison du théorème connu de M. Zermelo sur le bon ordre).

Or, je donne maintenant les définitions explicites et j'établis certaines propriétés des notions et des signes également généraux, mais moins connus ou introduits comme nouveaux.

Définition 1. a) *$sup(A)$ est le plus petit des nombres ordinaux η remplissant la condition: $\xi < \eta$, lorsque $\xi \in A$;*

b) *$\lim\limits_{\xi<\alpha} \varphi_\xi = sup(\underset{\varphi_\xi}{E}[\xi < \alpha])$ dans le cas où la suite de nombres ordinaux φ du type α est une suite croissante* [1]) *et α est un nombre de 2^{me} espèce différent de 0.*

Définition 2. *$cf(\alpha)$ est le plus petit des nombres ordinaux η remplissant la condition: il existe une suite φ du type ω_η telle que $\omega_\alpha = \lim\limits_{\xi<\omega_\eta} \varphi_\xi$.*

Il est à rappeller à propos de la définition précédente que les nombres initiaux ω_α sont dits *réguliers* ou *singuliers* suivant que $cf(\alpha) = \alpha$ ou $cf(\alpha) < \alpha$.

[1]) c.-à-d. *lorsque $\varphi_\xi < \varphi_\eta$ pour $\xi < \eta$.*

Je vais établir quelques propriétés du symbole $cf(\alpha)$ dans les trois lemmes suivants:

Lemme 1. a) *Pour tout nombre ordinal α on a $cf(\alpha) \leqslant \alpha$;*

b) *si $\alpha = 0$ ou bien si α est un nombre de 1^{re} espèce, on a $cf(\alpha) = \alpha$;*

c) *si $\omega_\alpha = \lim\limits_{\xi<\beta} \varphi_\xi$, on a $\omega_{cf(\alpha)} \leqslant \beta$ et $cf(\alpha) = cf(\beta)$;*

d) *$cf(\omega_\alpha) = cf(\alpha) = cf(cf(\alpha))$.*

Lemme 2. a) *Pour tout nombre α il existe une suite de nombres cardinaux $\mathfrak{f}$ du type $\omega_{cf(\alpha)}$ vérifiant les formules: $\aleph_\alpha = \sum\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathfrak{f}_\xi$ et $0 < \mathfrak{f}_\xi < \aleph_\alpha$ pour $\xi < \omega_{cf(\alpha)}$;*

b) *si $0 < \overline{\overline{A}} \leqslant \aleph_\alpha$, il existe une suite croissante d'ensembles F du type $\omega_{cf(\alpha)}$* [1]) *vérifiant les formules: $A = \sum\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} F_\xi$ et $0 < \overline{\overline{F_\xi}} < \aleph_\alpha$ pour $\xi < \omega_{cf(\alpha)}$.*

Lemme 3. a) *Si $\overline{\overline{B}} < \aleph_{cf(\alpha)}$ et $\mathfrak{f}(x) < \aleph_\alpha$ pour $x \in B$, on a $\sum\limits_{x \in B} \mathfrak{f}(x) < \aleph_\alpha$;*

b) *si $\overline{\overline{B}} < \aleph_{cf(\alpha)}$ et $\overline{\overline{F(x)}} < \aleph_\alpha$ pour $x \in B$, on a $\overline{\overline{\sum\limits_{x \in B} F(x)}} < \aleph_\alpha$;*

c) *si $\overline{\overline{B}} < \aleph_{cf(\alpha)}$ et $B \subset \sum\limits_{\xi<\omega_\alpha} F_\xi$, il existe un nombre η tel que $0 < \eta < \omega_\alpha$ et $B \subset \sum\limits_{\xi<\eta} F_\xi$.*

Démonstration de ces trois lemmes, basée sur la déf. 1, s'obtient facilement par les procédés de raisonnement connus. J'en vais démontrer à titre d'exemple le lem. 3c.

L'hypothèse du lemme entraîne la décomposition suivante de l'ensemble B:

$$B = \sum_{\xi<\omega_\alpha} \Big(B \cdot F_\xi - \sum_{\eta<\xi} B \cdot F_\eta\Big). \tag{1}$$

Considérons les nombres ordinaux ξ, pour lesquels les sommandes

[1]) c.-à-d. *telle que $F_\xi \subset F_\eta$ pour $\xi < \eta < \omega_{cf(\alpha)}$.*

correspondants de la décomposition (1), c.-à-d. les ensembles $B \cdot F_\xi - \sum_{\eta<\xi} B \cdot F_\eta$, ne sont pas vides. En ordonnant ces nombres selon la grandeur, on obtient une suite φ du type β satisfaisant aux conditions:

(2) $$\varphi_\eta < \varphi_\vartheta < \omega_\alpha, \quad \textit{lorsque} \quad \eta < \vartheta < \beta,$$

et

(3) $$B = \sum_{\vartheta<\beta} (A \cdot F_{\varphi_\vartheta} - \sum_{\eta<\vartheta} A \cdot F_{\varphi_\eta}),$$

où $A \cdot F_{\varphi_\vartheta} - \sum_{\eta<\vartheta} A \cdot F_{\varphi_\eta} \neq 0$ *pour* $\vartheta < \beta$.

Si l'on avait $\beta \geqslant \omega_{cf(\alpha)}$, la formule (3) établirait la décomposition de l'ensemble B en sommandes disjoints non-vides et en quantité $\geqslant \aleph_{cf(\alpha)}$; or, l'ensemble B étant par hypothèse de puissance $< \aleph_{cf(\alpha)}$, on démontre sans peine à l'aide de l'axiome du choix qu'une telle décomposition est impossible. Donc

(4) $$\beta < \omega_{cf(\alpha)}.$$

Supposons que

(5) $$\underset{\varphi_\vartheta}{sup}\,(E[\vartheta < \beta]) = \omega_\alpha.$$

On conclut facilement de (2) et (5) que β est un nombre de 2^{me} espèce (puisqu'on aurait dans le cas contraire $\underset{\varphi_\vartheta}{sup}\,(E[\vartheta<\beta]) = \varphi_{\beta-1} < \omega_\alpha$). Si $\beta = 0$, on aurait selon (3) $B = 0$ et la thèse du lemme serait évidemment remplie; nous pouvons donc admettre de plus que $\beta \neq 0$. En conséquence et conformément à (2) et à la déf. 1^b on peut écrire (5) sous la forme $\lim_{\xi<\beta} \varphi_\xi = \omega_\alpha$. En vertu du lem. 1^c il en résulte que $\omega_{cf(\alpha)} \leqslant \beta$, ce qui est en contradiction évidente avec (4). Nous sommes donc contraints de rejeter la supposition (5) et d'admettre que

(6) $$\underset{\varphi_\vartheta}{sup}\,(E[\vartheta < \beta]) \neq \omega_\alpha.$$

Les formules (2) et (16) donnent aussitôt:

(7) $$\underset{\varphi_\vartheta}{sup}\,(E[\vartheta < \beta]) < \omega_\alpha.$$

En posant: $\underset{\varphi_\vartheta}{sup}\,(E[\vartheta < \beta]) + 1 = \eta$, on se convaint facilement que η est le nombre cherché: on a en effet selon (7) $0 < \eta < \omega_\alpha$ et on déduit de (3) que $B \subset \sum_{\xi<\eta} F_\xi$, c. q. f. d.

Définition 3. *$p(\alpha)$ est le plus petit des nombres ordinaux η vérifiant la formule: $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_\eta}$.*

Lemme 4. ^{a}) *$p(\alpha) \leqslant cf(\alpha)$;*

^{b}) *$cf(p(\alpha)) = p(\alpha)$;*

^{c}) *les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\beta < p(\alpha)$, (2) $\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$,

(3) *il existe un nombre cardinal $\mathfrak{a}$ tel que $\aleph_\alpha = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$.*

Démonstration. ^{a}) En appliquant le théorème connu de J. König (généralisé par M. Zermelo), on conclut du lem. 2^a que $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_{cf(\alpha)}}$. De là, conformément à la déf. 3, $p(\alpha) \leqslant cf(\alpha)$, c. q. f. d.

^{b}) Suivant le lem. 2^a (pour le nombre $p(\alpha)$) il existe une suite de nombres cardinaux $\mathfrak{f}$ du type $\omega_{cf(p(\alpha))}$ vérifiant les formules:

(1) $$\aleph_{p(\alpha)} = \sum_{\xi<\omega_{cf(p(\alpha))}} \mathfrak{f}_\xi$$

et

(2) $$0 < \mathfrak{f}_\xi < \aleph_{p(\alpha)} \quad \textit{pour} \quad \xi < \omega_{cf(p(\alpha))}.$$

On conclut de (1) que

(3) $$\aleph_\alpha^{\aleph_{p(\alpha)}} = \prod_{\xi<\omega_{cf(p(\alpha))}} \aleph_\alpha^{\mathfrak{f}_\xi}.$$

Comme on a selon (2) et d'après la déf. 3 $\aleph_\alpha^{\mathfrak{f}_\xi} = \aleph_\alpha$ pour $\xi < \omega_{cf(p(\alpha))}$, on obtient de (3):

(4) $$\aleph_\alpha^{\aleph_{p(\alpha)}} = \aleph_\alpha^{\aleph_{cf(p(\alpha))}}.$$

Il résulte de (4), conformément à la déf. 3, que le nombre $cf(p(\alpha))$ est, d'une façon analogue au nombre $p(\alpha)$, un des nombres η remplissant la condition: $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_\eta}$; mais comme $p(\alpha)$ est le plus petit nombre de ce genre, on a $cf(p(\alpha)) \geqslant p(\alpha)$. L'inégalité inverse, c.-à-d. $cf(p(\alpha)) \leqslant p(\alpha)$, présente un cas particulier du lem. 1[a]. On obtient ainsi finalement la formule cherchée: $cf(p(\alpha)) = p(\alpha)$.

[c]) Les conditions (1) et (2) sont équivalentes en raison de la déf. 3; l'équivalence de (2) et (3) résulte de la formule connue $(\mathfrak{a}^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta^2} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$.

Définition 4. $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} = \sum\limits_{\mathfrak{r} < \mathfrak{b}} \mathfrak{a}^{\mathfrak{r}}$.

Lemme 5. [a]) *Si* $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$ [1]), *on a* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} \leqslant \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{c}}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} + \sum\limits_{\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{r} < \mathfrak{c}} \mathfrak{a}^{\mathfrak{r}}$;

[b]) *si* $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, *on a* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{c}}} \leqslant \mathfrak{b}^{\underset{\smile}{\mathfrak{c}}}$;

[c]) *si* $\mathfrak{b} \geqslant 2$, *on a* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} \geqslant \mathfrak{a}$;

[d]) *si* $\mathfrak{a} \geqslant 2$, *on a* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} \geqslant \mathfrak{b}$.

Démonstration de [a]), [b]) et [c]) est évidente.

[d]) Pour omettre le cas évident de $\mathfrak{b} \leqslant \aleph_0$, posons: $\mathfrak{b} = \aleph_\beta$ où $\beta \neq 0$. D'après la déf. 4 $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geqslant \sum\limits_{\xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi} \geqslant \sum\limits_{\xi < \beta} 2^{\aleph_\xi} \geqslant \sum\limits_{\xi < \beta} \aleph_{\xi+1} = \aleph_\beta$, donc $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} \geqslant \mathfrak{b}$, c. q. f. d.

Lemme 6. [a]) *Si* $\aleph_{p(\alpha)} \geqslant \mathfrak{b} \geqslant 2$, *on a* $\aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} = \aleph_\alpha$;

[b]) *si* $\mathfrak{a} \geqslant 2$, *on a* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$;

[c]) *si* $\mathfrak{a} \geqslant 2$, *on a* $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geqslant \aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}}$.

Démonstration. [a]) Conformément à la déf. 4 $\aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} = \sum\limits_{\mathfrak{r} < \mathfrak{b}} \aleph_\alpha^{\mathfrak{r}} = \sum\limits_{1 \leqslant \mathfrak{r} < \mathfrak{b}} \aleph_\alpha^{\mathfrak{r}}$; comme d'après la déf. 3 $\aleph_\alpha^{\mathfrak{r}} = \aleph_\alpha$ pour $1 \leqslant \mathfrak{r} < \mathfrak{b} \leqslant \aleph_{p(\alpha)}$, on a:

(1) $$\aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} = \aleph_\alpha \cdot \overline{\overline{\underset{\mathfrak{r}}{E}[1 \leqslant \mathfrak{r} < \mathfrak{b}]}}.$$

On sait d'autre part que $1 \leqslant \overline{\overline{\underset{\mathfrak{r}}{E}[1 \leqslant \mathfrak{r} < \mathfrak{b}]}} \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \aleph_{p(\alpha)}$; on a de plus, en vertu des lem. 1[a] et 4[a], $\aleph_{p(\alpha)} \leqslant \aleph_\alpha$, donc

(2) $$1 \leqslant \overline{\overline{\underset{\mathfrak{r}}{E}[1 \leqslant \mathfrak{r} < \mathfrak{b}]}} \leqslant \aleph_\alpha.$$

[1]) Nous employons ici $\mathfrak{c}$ comme une variable (et non pour désigner la puissance du continu).

A l'aide du théorème connu d'Arithmétique des Nombres Cardinaux (suivant lequel $\aleph_\alpha \cdot \mathfrak{a} = \aleph_\alpha$ pour $1 \leqslant \mathfrak{a} \leqslant \aleph_\alpha$), on obtient de (1) et (2): $\aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\mathfrak{b}}} = \aleph_\alpha$, c. q. f. d.

La démonstration de [b]) est analogue.

[c]) Si $\beta = 0$, on a en vertu des lem. 1[b] et 4[a] $cf(\beta) = \beta = p(\beta)$, donc, conformément au lem. 6[a], $\aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}} = \aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{p(\beta)}}} = \aleph_\beta$, d'où en raison du lem. 5[d] $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geqslant \aleph_\beta = \aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}}$.

Si β est de 1[re] espèce, on obtient à l'aide du lem. 6[b]: $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} = \mathfrak{a}^{\aleph_{\beta-1}} \geqslant 2^{\aleph_{\beta-1}} = (2^{\aleph_{\beta-1}})^{\aleph_{\beta-1}} \geqslant \aleph_\beta^{\aleph_{\beta-1}} = \aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$; mais comme $cf(\beta) = \beta$ (lem. 1[b]), on a finalement $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geqslant \aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}}$.

Il reste à examiner le cas où β est un nombre de 2[me] espèce $\neq 0$. Comme on sait [1]), on a dans ce cas

(3) $$\aleph_\beta^{\aleph_\xi} = \sum_{\eta < \beta} \aleph_\eta^{\aleph_\xi} = \sum_{\eta \leqslant \xi} \aleph_\eta^{\aleph_\xi} + \sum_{\xi < \eta < \beta} \aleph_\eta^{\aleph_\xi} \textit{ pour tout } \xi < cf(\beta).$$

Si $\eta \leqslant \xi$, on a notoirement $\aleph_\eta^{\aleph_\xi} = 2^{\aleph_\xi}$, d'où $\sum\limits_{\eta \leqslant \xi} \aleph_\eta^{\aleph_\xi} \leqslant 2^{\aleph_\xi} \cdot \overline{\xi + 1} \leqslant 2^{\aleph_\xi} \cdot \aleph_\xi = 2^{\aleph_\xi}$; si par contre $\xi < \eta$, on obtient: $\aleph_\eta^{\aleph_\xi} \leqslant \aleph_\eta^{\aleph_\eta} = 2^{\aleph_\eta}$. En tenant compte du lem. 1[a], on en déduit d'après (3):

(4) $$\aleph_\beta^{\aleph_\xi} \leqslant 2^{\aleph_\xi} + \sum_{\xi < \eta < \beta} 2^{\aleph_\eta} \leqslant \sum_{\eta < \beta} 2^{\aleph_\eta} \quad \textit{pour} \quad \xi < cf(\beta).$$

D'après la déf. 4: $2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geqslant \sum\limits_{\eta < \beta} 2^{\aleph_\eta}$, d'où, en vertu de (4), $\aleph_\beta^{\aleph_\xi} \leqslant 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$ pour $\xi < cf(\beta)$; d'autre part le lem. 5[d] donne: $\aleph_\beta^{\mathfrak{r}} = \aleph_\beta \leqslant 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$ pour $0 < \mathfrak{r} < \aleph_0$. Par conséquent on a généralement:

(5) $$\aleph_\beta^{\mathfrak{r}} \leqslant 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \quad \textit{pour} \quad \mathfrak{r} < \aleph_{cf(\beta)}.$$

A l'aide de la déf. 4 nous obtenons de (5):

(6) $$\aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}} = \sum_{\mathfrak{r} < \aleph_{cf(\beta)}} \aleph_\beta^{\mathfrak{r}} \leqslant 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \cdot \aleph_{cf(\beta)}.$$

Puisque $\aleph_{cf(\beta)} \leqslant \aleph_\beta \leqslant 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$ (lem. 1[a] et 5[d]), on a $2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \cdot \aleph_{cf(\beta)} = 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$, d'où en raison de (6)

(7) $$\aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}} \leqslant 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}.$$

[1]) Cf. ma note *Quelques théorèmes sur les alephs*, Fund. Math. VII, p. 7.

Comme par hypothèse $\mathfrak{a} \geqslant 2$, on obtient du lem. 5[b]:

$$(8) \qquad \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geqslant 2^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}.$$

Il résulte aussitôt de (7) et (8) que dans le cas considéré on a également la formule cherchée:

$$\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geqslant \aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Le lemme 6 est ainsi entièrement démontré.

Lemme 7. [a]) *Si* $\mathfrak{a} \geqslant 2$ *et* $\gamma < cf(\beta)$, *on a* $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$;
[b]) *si* $\mathfrak{a} \geqslant 2$ *et* $cf(\beta) \leqslant \gamma \leqslant \beta$, *on a* $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$;
[c]) *si* $\mathfrak{a} \geqslant 2$ *et* $\beta \leqslant \gamma$, *on a* $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\aleph_\gamma}$.

Démonstration. [a]) En vertu du lem. 1[a] l'inégalité $\gamma < cf(\beta)$, admise par hypothèse, entraîne $\gamma < \beta$, donc $1 \leqslant \beta$. A l'aide des lem. 5[b] et 6[b] on en conclut que $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_1}} + \sum\limits_{1 \leqslant \xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi} = \mathfrak{a}^{\aleph_0} + \sum\limits_{1 \leqslant \xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi}$, d'où

$$(1) \qquad \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} = \sum_{\xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi}.$$

Étant donnés des nombres ordinaux ξ et η, posons:

$$(2) \qquad \aleph_{(\xi, \eta)} = \aleph_\xi;$$

on obtient de (1) et (2):

$$(3) \qquad (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \Big(\sum_{\xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi}\Big)^{\aleph_\gamma} = \prod_{\eta < \omega_\gamma} \sum_{\xi < \beta} \mathfrak{a}^{\aleph_{(\xi, \eta)}}.$$

Soit

(4) Φ *la classe de toutes les suites de nombres ordinaux* φ *du type* ω_γ *remplissant la condition:* $\varphi_\eta < \beta$ *pour* $\eta < \omega_\gamma$.

En appliquant la loi distributive générale (d'addition et de multiplication des nombres cardinaux), on déduit de (3) et (4) que

$$(5) \qquad (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \sum_{\varphi \in \Phi} \prod_{\eta < \omega_\gamma} \mathfrak{a}^{\aleph_{(\varphi_\eta, \eta)}}.$$

En tenant compte de (2), nous concluons de (5) que

$$(6) \qquad (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \sum_{\varphi \in \Phi} \prod_{\eta < \omega_\gamma} \mathfrak{a}^{\aleph_{\varphi_\eta}} = \sum_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{a}^{\sum\limits_{\eta < \omega_\gamma} \aleph_{\varphi_\eta}}$$

On a par hypothèse $\overline{\overline{\underset{\eta}{E}[\eta < \omega_\gamma]}} = \aleph_\gamma < \aleph_{cf(\beta)}$; selon (4) $\aleph_{\varphi_\eta} < \aleph_\beta$, lorsque $\eta < \omega_\gamma$ et $\varphi \in \Phi$. En posant donc dans le lem. 3[a]: $\alpha = \beta$, $B = \underset{\eta}{E}[\eta < \omega_\gamma]$ et $\mathfrak{f}(\eta) = \aleph_{\varphi_\eta}$, on parvient à la conclusion que $\sum\limits_{\eta < \omega_\gamma} \aleph_{\varphi_\eta} < \aleph_\beta$, d'où en vertu de (1)

$$(7) \qquad \mathfrak{a}^{\sum\limits_{\eta < \omega_\gamma} \aleph_{\varphi_\eta}} \leqslant \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \quad pour \quad \varphi \in \Phi.$$

Il est à remarquer de plus que d'après la définition connue de l'exponentiation des nombres cardinaux et en raison de (4) la classe Φ est de puissance $\overline{(\beta)}^{\aleph_\gamma} \leqslant \aleph_\beta^{\aleph_\gamma}$; comme en outre $\aleph_\gamma < \aleph_{cf(\beta)}$, on obtient conformément à la déf. 4:

$$(8) \qquad \overline{\overline{\Phi}} \leqslant \aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}}.$$

Les formules (6)—(8) impliquent que

$$(9) \qquad (\aleph^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} \leqslant \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \cdot \aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}}.$$

Il résulte du lem. 6[c] que $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \geqslant \aleph_\beta^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)}}}$; par conséquent (9) donne: $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} \leqslant \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$. Comme l'inégalité inverse est évidente, on a finalement:

$$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

[b]) Conformément au lem. 2[a] il existe une suite de nombres cardinaux $\mathfrak{f}$ du type $\omega_{cf(\beta)}$ vérifiant les formules:

$$(10) \qquad \aleph_\beta = \sum_{\xi < \omega_{cf(\beta)}} \mathfrak{f}_\xi \quad et \quad 0 < \mathfrak{f}_\xi < \aleph_\beta \quad pour \quad \xi < \omega_{cf(\beta)}.$$

On obtient facilement de (10):

$$(11) \qquad \mathfrak{a}^{\aleph_\beta} = \prod_{\xi < \omega_{cf(\beta)}} \mathfrak{a}^{\mathfrak{f}_\xi}$$

et, en vertu de la déf. 4,

$$(12) \qquad \mathfrak{a}^{\mathfrak{f}_\xi} \leqslant \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \quad pour \quad \xi < \omega_{cf(\beta)}.$$

Comme de plus, suivant l'hypothèse du lemme, $\overline{\overline{\underset{\xi}{E}[\xi < \omega_{cf(\beta)}]}} = \aleph_{cf(\beta)} \leqslant \aleph_\gamma$, les formules (11) et (12) donnent aussitôt:

$$(13) \qquad \mathfrak{a}^{\aleph_\beta} \leqslant (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma}.$$

D'autre part, il résulte des lem. 5[a] et 6[b] que $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \leqslant \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$, d'où $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} \leqslant (\mathfrak{a}^{\aleph_\beta})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\gamma}$; comme on a en outre par hypothèse $\aleph_\gamma \leqslant \aleph_\beta$, on conclut que

(14) $$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} \leqslant \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}.$$

Les inégalités (13) et (14) entraînent immédiatement la formule cherchée: $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$.

c) En posant dans l'identité b) établie tout-à-l'heure $\gamma = \beta$ et en tenant compte du lem. 1a, on conclut que $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\beta} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$, d'où, pour tout γ, $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta \cdot \aleph_\gamma}$. Donc, si $\beta \leqslant \gamma$, nous en obtenons sur place:

$$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma} = \mathfrak{a}^{\aleph_\gamma}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Lemme 8. a) *Si* $\mathfrak{a} \geqslant 2$ *et* $\gamma \leqslant cf(\beta)$, *on a* $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$.

b) *si* $\mathfrak{a} \geqslant 2$ *et* $cf(\beta) < \gamma \leqslant \beta + 1$, *on a* $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$;

c) *si* $\mathfrak{a} \geqslant 2$ *et* $\beta < \gamma$, *on a* $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\gamma}$.

Démonstration a) Conformément au lem. 7a on a $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\mathfrak{x}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$ pour $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{x} < \aleph_\gamma \leqslant \aleph_{cf(\beta)}$; comme en outre, en vertu du lem. 5d, $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$ est un nombre transfini, cete égalité subsiste aussi dans le cas où $0 < \mathfrak{x} < \aleph_0$. Par conséquent, on obtient à l'aide de la déf. 4:

(1) $$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \sum_{\mathfrak{x} < \aleph_\gamma} (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\mathfrak{x}} = \sum_{0 < \mathfrak{x} < \aleph_\gamma} (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\mathfrak{x}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \cdot \overline{\overline{\underset{\mathfrak{x}}{E}[0 < \mathfrak{x} < \aleph_\gamma]}}.$$

On sait d'autre part que $1 \leqslant \overline{\overline{\underset{\mathfrak{x}}{E}[0 < \mathfrak{x} < \aleph_\gamma]}} \leqslant \aleph_\gamma$; comme on a de plus par hypothèse $\aleph_\gamma \leqslant \aleph_{cf(\beta)}$ et, en raison des lem. 1a et 5d, $\aleph_{cf(\beta)} \leqslant \aleph_\beta \leqslant \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$, on conclut que

(2) $$1 \leqslant \overline{\overline{\underset{\mathfrak{x}}{E}[0 < \mathfrak{x} < \aleph_\gamma]}} \leqslant \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}.$$

Les formules (1) et (2) donnent aussitôt: $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \aleph^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$, c. q. f. d.

b) En posant dans le lem. 7b: $\gamma = cf(\beta)$ et puis $\gamma = \beta$, on obtient:

(3) $$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_{cf(\beta)}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta} = (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\beta}.$$

En tenant compte de la formule: $cf(\beta) < \gamma \leqslant \beta + 1$, admise par hypothèse, on conclut facilement des lem. 5a et 6b:

(4) $$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_{cf(\beta)}} = (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_{cf(\beta)+1}}} \leqslant (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} \leqslant (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}} = (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\beta}.$$

De plus le lem. 6b donne:

(5) $$\mathfrak{a}^{\aleph_\beta} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}}.$$

Les formules (3)—(5) impliquent immédiatement l'identité cherchée: $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta}$.

c) On a par hypothèse $\aleph_{\beta+1} \leqslant \aleph_\gamma$; en vertu des lem. 5a et 6b on en obtient: $\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_{\beta+1}}} + \sum_{\beta+1 \leqslant \xi < \gamma} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi} = \mathfrak{a}^{\aleph_\beta} + \sum_{\beta < \xi < \gamma} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi}$, d'où

(6) $$\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \sum_{\beta \leqslant \xi < \gamma} \mathfrak{a}^{\aleph_\xi}.$$

D'une façon analogue on parvient à la formule:

(7) $$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \sum_{\beta \leqslant \xi < \gamma} (\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\xi}.$$

Le lem. 7c implique en outre que

(8) $$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\xi} = \mathfrak{a}^{\aleph_\xi} \quad \textit{pour} \quad \beta \leqslant \xi$$

De (6)—(8) on déduit tout de suite la formule:

$$(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}} = \mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Dans deux derniers lemmes nous avons établis certaines simplifications des expressions $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\aleph_\gamma}$ et $(\mathfrak{a}^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}}$ pour diverses valeurs de β et γ. En ce qui concerne l'expression $(\mathfrak{a}^{\aleph_\beta})^{\underset{\smile}{\aleph_\gamma}}$, le problème analogue ne comporte plus de difficulté, déjà en raison du lem. 6b; nous laissons au lecteur de formuler le théorème correspondant.

Dans une partie de cet ouvrage l'hypothèse suivante H jouera un rôle essentiel; cette hypothèse, dite *hypothèse de Cantor sur les alephs* ou *hypothèse du continu généralisée*, n'est jusqu'à présent, comme on sait, ni démontrée, ni refutée.

Hypothèse H. *Pour tout nombre ordinal* α *on a* $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Parmi des nombreuses conséquences de cette hypothèse, connues jusqu'à présent, il n'y a que deux qui sont d'importance pour nos considérations; or, comme nous allons voir, les deux conséquences sont équivalentes à l'hypothèse même.

Lemme 9. *L'hypothèse H équivaut à chacune des propositions suivantes:*

[a]) *quel que soit le nombre ordinal* α, *on a* $2^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}} = \aleph_\alpha$;

[b]) *quel que soit le nombre ordinal* α, *on a* $p(\alpha) = cf(\alpha)$.

Démonstration. I. Admettons que l'hypothèse H est vraie. En vertu du lem. 5[a] (pour $\mathfrak{a} = 2$, $\mathfrak{b} = \aleph_0$ et $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$) on a $2^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}} = 2^{\underset{\smile}{\aleph_0}} + \sum_{\xi<\alpha} 2^{\aleph_\xi}$, d'où, conformément à la déf. 4 et à l'hypothèse H, $2^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}} = \aleph_0 + \sum_{\xi<\alpha} \aleph_{\xi+1} = \aleph_\alpha$. Donc

(1) *l'hypothèse H entraîne la condition* [a])

II. Posons maintenant par l'hypothèse la proposition [a]).

En raison du lem. 7[a] (pour $\mathfrak{a} = 2$) on a pour tout $\xi < cf(\alpha)$ $(2^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}})^{\aleph_\xi} = 2^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}}$, d'où, conformément à la proposition [a]) $\aleph_\alpha^{\aleph_\xi} = \aleph_\alpha$; à l'aide du lem. 4[c] on obtient de cette égalité: $\xi < p(\alpha)$. Nous avons ainsi montré que la formule: $\xi < cf(\alpha)$ implique toujours: $\xi < p(\alpha)$ et nous en concluons aussitôt que $cf(\alpha) \leqslant p(\alpha)$. L'inégalité inverse: $p(\alpha) \leqslant cf(\alpha)$ a été établie dans le lem. 4[a]; on a donc $p(\alpha) = cf(\alpha)$ pour tout nombre α.

Ce raisonnement prouve que

(2) *la condition* [a]) *entraîne la condition* [b]).

III. Admettons enfin que la proposition [b]) est remplie.

Conformément au lem. 1[b], $cf(\alpha+1) = \alpha+1$, d'où suivant la condition [b]) $p(\alpha+1) = \alpha+1$. Il en résulte que $\alpha < p(\alpha+1)$, ce qui donne en vertu du lem. 4[c]: $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha}$. On a d'autre part $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$ (puisque $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} \leqslant (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$) et on en obtient: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, quel que soit le nombre α.

Nous avons ainsi prouvé que

(3) *la condition* [b]) *entraîne l'hypothèse H.*

En raison de (1)—(3) le lem. 9 est entièrement démontré.

L'énoncé de la proposition 9[b] ne diffère que par sa forme extérieure d'une autre conséquence de l'hypothèse de Cantor:

$$si\ \beta < cf(\alpha), \quad on\ a \quad \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha,$$

que j'ai signalée dans mes Notes antérieures avec une démonstration un peu différente [1]). Toutefois la forme actuelle de l'hypothèse 9[b] m'a été obligeamment communiquée par M. Zermelo en 1928.

Définition 5. [a]) $U(A) = \underset{X}{E}[X \subset A]$;

[b]) $U_\alpha(A) = \underset{X}{E}[X \subset A \ \textit{et}\ \overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha]$;

[c]) $V(A) = \underset{X}{E}[A \subset X]$.

Lemme 10. [a]) $\overline{\overline{U(A)}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$;

[b]) *si* $\overline{\overline{A}} \geqslant \aleph_\alpha$, *on a* $\overline{\overline{U_\alpha(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}}$ *et* $\overline{\overline{U_{\alpha+1}(A)}} = \overline{\overline{U_{\alpha+1}(A) - U_\alpha(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\aleph_\alpha}$;

[c]) $\overline{\overline{U_\alpha(A)}} \leqslant (\overline{\overline{A}})^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}}$;

[d]) *si* $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ *et* $\beta \leqslant p(\alpha)$, *on a* $\overline{\overline{U_\beta(A)}} = \aleph_\alpha$.

Démonstration. [a]) constitue l'énoncé du théorème connu de Cantor.

[b]) est basé sur un théorème connu, d'après lequel

(1) *A étant un ensemble infini, si* $\overline{\overline{A}} \geqslant \mathfrak{b}$, *on a* $\overline{\overline{\underset{X}{E}[X \subset A \ \textit{et}\ \overline{\overline{X}} = \mathfrak{b}]}} = (\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{b}}$ [2]).

Voici l'esquisse de la démonstration du théorème mentionné. Posons:

$$\overline{\overline{\underset{X}{E}[X \subset A \ \textit{et}\ \overline{\overline{X}} = \mathfrak{b}]}} = \mathfrak{c}.$$

La définition de l'exponentiation des nombres cardinaux implique sans difficulté que tout ensemble de puissance $(\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{b}}$ se laisse décomposer en $\mathfrak{c}$ ensembles disjoints; à l'aide de l'axiome du choix on en obtient: $\mathfrak{c} \leqslant (\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{b}}$. D'autre part, en dehors du cas trivial où $\mathfrak{b} = 0$, l'inégalité $\overline{\overline{A}} \geqslant \mathfrak{b}$ donne notoirement: $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}} \cdot \mathfrak{b}$; en appliquant la définition de la multiplication des nombres cardinaux, on conclut facilement que tout ensemble de puissance $\overline{\overline{A}} \cdot \mathfrak{b}$, donc, en particulier, l'ensemble A, admet tout au moins $(\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{b}}$ sous-ensembles de puissance $\mathfrak{b}$, d'où $\mathfrak{c} \geqslant (\overline{\overline{A}} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{b}} = (\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{b}}$. Si l'on rap-

[1]) Cf. ma Note citée des Fund. Math. VII, p. 9—10, ainsi que mon article: *Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints*, Fund. Math. XII, p. 202.

[2]) Cf. W. Sierpiński, *Zarys teorji mnogości* (*Éléments de la Théorie des Ensembles*, en polonais), 1[re] partie, 3[me] éd., Warszawa 1928, p. 251—253.

proche les deux inégalités établies ci-dessus, on obtient aussitôt:

$$\overline{\overline{\underset{X}{E}[X \subset A \text{ et } \overline{\overline{X}} = \mathfrak{b}]}} = \mathfrak{c} = (\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{b}}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Or, il résulte de la déf. 5^b que $U_\alpha(A) = \underset{X}{E}[X\subset A \text{ et } \overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha] = \sum_{\mathfrak{x}<\aleph_\alpha}(\underset{X}{E}[X\subset A \text{ et } \overline{\overline{X}}=\mathfrak{x}])$; les sommandes de cette dernière somme étant disjoints, on en conclut que

(2) $$\overline{\overline{U_\alpha(A)}} = \sum_{\mathfrak{x}<\aleph_\alpha} \overline{\overline{\underset{X}{E}[X\subset A \text{ et } \overline{\overline{X}}=\mathfrak{x}]}}.$$

Comme par hypothèse: $\overline{\overline{A}} \geqslant \aleph_\alpha$, les conditions (1) et (2) donnent: $\overline{\overline{U_\alpha(A)}} = \sum_{\mathfrak{x}<\aleph_\alpha}(\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{x}}$, d'où conformément à la déf. 4:

(3) $$\overline{\overline{U_\alpha(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}}.$$

D'une façon analogue on obtient l'égalité: $\overline{\overline{U_{\alpha+1}(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\underset{\smile}{\aleph_{\alpha+1}}}$ et on en déduit par l'application du lem. 6^b:

(4) $$\overline{\overline{U_{\alpha+1}(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\aleph_\alpha}.$$

On conclut enfin sans peine de la déf. 5^b que $U_{\alpha+1}(A) - U_\alpha(A) = \underset{X}{E}[X\subset A \text{ et } \overline{\overline{X}} = \aleph_\alpha]$, d'où en raison de (1):

(5) $$\overline{\overline{U_{\alpha+1}(A)-U_\alpha(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\aleph_\alpha}.$$

En vertu de (3)—(5) toutes les formules ^b) se trouvent établies.

^c) Dans le cas où $A \geqslant \aleph_\alpha$ la formule: $\overline{\overline{U_\alpha(A)}} \leqslant (\overline{\overline{A}})^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}}$ résulte immédiatement de ^b). Si par contre $\overline{\overline{A}} < \aleph_\alpha$, on a suivant la déf. 5^{a,b} et le lem. 10^a (en omettant le cas évident où $\overline{\overline{A}} < 2$): $\overline{\overline{U_\alpha(A)}} \leqslant \overline{\overline{U(A)}} = 2^{\overline{\overline{A}}} \leqslant (\overline{\overline{A}})^{\overline{\overline{A}}} \leqslant \sum_{\mathfrak{x}<\aleph_\alpha} (\overline{\overline{A}})^{\mathfrak{x}}$, d'où conformément à la déf. 4 $\overline{\overline{U_\alpha(A)}} \leqslant (\overline{\overline{A}})^{\underset{\smile}{\aleph_\alpha}}$, c. q. f. d.

^d) En vertu des lem. 1^a et 4^a l'inégalité: $\beta \leqslant p(\alpha)$ entraîne: $\aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha = \overline{\overline{A}}$; en posant donc dans ^b): $\alpha=\beta$, on conclut que $\overline{\overline{U_\beta(A)}} = (\overline{\overline{A}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} = \aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$. Par l'application du lem. 6^a on en obtient la formule cherchée:

$$\overline{\overline{U_\beta(A)}} = \aleph_\alpha$$

Définition 6. $\overline{f}(A) = \underset{f(x)}{E}[x \in A]$ (*dans l'hypothèse que la fonction f est définie pour tous les éléments de l'ensemble A*).

L'ensemble $\overline{f}(A)$ est appelé ordinairement *image de l'ensemble A donnée par la fonction f*. Divers théorèmes élémentaires sur les images d'ensembles ont été publiés antérieurement [1]); je vais établir ici quelques rapports moins connus entre les puissances des ensembles et celles de leurs images.

Lemme 11. ^a) $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} \leqslant \overline{\overline{A}}$;

^b) *si* $\overline{\overline{A\cdot \underset{x}{E}[f(x)=y]}} \leqslant \mathfrak{b}$ *pour tout élément y de* $\overline{f}(A)$, *on a* $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\overline{f}(A)}}\cdot\mathfrak{b}$;

^c) *si* $\overline{\overline{A}} \geqslant \aleph_0$ *et si* $\overline{\overline{A\cdot\underset{x}{E}[f(x)=y]}} \leqslant \mathfrak{b} < \overline{\overline{A}}$ *pour tout élément y de* $\overline{f}(A)$, *on a* $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} = \overline{\overline{A}}$;

^d) *si* $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ *et si* $\overline{\overline{A\cdot\underset{x}{E}[f(x)=y]}} < \overline{\overline{A}}$ *pour tout élément y de* $\overline{f}(A)$, *on a* $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} \geqslant \aleph_{cf(\alpha)}$; *si en outre* $cf(\alpha)=\alpha$, *on a* $\overline{\overline{\overline{f}(A)}} = \aleph_\alpha = \overline{\overline{A}}$.

Démonstration. Posons pour tout élément y

(1) $$G(y) = A\cdot\underset{x}{E}[f(x)=y].$$

A l'aide de la déf. 6 on déduit facilement de (1) les propriétés suivantes de la fonction G:

(2) $$G(y) \neq 0 \quad \text{pour} \quad y \in \overline{f}(A);$$

(3) $$\text{si } G(y)\cdot G(z) \neq 0, \text{ on a } y=z \text{ et } G(y)=G(z).$$

En vertu de (2) et de (3) la fonction G transforme d'une façon biunivoque l'ensemble $\overline{f}(A)$ dans la classe $\overline{G}(\overline{f}(A)) = \underset{G(y)}{E}[y\in\overline{f}(A)]$; ces ensembles sont donc de puissance égale:

(4) $$\overline{\overline{\overline{f}(A)}} = \overline{\overline{\overline{G}(\overline{f}(A))}}.$$

En raison de (1) et de la déf. 6 on obtient facilement la décomposition suivante de A:

[1]) Cf. p. ex. A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia Mathematica*, vol. I, 2^de Ed., Cambridge 1925, *37. *40 et *72.

$$(5) \qquad A = \sum_{y \in \bar f(A)} G(y);$$

comme selon (2) et (3) les sommandes de cette décomposition sont disjoints et non-vides, on en conclut à l'aide de l'axiome du choix que $\overline{\overline{G(\bar f(A))}} = \overline{\overline{\underset{G(y)}{E}[y \in \bar f(A)]}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, d'où en vertu de (4)

$$(6) \qquad \overline{\overline{\bar f(A)}} \leqslant \overline{\overline{A}}.$$

La formule (5) donne de plus (conformément à un théorème connu de la théorie de l'égalité des puissances):

$$(7) \qquad \textit{si } \overline{\overline{G(y)}} \leqslant \mathfrak{b} \textit{ pour } y \in \bar f(A), \textit{ on a } \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\bar f(A)}} \cdot \mathfrak{b}.$$

Admettons maintenant que $\overline{\overline{A}} \geqslant \aleph_0$ et que $\overline{\overline{G(y)}} \leqslant \mathfrak{b} < \overline{\overline{A}}$ pour $y \in \bar f(A)$. Si l'on avait $\overline{\overline{\bar f(A)}} < \overline{\overline{A}}$, on obtiendrait à l'aide des théorèmes connus de l'Arithmétique des Nombres Cardinaux: $\overline{\overline{\bar f(A)}} \cdot \mathfrak{b} < \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$, ce qui contredit manifestement la condition (7); par conséquent, en vertu de (6), $\overline{\overline{\bar f(A)}} = \overline{\overline{A}}$. On a donc:

$$(8) \qquad \textit{si } \overline{\overline{A}} \geqslant \aleph_0 \textit{ et } \overline{\overline{G(y)}} \leqslant \mathfrak{b} < A \textit{ pour } y \in \bar f(A), \textit{ on a } \overline{\overline{\bar f(A)}} = \overline{\overline{A}}.$$

Posons enfin par l'hypothèse: $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ et $\overline{\overline{G(y)}} < \overline{\overline{A}}$ pour $y \in \bar f(A)$. En remplaçant B par $\bar f(A)$ et F par G dans le lem. 3[b] et en tenant compte de (5), on en déduit facilement que l'inégalité $\overline{\overline{\bar f(A)}} < \aleph_{cf(\alpha)}$ implique contradiction. On a donc $\overline{\overline{\bar f(A)}} \geqslant \aleph_{cf(\alpha)}$; si en outre $cf(\alpha) = \alpha$, on obtient suivant (6): $\overline{\overline{\bar f(A)}} = \aleph_\alpha = \overline{\overline{A}}$. Nous avons ainsi prouvé que

(9) *si* $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ *et* $\overline{\overline{G(y)}} < \overline{\overline{A}}$ *pour* $y \in \bar f(A)$, *on a* $\overline{\overline{\bar f(A)}} \geqslant \aleph_{cf(\alpha)}$; *si de plus* $cf(\alpha) = \alpha$, *on a* $\overline{\overline{\bar f(A)}} = \aleph_\alpha = \overline{\overline{A}}$.

En rapprochant les conditions (6)—(9) de la formule (1), on constate que le lemme en question est entièrement démontré.

Pour terminer ce §, je vais étendre la notion de *limite inférieure* et *supérieure* ainsi que celle de *limite proprement dite* des suites infinies d'ensembles du type ω sur les *suites d'ensembles du type arbitraire.*

Définition 7. [a]) $\underline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi = \sum_{\xi<\alpha} \prod_{\xi\leqslant\eta<\alpha} F_\eta$;

[b]) $\overline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi = \prod_{\xi<\alpha} \sum_{\xi\leqslant\eta<\alpha} F_\eta$;

[c]) *la suite d'ensembles* F *du type* α *est* c o n v e r g e n t e *et on a* $\lim_{\xi<\alpha} F_\xi = A$, *lorsque* $\underline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi = \overline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi = A$.

Plusieurs propriétés élémentaires des notions définies tout à l'heure s'obtiennent par voie de généralisation facile des théorèmes connus concernant les limites des suites infinies du type ω [1]). Je vais donc me borner à établir quelques formules qui, autant que je sache, n'ont été jusqu'à présent signalées nullepart, même pour les suites infinies ordinaires.

Lemme 12. [a]) $\underline{\lim}_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi) \subset \underline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi \cdot \overline{\lim}_{\xi<\alpha} G_\xi \subset \overline{\lim}_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi)$;

[b]) *si les suites d'ensembles* G_ξ *et* $F_\xi \cdot G_\xi$ *du type* α *sont convergentes, la suite d'ensembles* $F_\xi \cdot \lim_{\xi<\alpha} G_\xi$ *est aussi convergente et on a* $\lim_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot \lim_{\xi<\alpha} G_\xi) = \lim_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi)$.

D é m o n s t r a t i o n. Il résulte de la déf. 7[a,b] que $\underline{\lim}_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi) \subset \underline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi$ et $\underline{\lim}_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi) \subset \underline{\lim}_{\xi<\alpha} G_\xi \subset \overline{\lim}_{\xi<\alpha} G_\xi$ [2]), d'où

$$(1) \qquad \underline{\lim}_{\xi<\alpha}(F_\xi \cdot G_\xi) \subset \underline{\lim}_{\xi<\alpha} F_\xi \cdot \overline{\lim}_{\xi<\alpha} G_\xi.$$

D'autre part, comme on voit facilement, ξ et ξ_1 étant deux nombres ordinaux tels que $\xi \leqslant \xi_1 < \alpha$, on a $\prod_{\xi\leqslant\eta<\alpha} F_\eta \cdot \sum_{\xi_1\leqslant\eta<\alpha} G_\eta \subset \sum_{\xi_1\leqslant\eta<\alpha}(F_\eta \cdot G_\eta)$, d'où à plus forte raison

$$\prod_{\xi\leqslant\eta<\alpha} F_\eta \cdot \overline{\lim_{\eta<\alpha}}\, G_\eta = \prod_{\xi\leqslant\eta<\alpha} F_\eta \cdot \prod_{\xi_1<\alpha} \sum_{\xi_1\leqslant\eta<\alpha} G_\eta \subset \sum_{\xi_1\leqslant\eta<\alpha}(F_\eta \cdot G_\eta).$$

Par conséquent pour tout nombre $\zeta < \alpha$ (non nécessairement $\geqslant \xi$)

[1]) Cf. p. ex. W. Sierpiński, op. cit., p. 16—18.

[2]) Ce sont des généralisations des formules connues concernant des suites infinies ordinaires (cf. la note précédente).

on a l'inclusion: $\prod\limits_{\xi\leq\eta<\alpha} F_\eta \cdot \overline{\lim_{\eta<\alpha}}\, G_\eta \subset \sum\limits_{\zeta\leq\eta<\alpha} (F_\eta\cdot G_\eta)$; on en obtient ensuite: $\sum\limits_{\xi<\alpha}\prod\limits_{\xi\leq\eta<\alpha} F_\eta\cdot\overline{\lim_{\eta<\alpha}}\, G_\eta \subset \prod\limits_{\zeta<\alpha}\sum\limits_{\zeta\leq\eta<\alpha}(F_\eta\cdot G_\eta)$, ce qui se laisse énoncer plus court à l'aide de la formule:

$$\underline{\lim_{\xi<\alpha}}\, F_\xi\cdot\overline{\lim_{\xi<\alpha}}\, G_\xi \subset \overline{\lim_{\xi<\alpha}}\,(F_\xi\cdot G_\xi). \tag{2}$$

Les inclusions (1) et (2) donnent aussitôt la formule cherchée [a]), c.-à-d.:

$$\underline{\lim_{\xi<\alpha}}\,(F_\xi\cdot G_\xi)\subset\underline{\lim_{\xi<\alpha}}\, F_\xi\cdot\overline{\lim_{\xi<\alpha}}\, G_\xi\subset\overline{\lim_{\xi<\alpha}}\,(F_\xi\cdot G_\xi). \tag{3}$$

A cause de la symétrie de la formule (3) par rapport aux deux suites F et G on a aussi:

$$\underline{\lim_{\xi<\alpha}}\,(F_\xi\cdot G_\xi)\subset\overline{\lim_{\xi<\alpha}}\, F_\xi\cdot\underline{\lim_{\xi<\alpha}}\, G_\xi\subset\overline{\lim_{\xi<\alpha}}\,(F_\xi\cdot G_\xi). \tag{4}$$

Admettons à présent que les suites d'ensembles G_ξ et $F_\xi\cdot G_\xi$ sont convergentes; conformément à la déf. 7[c] les formules (3) et (4) donnent alors:

$$\underline{\lim_{\xi<\alpha}}\, F_\xi\cdot\lim_{\xi<\alpha} G_\xi=\overline{\lim_{\xi<\alpha}}\, F_\xi\cdot\lim_{\xi<\alpha} G_\xi=\lim_{\xi<\alpha}(F_\xi\cdot G_\xi). \tag{5}$$

Il est cependant facile de déduire de la déf. 7[a, b] que pour tout ensemble A on a $\underline{\lim_{\xi<\alpha}}\,(F_\xi\cdot A)=\underline{\lim_{\xi<\alpha}}\, F_\xi\cdot A$ et $\overline{\lim_{\xi<\alpha}}\,(F_\xi\cdot A)=\overline{\lim_{\xi<\alpha}}\, F_\xi\cdot A$ [1]). Cette remarque permet d'écrire (5) sous la forme:

$$\underline{\lim_{\xi<\alpha}}\,(F_\xi\cdot\lim_{\xi<\alpha} G_\xi)=\overline{\lim_{\xi<\alpha}}\,(F_\xi\cdot\lim_{\xi<\alpha} G_\xi)=\lim_{\xi<\alpha}(F_\xi\cdot G_\xi). \tag{6}$$

En raison de la déf. 7[c], (6) exprime que *la suite d'ensembles* $F_\xi\cdot\lim\limits_{\xi<\alpha} G_\xi$ *est convergente* et qu'on a $\lim\limits_{\xi<\alpha}(F_\xi\cdot\lim\limits_{\xi<\alpha} G_\xi)=\lim\limits_{\xi<\alpha}(F_\xi\cdot G_\xi)$; la condition [b]) du lemme considéré se trouve ainsi établie.

Le lem. 12[b] (pour $\alpha=\omega$) m'a été obligeamment communiqué par M. Saks comme généralisation d'un lemme plus faible, trouvé par moi auparavant tout spécialement pour en faire usage dans les considérations présentes, alors que lem. 12[a] m'a été encore inconnu.

[1]) Cf. p. 199, note [1]).

Comme il est aisé de vérifier, le signe de multiplication peut être remplacé partout dans le lem. 12 par le signe d'addition.

Dans la suite j'aurai à opérer à plusieurs reprises à l'aide des notions introduites dans ce § sans en indiquer même les définitions; je vais appliquer les notions introduites dans les déf. 5 et 6 aux ensembles de tout genre (donc non seulement aux ensembles d'individus, mais aussi aux classes d'ensembles, aux familles de classes etc.).

§ 2. Algorythme des opérations sur les classes d'ensembles.

Comme il a été dit dans l'introduction, nous aurons affaire dans ce travail aux certaines opérations (fonctions) $\boldsymbol{F}$ qui font correspondre à une classe quelconque d'ensembles $\boldsymbol{K}$ une autre classe $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})$. L'usage de ces opérations est considérablement facilité par un algorythme, dont je me propose d'esquisser ici les traits généraux.

Je vais introduire en premier lieu deux relations entre opérations: celle d'*identité* et celle d'*inclusion*, en les désignant respectivement par les symboles $\overset{\circ}{=}$ et $\overset{\circ}{\subset}$.

Définition 8. [a]) $\boldsymbol{F}\overset{\circ}{=}\boldsymbol{G}$, *lorsqu'on a* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})$ *pour toute classe d'ensembles* $\boldsymbol{X}$;

[b]) $\boldsymbol{F}\overset{\circ}{\subset}\boldsymbol{G}$, *lorsqu'on a* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})\subset\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})$ *pour toute classe d'ensembles* $\boldsymbol{X}$.

Parmi les opérations sur opérations, celle d'*addition* sera mise au premier plan; le résultat de cette addition sera désigné ici par $\boldsymbol{F}\overset{\circ}{+}\boldsymbol{G}$, resp. par $\overset{\circ}{\sum\limits_{x\in A}}\boldsymbol{F}_x$.

Définition 9. [a]) $[\boldsymbol{F}\overset{\circ}{+}\boldsymbol{G}](\boldsymbol{K})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{K})$;

[b]) $\Big[\overset{\circ}{\sum\limits_{x\in A}}\boldsymbol{F}_x\Big](\boldsymbol{K})=\sum\limits_{x\in A}\boldsymbol{F}_x(\boldsymbol{K})$;

A l'usage pratique je vais supprimer parfois les parenthèses [ ] dans les expressions données par la déf. 9[a, b]; les autres définitions analogues seront formulées d'emblée sans ces parenthèses.

Au lieu d'établir ici une à une les lois qui concernent les notions définies tout à l'heure, je donne le lemme général suivant, dont la démonstration facile est sans doute à la portée du lecteur:

Lemme 13. *Les relations* $\overset{\circ}{=}$, $\overset{\circ}{\subset}$ *et les opérations* $\overset{\circ}{+}$, $\overset{\circ}{\sum}$ *remplissent tous les postulats de l'Algèbre de la Logique* [1]).

Je définis à son tour la *multiplication relative* des opérations, en en désignant le résultat par FG, resp. par $\overset{\circ}{\prod\limits_{1\leqslant\xi\leqslant\nu}} F_\xi$; le produit $\overset{\circ}{\prod\limits_{1\leqslant\xi\leqslant\nu}} F_\xi$ dont tous les facteurs sont identiques à une opération donnée F sera appelé, comme d'habitude, ν^{me} *itération* (*puissance*) *de l'opération* F et désigné par F^ν.

Définition 10. [a]) $FG(K) = F(G(K))$;

[b]) $\overset{\circ}{\prod\limits_{1\leqslant\xi\leqslant\nu}} F_\xi(K) = F_1(K)$ *pour* $\nu = 1$; $\overset{\circ}{\prod\limits_{1\leqslant\xi\leqslant\nu}} F_\xi(K) =$

$= \overset{\circ}{\prod\limits_{1\leqslant\xi\leqslant\nu-1}} F_\xi(F_\nu(K))$ *pour tout* ν *tel que* $1 < \nu < \omega$;

[c]) $F^\nu(K) = \overset{\circ}{\prod\limits_{1\leqslant\xi\leqslant\nu}} F_\xi\,(K)$ *dans le cas où* $1 \leqslant \nu < \omega$ *et* $F_\xi \overset{\circ}{=} F$ *pour tout* ξ, $1 \leqslant \xi \leqslant \nu$.

Nous aurons bien souvent affaire au produit relatif habituel FG; c'est pourquoi je vais formuler ici explicitement quelques propriétés élémentaires de cette notion.

Par contre, la notion du produit relatif général, $\overset{\circ}{\prod\limits_{1\leqslant\xi\leqslant\nu}} F_\xi$, et en particulier celle de la ν^{me} itération d'une opération F, c.-à-d. F^ν, n'auront que peu d'importance dans la suite. Nous nous trouverons

[1]) Systèmes de postulats de l'Algèbre de la Logique ne contenant comme seule notions primitives que celles d'identité et d'inclusion ou celles d'identité et de somme finie (somme de deux sommandes) sont à trouver dans l'article de M. E. V. Huntington, *Sets of independent postulates for the algebre of logic*, Trans. act. of the Amer. Math. Soc. 5, 1904, p. 288—309. Il est aisé de modifier ces systèmes de façon qu'ils embrassent également la notion de somme généralisée (somme d'une classe quelconque de sommandes), notion qui n'est pas envisagés d'habitude dans l'Algèbre de la Logique.

d'habitude en présence des opérations F, dont toutes les itérations sont identiques et qui se laissent donc caractériser par la formule: $F^2 \overset{\circ}{=} F$; les opérations de ce genre peuvent être appelées *itératives*.

Lemme 14. [a]) $[FG]H \overset{\circ}{=} F[GH]$;

[b]) *si* $F \overset{\circ}{\subset} G$, *on a* $FH \overset{\circ}{\subset} GH$;

[c]) $[F \overset{\circ}{+} G]H \overset{\circ}{=} FH \overset{\circ}{+} GH$;

[d]) $\left[\overset{\circ}{\sum\limits_{F\epsilon\mathfrak{F}}} F\right] G \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum\limits_{F\epsilon\mathfrak{F}}} [FG]$;

[e]) *si* $F^2 \overset{\circ}{=} F$, $G^2 \overset{\circ}{=} G$ *et* $FG \overset{\circ}{=} GF$, *on a* $[FG]^2 \overset{\circ}{=} FG$.

Démonstration est évidente.

En vertu de la loi associative qui vient d'être formulée dans le lem. 13[a] la suppression des parenthèses dans les symboles de la forme $[FG]H$ ou $F[GH]$ ne peut causer d'équivoques.

A toute classe d'opérations $\mathfrak{F}$ viennent correspondre d'autres classes d'opérations, notamment les classes de toutes les opérations qui s'obtiennent moyennant l'addition ou bien moyennant la multiplication relative ou enfin moyennant les deux opérations à la fois effectuées sur les éléments de la classe $\mathfrak{F}$. Je vais introduire ici des symboles spéciaux: $\mathfrak{S}(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{F})$ et $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$ pour désigner les classes d'opérations ainsi obtenues.

Définition 11. [a]) $\mathfrak{S}(\mathfrak{F})$ *est la classe de toutes les opérations* F *qui se laissent mettre sous la forme*: $F \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum\limits_{G\epsilon\mathfrak{G}}} G$, *où* $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ *et* $\mathfrak{G} \neq 0$;

[b]) $\mathfrak{P}(\mathfrak{F})$ *est la classe de toutes les opérations* F *de la forme* $F \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\prod\limits_{1\leqslant\xi\leqslant\nu}} F_\xi$, *où* $1 \leqslant \nu < \omega$ *et* $F_\xi \epsilon \mathfrak{F}$ *pour* $1 \leqslant \xi \leqslant \nu$;

[c]) $\mathfrak{B}(\mathfrak{F}) = \Pi(\underset{\mathfrak{G}}{E}[\mathfrak{F} + \mathfrak{S}(\mathfrak{G}) + \mathfrak{P}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}])$.

Je laisse au lecteur d'établir les propriétés générales des notions définies tout à l'heure, p. ex. les propriétés, exprimées par les formules: $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{S}(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{P}(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{B}(\mathfrak{B}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{B}(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{F}) + \mathfrak{P}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{F})$ etc.

A propos des formules [b])—[d]) du lem. 14, il est à remarquer que l'inclusion $G \overset{\circ}{\subset} H$ n'entraîne pas toujours: $FG \overset{\circ}{\subset} FH$, de même que la loi distributive: $F\Big[\mathop{\overset{\circ}{\sum}}_{G\in\mathfrak{G}} G\Big] \overset{\circ}{=} \mathop{\overset{\circ}{\sum}}_{G\in\mathfrak{G}} [FG]$ (et en particulier $F[G\overset{\circ}{+}H]\overset{\circ}{=}FG\overset{\circ}{+}FH$) n'est pas toujours vérifiée. On connaît néanmoins nombreuses opérations F qui remplissent les conditions en question relativement aux opérations arbitraires G et H ou relativement à la classe arbitraire d'opérations $\mathfrak{G}$. Les opérations de ce genre seront appelées *monotones*, resp. *totalement additives*; pour désigner les classes de toutes les opérations monotones ou additives on emploiera respectivement les signes $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{A}$. Il importe de distinguer en outre les opérations des catégories intermédiaires, plus particulières que $\mathfrak{M}$, mais plus générales que $\mathfrak{A}$; ce sont notamment les opérations *semi-additives au dégré* β (β étant un nombre ordinal arbitraire), dont les classes seront désignées ici par $\mathfrak{A}_\beta$.

Définition 12. [a]) *$\mathfrak{M}$ est la classe de toutes les opérations F qui remplissent la condition: G et H étant des opérations arbitraires telles que $G\overset{\circ}{\subset}H$, on a $FG\overset{\circ}{\subset}FH$;*

[b]) *$\mathfrak{A}$ est la classe de toutes les opérations F qui remplissent la condition: $\mathfrak{G}$ étant une classe arbitraire d'opérations, on a*

$$F\Big[\mathop{\overset{\circ}{\sum}}_{G\in\mathfrak{G}} G\Big] \overset{\circ}{=} \mathop{\overset{\circ}{\sum}}_{G\in\mathfrak{G}} [FG];$$

[c]) *$\mathfrak{A}_\beta$ est la classe de toutes les opérations F qui remplissent la condition: $\mathfrak{G}$ étant une classe arbitraire d'opérations, on a*

$$F\Big[\mathop{\overset{\circ}{\sum}}_{G\in\mathfrak{G}} G\Big] \overset{\circ}{=} \mathop{\overset{\circ}{\sum}}_{\mathfrak{K}\in U_\beta(\mathfrak{G})} \Big[F\Big[\mathop{\overset{\circ}{\sum}}_{G\in\mathfrak{K}} G\Big]\Big].$$

La déf. 12[a,b] s'éloigne des définitions universellement admises, mais leur est néanmoins équivalente, comme le montre le suivant

Lemme 15. [a]) *$\mathfrak{M}$ est la classe de toutes les opérations F assujetties à la condition: X et Y étant des classes arbitraires d'ensembles telles que $X\subset Y$, on a $F(X)\subset F(Y)$;*

[b]) *$\mathfrak{A}$ est la classe de toutes les opération F assujetties à la condition: $\mathscr{Y}$ étant une famille arbitraire de classes, on a $F(\Sigma(\mathscr{Y}))=$ $=\sum_{X\in\mathscr{Y}} F(X)$;*

[c]) *$\mathfrak{A}_\beta$ est la classe de toutes les opérations F assujetties à la condition: Y étant une classe arbitraire d'ensembles, on a $F(Y)=$ $=\sum_{X\in U_\beta(Y)} F(X)$.*

Démonstration. [a]) Que la condition du lemme est suffisante pour que $F\in\mathfrak{M}$, cela résulte facilement des déf. 8[b], 10[a] et 12[a]. Pour prouver que cette condition est en même temps necéssaire, on raisonnera comme suit:

Admettons que $F\in\mathfrak{M}$ et considérons deux classes arbitraires X et Y telles que $X\subset Y$. Définissons ensuite les opérations G et H, en posant p. ex.: $G(Z)=X$ et $H(Z)=Y$ pour toute classe Z. Conformément à la déf. 8[b] on a $G\overset{\circ}{\subset}H$, d'où en raison de la déf 12[a] on obtient: $FG\overset{\circ}{\subset}FH$. A l'aide des déf. 8[b] et 10[a] on en conclut que $F(G(Y))\subset F(H(Y))$, donc que $F(X)\subset F(Y)$. Il est ainsi démontré que pour toute opération monotone F la formule $X\subset Y$ implique $F(X)\subset F(Y)$, c. q. f. d.

[b]) et [c]) se démontrent d'une façon analogue.

A l'aide du lem. 15[a] on peut établir une série d'autres *conditions*, d'ailleurs bien connues, qui sont à la fois *nécessaires et suffisantes pour qu'une opération donnée F soit monotone*, comme p. ex. $F(Y)=$ $=\sum_{X\subset Y} F(X)$ *pour toute classe* Y; $F(X)+F(Y)\subset F(X+Y)$, resp. $F(X\cdot Y)\subset F(X)\cdot F(Y)$ *pour toutes classes* X *et* Y; $\sum_{X\in\mathscr{Y}} F(X)\subset F(\Sigma(\mathscr{Y}))$, resp. $F(\Pi(\mathscr{Y}))\subset\prod_{X\in\mathscr{Y}} F(X)$ *pour toute famille de classes* $\mathscr{Y}$ etc.; on peut en outre formuler les conditions analogues dans les termes de l'algorythme des opérations. Les opérations totalement additives peuvent être caractérisées par la formule: $F(Y)=$ $=\sum_{X\in Y} F(\{X\})$ *pour toute classe* Y.

Quelques autres propriétés des classes d'opérations considérées sont formulées dans le lemme suivant:

Lemme 16. [a]) *$\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}_\beta\subset\mathfrak{M}$; si $\overline{\overline{I}}=\aleph_\alpha$ et $2^{\aleph_\alpha}<\aleph_\beta$, on a $\mathfrak{A}_\beta=\mathfrak{M}$;*

[b]) *si $\beta\leqslant\gamma$, on a $\mathfrak{A}_\beta\subset\mathfrak{A}_\gamma$:*

c) *si* $F \epsilon \mathfrak{M}$ *et* $G \epsilon \mathfrak{M}$, *on a* $F \overset{\circ}{+} G \epsilon \mathfrak{M}$ *et* $FG \epsilon \mathfrak{M}$; *si* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$, *on a* $\mathop{\overset{\circ}{\sum}}_{F \epsilon \mathfrak{F}} F \epsilon \mathfrak{M}$;

d) *si* $F \epsilon \mathfrak{A}$ *et* $G \epsilon \mathfrak{A}$, *on a* $F \overset{\circ}{+} G \epsilon \mathfrak{A}$ *et* $FG \epsilon \mathfrak{A}$; *si* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$, *on a* $\mathop{\overset{\circ}{\sum}}_{F \epsilon \mathfrak{F}} F \epsilon \mathfrak{A}$;

e) *si* $F \epsilon \mathfrak{A}_\beta$ *et* $G \epsilon \mathfrak{A}_\beta$, *on a* $F \overset{\circ}{+} G \epsilon \mathfrak{A}_\beta$; *si* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}_\beta$, *on a* $\mathop{\overset{\circ}{\sum}}_{F \epsilon \mathfrak{F}} F \epsilon \mathfrak{A}_\beta$;

f) *si* $F \epsilon \mathfrak{A}_\beta$ *et* $G \epsilon \mathfrak{A}_\gamma$, *alors la formule:* $\gamma < \beta$ *implipue:* $FG \epsilon \mathfrak{A}_\beta$, *ĕt la formule:* $\beta \leqslant cf(\gamma)$ *entraîne:* $FG \epsilon \mathfrak{A}_\gamma$;

g) *si* $F \epsilon \mathfrak{A}_\beta$, $G \epsilon \mathfrak{A}_\beta$ *et* $cf(\beta) = \beta$ *ou bien si* $F \epsilon \mathfrak{A}$ *et* $G \epsilon \mathfrak{A}_\beta$, *on a* $FG \epsilon \mathfrak{A}_\beta$.

Démonstration. Les formules a) et b) résultent facilement du lem. 15 (si, en particulier, $\overline{\overline{I}} = \aleph_\alpha$ et $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_\beta$, on a en raison du lem. 10^{a} $\overline{\overline{U(I)}} = 2^{\aleph_\alpha} < \aleph_\beta$, d'où $\overline{\overline{X}} < \aleph_\beta$ et $U_\beta(X) = U(X)$ pour toute classe d'ensemble X; en le rapprochant du lem. $15^{\mathrm{a,c}}$, on conclut que les formules: $F \epsilon \mathfrak{M}$ et $F \epsilon \mathfrak{A}_\beta$ sont équivalents et par-suite que $\mathfrak{A}_\beta = \mathfrak{M}$).

Les formules c)—e) se déduisent de la déf. 12 à l'aide du lem. $14^{\mathrm{a,c,d}}$

Quant à la proposition f) on raissonnera comme suit: Envisageons une classe arbitraire d'ensembles K. Les opérations F et G étant par hypothèse semi-additives, elles sont à plus forte raison monotones, suivant la partie a) du théorème dont il s'agit. En vertu de c) l'opération FG l'est aussi; à l'aide du lem. 15^{a} on en conclut que $FG(X) \subset FG(K)$ pour toute classe $X \subset K$. Par conséquent:

(1) $$\sum_{X \epsilon U_\beta(K)} FG(X) \subset FG(K) \quad \text{et} \quad \sum_{X \epsilon U_\gamma(K)} FG(X) \subset FG(K).$$

Or, soit Z un ensemble arbitraire de la classe $FG(K)$:

(2) $$Z \epsilon FG(K).$$

Comme $F \epsilon \mathfrak{A}_\beta$, on a d'après le lem. 15^{c} $FG(K) = \sum\limits_{Y \epsilon U_\beta G(K)} F(Y)$; en raison de (2) et de la déf. 5^{b} il existe donc une classe d'ensembles L qui vérifie les formules:

(3) $$Z \epsilon F(L),$$

(4) $$L \subset G(K) \quad \text{et} \quad \overline{\overline{L}} < \aleph_\beta.$$

Par une application renouvelée du lem. 15^{c} (pour $F = G$ et $\beta = \gamma$) on obtient: $G(K) = \sum\limits_{X \epsilon U_\gamma(K)} G(X)$. Tenant compte de (4), on en déduit à l'aide de l'axiome du choix l'existence d'une fonction H qui fait correspondre à tout ensemble Y de L une classe d'ensembles $H(Y)$ de façon que l'on ait:

(5) $$Y \epsilon GH(Y) \quad \text{pour} \quad Y \epsilon L;$$

(6) $$H(Y) \subset K \quad \text{et} \quad \overline{\overline{H(Y)}} < \aleph_\gamma \quad \text{pour} \quad Y \epsilon L.$$

Comme il a été déjà dit, les opérations F et G sont monotones; conformément au lem. 15^{a} et en vertu de (5) on a donc:

$$L \subset \sum_{Y \epsilon L} GH(Y) \subset G\Big(\sum_{Y \epsilon L} H(Y)\Big), \text{ d'où } F(L) \subset FG\Big(\sum_{Y \epsilon L} H(Y)\Big);$$

en le rapprochant de (3) et (6), on obtient:

(7) $$Z \epsilon FG\Big(\sum_{Y \epsilon L} H(Y)\Big), \quad \text{où} \quad \sum_{Y \epsilon L} H(Y) \subset K.$$

Or, soit $\gamma < \beta$, d'où $\aleph_\gamma < \aleph_\beta$. D'après (4) et (6) on a alors $\overline{\overline{\sum\limits_{Y \epsilon L} H(Y)}} \leqslant \aleph_\gamma \cdot \overline{\overline{L}} < \aleph_\beta^2 = \aleph_\beta$. Suivant (7) on en conclut que

(8) $$Z \epsilon \sum_{X \epsilon U_\beta(K)} FG(X) \quad \text{pour} \quad \gamma < \beta.$$

Si par contre $\beta \leqslant cf(\gamma)$, on a en vertu de (4): $\overline{\overline{L}} < \aleph_{cf(\gamma)}$. En posant donc dans le lem. 3^{b}: $B = L$ et $F \overset{\circ}{=} H$ et en tenant compte de (6), on parvient à la formule: $\overline{\overline{\sum_{Y \in L} H(Y)}} < \aleph_\gamma$, qui, rapprochée de (7), entraîne:

$$(9) \qquad Z \in \sum_{X \in U_\gamma(K)} FG(X) \quad \textit{pour} \quad \beta \leqslant cf(\gamma).$$

Il est ainsi prouvé que (2) implique (8) et (9) pour tout Z. A l'aide de (1) on en déduit les égalités:

$$(10) \quad FG(K) = \sum_{X \in U_\beta(K)} FG(X) \quad \textit{pour} \quad \gamma < \beta; \qquad FG(K) = \sum_{X \in U_\gamma(K)} FG(X) \quad \textit{pour} \quad \beta \leqslant cf(\gamma).$$

En conséquence du lem. 15[c] les formules (10), qui sont valables pour toute classe d'ensembles K, donnent finalement:

$$FG \in \mathfrak{A}_\beta \quad \textit{pour} \quad \gamma < \beta \quad \textit{et} \quad FG \in \mathfrak{A}_\gamma \quad \textit{pour} \quad \beta \leqslant cf(\gamma), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Or, si l'on pose dans la proposition [f]), qui vient d'être établie: $\gamma = \beta$, resp. $\beta = 0$ et $\gamma = \beta$ (et si l'on tient compte de [a])), on parvient immédiatement à la proposition [g]).

Le lem. 16 est ainsi entièrement démontré.

En tenant compte de la déf. 11, le lem. 16[c,d,e] peut être énoncé plus court à l'aide des formules: $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{P}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{S}(\mathfrak{A}_\beta) = \mathfrak{A}_\beta$; d'après le lem 16[g] on a de plus: $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_\beta) = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}_\beta) = \mathfrak{A}_\beta$, *lorsque* $cf(\beta) = \beta$.

En dehors des classes d'opérations semi-additives au dégré β on peut considérer autres classes d'opérations également plus étroites que $\mathfrak{M}$ et plus vastes que $\mathfrak{A}$. Comme exemple d'une telle classe on peut citer celle des opérations *additives au sens restreint*, c.-à-d. des opérations F qui vérifient la formule: $F[G \overset{\circ}{+} H] \overset{\circ}{=} FG \overset{\circ}{+} FH$ *pour toutes operations* G *et* H (resp. $F(X+Y) = F(X) + F(Y)$ *pour toutes classes* X *et* Y). En généralisant cette notion, on parvient à celle des *opérations additives au dégré* β, c.-à-d. caractérisables par la condition:

$$F\Big[\overset{\circ}{\sum_{G \in \mathfrak{G}}} G\Big] \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum_{G \in \mathfrak{G}}} [FG], \quad \textit{lorsque} \quad \overline{\overline{\mathfrak{G}}} < \aleph_\beta \quad \Big(\text{resp. } F(\Sigma(\mathcal{Y})) = \sum_{X \in \mathcal{Y}} F(X),$$

lorsque $\overline{\overline{\mathcal{Y}}} < \aleph_\beta$); cette notion, d'ailleurs importante, restera cependant sans application dans les questions qui nous occupent.

Comme exemples des opérations effectuées sur les classes d'ensembles et qui sont totalement additives, donc qui présentent par cela-même toutes les autres propriétés envisagées plus haut, on peut citer toutes les

opérations de la forme $\overline{F}$ (cf. la déf. 6), où F est une opération arbitraire faisant correspondre les ensembles d'individus aux ensembles d'individus.

En rapport avec la multiplication des opérations joue un certain rôle l'opération d'identité I, qui en est le module. Il est à remarquer que presque toutes les opérations F dont nous avons affaire dans ces considérations vérifient l'inclusion $I \overset{\circ}{\subseteq} F$; l'opération I constitue donc à un certain point de vue leur borne inférieure. Les opérations F qui remplissent la formule: $I \overset{\circ}{\subseteq} F$ peuvent être appelées *adjonctives.*

Définition 13. $I(K) = K$.

Voici quelques propriétés de l'opération I et des opérations adjonctives:

Lemme 17. [a]) $I \in \mathfrak{A}$, *donc* $I \in \mathfrak{A}_\beta$ *et* $I \in \mathfrak{M}$;

[b]) $IF \overset{\circ}{=} F \overset{\circ}{=} FI$, *en particulier* $I^2 \overset{\circ}{=} I$;

[c]) *si* $I \overset{\circ}{\subseteq} F$, *on a* $G \overset{\circ}{\subseteq} FG$; *si de plus* $G \in \mathfrak{M}$, *on a* $G \overset{\circ}{\subseteq} GF$;

[d]) *si* $I \overset{\circ}{\subseteq} F \overset{\circ}{\subseteq} G$ *et* $G^2 \overset{\circ}{=} G$, *on a* $FG \overset{\circ}{=} G$; *si de plus* $G \in \mathfrak{M}$, *on a* $GF \overset{\circ}{=} G$;

[e]) *si* $I \overset{\circ}{\subseteq} F$ *et* $I \overset{\circ}{\subseteq} G$, *on a* $I \overset{\circ}{\subseteq} FG$;

[f]) *si* $I \overset{\circ}{\subseteq} F$, *on a* $K \subseteq F(K)$ *et* $\overline{\overline{K}} \leqslant \overline{\overline{F(K)}}$.

Il est à noter que toutes les notions définies jusqu'ici dans ce § sont applicables non seulement aux opérations qui font correspondre les classes d'ensembles aux classes d'ensembles, mais aussi à toute opération sur des ensembles quelconques et ayant pour résultat des ensembles quelconques; en ce qui concerne la déf. 10, même une telle restriction des résultats des opérations n'est pas essentielle. Un maniement systématique avec les notions introduites ici et employées dans une étendue la plus vaste rendrait possible une déscription très brève, bien que peu intuitive, de plusieurs faits acquis. Ainsi p. ex. les opérations monotones pourraient être caractérisées par une des formules: $\overline{F}U \overset{\circ}{\subseteq} UF$, $F \overset{\circ}{=} \Sigma \overline{F} U$, $\Sigma \overline{F} \overset{\circ}{\subseteq} F\Sigma$ ou $F\Pi \overset{\circ}{\subseteq} \Pi \overline{F}$, les opérations totalement additives — par une des formules: $F \overset{\circ}{=} \Sigma \overline{F} \overline{J}$ ou $\Sigma \overline{F} \overset{\circ}{=} F\Sigma$, et enfin les opérations semi-additives du dégré β — — par la formule: $F \overset{\circ}{=} \Sigma \overline{F} U_\beta$. Cependant, pour éviter de rendre la lecture de cet ouvrage plus difficile encore, je ne vais pas abuser davantage de la symbolique de ce genre; ce n'est que la notion de multiplication relative (déf. 10[a]) dont je ferai l'usage le plus vaste possible, ce qui me permet p. ex. de supprimer les parenthèses extérieures dans toutes les expressions de la forme $f(g(x))$.

En dehors de l'opération I, une autre opération particulière est d'importance considérable pour la suite, à savoir l'opération C consistant à remplacer les ensembles X d'une classe K par leurs complémentaires $1-X$.

Définition 14. $C(K) = \underset{1-X}{E}[X \epsilon K]$.

Passons en revue quelques propriétés élémentaires de l'opération C:

Lemme 18. a) $C \epsilon \mathfrak{A}$, *donc* $C \epsilon \mathfrak{A}_\beta$ *et* $C \epsilon \mathfrak{M}$;

b) $C^2 \overset{\circ}{=} I$;

c) $[I \overset{\circ}{+} C]^2 \overset{\circ}{=} I \overset{\circ}{+} C$;

d) $C(0) = 0$ *et* $CU(1) = U(1)$;

e) $\overline{\overline{C(K)}} = \overline{\overline{K}}$.

Démonstration de a), b) et d) est évidente; c) peut être déduit de a) et b) à l'aide des déf. 10 et 12^b et des lem. 14^c et 17^b. La formule e) résulte du fait que la fonction $F(X) = 1 - X$ est biunivoque.

A toute opération F on peut faire correspondre une autre opération CFC, qui conserve beaucoup de propriétés de l'opération F; cette opération CFC portera le nom d'*opération double de* F et sera désignée par F^*. Je vais faire de cette notion de dualité un usage constant dans les chapîtres qui vont suivre; grâce à ses propriétés, beaucoup de raisonnements subissent une simplification considérable.

Définition 15. $F^*(K) = CFC(K)$.

Certaines propriétés des opérations doubles sont réunies dans le suivant

Lemme 19. a) $CFC \overset{\circ}{=} F^*$, $CF \overset{\circ}{=} F^* C$, $C^* \overset{\circ}{=} C$;

b) $F^{**} \overset{\circ}{=} F$;

c) *si* $F \overset{\circ}{\subset} G$, *on a* $F^* \overset{\circ}{\subset} G^*$;

d) $[F \overset{\circ}{+} G]^* \overset{\circ}{=} F^* \overset{\circ}{+} G^*$ *et généralement* $\left[\overset{\circ}{\sum_{F \epsilon \mathfrak{F}}} F\right]^* \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum_{F \epsilon \mathfrak{F}}} F^*$;

e) $[FG]^* \overset{\circ}{=} F^* G^*$.

f) *si* $F^2 \overset{\circ}{=} F$, *on a* $[F^*]^2 \overset{\circ}{=} F^*$;

g) *si* $F \epsilon \mathfrak{M}$, *on a* $F^* \epsilon \mathfrak{M}$;

h) *si* $F \epsilon \mathfrak{A}$, *on a* $F^* \epsilon \mathfrak{A}$;

i) *si* $F \epsilon \mathfrak{A}_\beta$, *on a* $F^* \epsilon \mathfrak{A}_\beta$;

j) $I^* \overset{\circ}{=} I$; *si* $I \overset{\circ}{\subset} F$, *on a* $I \overset{\circ}{\subset} F^*$;

k) *si* $F(0) = 0$, *on a* $F^*(0) = 0$;

l) *si* $\overline{\overline{F(X)}} \leqslant \mathfrak{f}(\overline{\overline{X}})$, *resp.* $\overline{\overline{F(X)}} \geqslant \mathfrak{f}(\overline{\overline{X}})$ *pour toute classe d'ensembles* X, *on a aussi* $\overline{\overline{F^*(X)}} \leqslant \mathfrak{f}(\overline{\overline{X}})$, *resp.* $\overline{\overline{F^*(X)}} \geqslant \mathfrak{f}(\overline{\overline{X}})$ *pour toute classe* X.

Démonstration ne prête pas de difficulté; on s'appuie sur les définitions 15 et antérieures et sur le lem. 18.

Comme il est facile de voir, la signification du symbole F^* dépend non seulement de celle de F, mais aussi, tout comme dans le cas du symbole C, de l'interprétation du signe 1 (cf. p. 183). Si l'on voulait supprimer cette dépendance de l'opération F^* de la signification de 1, il faudrait convenablement transformer les déf. 14 et 15, en posant p. ex. $C_A(K) = \underset{A-X}{E}[X \epsilon K]$ et $F^\times(K) = C_{\Sigma(K)} F C_{\Sigma(K)}(K)$. La notion d'opération double ainsi modifiée ne coïncide plus avec la notion primitive et perd plusieurs propriétés précieuses au point de vue de ces recherches (en particulier le th. 33 du § suivant cesse d'être valable). Il existe toutefois un nombre d'opérations F dont les deux opérations doubles F^* et $F^\times$ coïncident, de sorte que l'opération F^* conserve alors sa signification unique indépendamment du mode de l'interprétation du signe 1; telles sont en particulier les opérations qui feront l'objet des §§ 5 et 6 de cet ouvrage.

§ 3. Notion générale de classe close par rapport à une opération donnée.

Dans ce § je me propose d'examiner les propriétés générales des classes closes par rapport aux opérations quelconques.

Une classe d'ensembles K est dite *close par rapport à une opération* F *donnée*, lorsque $F(K) \subset K$.

On pourrait en outre distinguer les classes *closes au sens plus étroit*, c.-à-d. vérifiant la formule: $\overline{F}U(K) \subset U(K)$. Cépendant cette distinction est dépourvue d'importance ici, les deux notions coïncidant pour les opérations monotones et toutes les opérations qui nous intéressent dans ce travail étant de cette sorte.

Je vais introduire un signe spécial pour désigner la famille de toutes les classes closes par rapport à une opération F:

Définition 16. $\mathcal{C}\ell(F) = \underset{X}{E}[F(X) \subset X]$.

J'admets, comme toujours, que les classes de la famille $\mathcal{C}\ell(F)$ se composent exclusivement de sous-ensembles d'un ensemble 1 donné auparavant (bien que la relativité de la notion envisagée envers l'ensemble 1 n'est pas mise en évidence dans le symbole $\mathcal{C}\ell(F)$, comme il a été d'ailleurs anoncé au début du § 1). En tenant compte de ce fait, on peut établir facilement le

Théorème 20. *F étant une opération arbitraire, on a $U(1) \in \mathcal{C}\ell(F)$ et $\mathcal{C}\ell(F) \subset UU(1)$.*

Démonstration. Suivant la déf. 5^a, $U(1)$ est la classe de tous les ensembles possibles (contenus dans 1) et $UU(1)$ est la famille de toutes les classes possibles (contenues dans $U(1)$). Or, comme $F(U(1))$ est également une classe d'ensembles, on a $F(U(1)) \subset U(1)$, d'où, en raison de la déf. 16, $U(1) \in \mathcal{C}\ell(F)$; de plus, $\mathcal{C}\ell(F)$ étant une famille de classes, on a $\mathcal{C}\ell(F) \subset UU(1)$, c. q. f. d.

Théorème 21. a) *Si $F \overset{\circ}{\subset} G$, on a $\mathcal{C}\ell(G) \subset \mathcal{C}\ell(F)$;*

b) *$\mathcal{C}\ell(F \overset{\circ}{+} G) = \mathcal{C}\ell(F) \cdot \mathcal{C}\ell(G)$ et généralement $\mathcal{C}\ell\left(\overset{\circ}{\sum_{F \in \mathfrak{F}}} F\right) = \prod_{F \in \mathfrak{F}} \mathcal{C}\ell(F)$.*

Démonstration résulte facilement des déf. 8^b, 9 et 16.

M'appuyant sur le th. 21^b, je vais employer constamment les symboles $\mathcal{C}\ell(F \overset{\circ}{+} G)$ et $\mathcal{C}\ell\left(\overset{\circ}{\sum_{F \in \mathfrak{F}}} F\right)$ pour désigner les familles de toutes les classes closes respectivement: par rapport aux deux opérations F et G à la fois, ou par rapport à toutes les opérations d'une classe $\mathfrak{F}$ donnée simultanément.

Le th. 21^b implique immédiatement le

Corollaire 22. *Si $\mathcal{C}\ell(F) = \mathcal{C}\ell(G)$, on a $\mathcal{C}\ell(F \overset{\circ}{+} H) = \mathcal{C}\ell(G \overset{\circ}{+} H)$*

Théorème 23. a) *$\mathcal{C}\ell(I) = UU(1)$;*

b) *$\mathcal{C}\ell(I \overset{\circ}{+} F) = \mathcal{C}\ell(F)$;*

c) *si $I \overset{\circ}{\subset} F$, on a $\mathcal{C}\ell(F) = \underset{X}{E}[F(X) = X]$;*

d) *si $F^2 \overset{\circ}{=} F$ et $I \overset{\circ}{\subset} F$, on a $\mathcal{C}\ell(F) = \overline{F}UU(1)$.*

Démonstration. a) résulte aussitôt des déf. 16 et 13.

b) En vertu du th. 21^b, $\mathcal{C}\ell(I \overset{\circ}{+} F) = \mathcal{C}\ell(I) \cdot \mathcal{C}\ell(F)$; comme, en raison de a) et du th. 20, $\mathcal{C}\ell(F) \subset \mathcal{C}\ell(I)$, on en obtient: $\mathcal{C}\ell(I \overset{\circ}{+} F) = \mathcal{C}\ell(F)$, c. q. f. d.

c) est une conséquence immédiate de la déf. 16 et du lem. 17^f.

d) $UU(1)$ étant la famille de toutes les classes d'ensembles, on conclut de c) que

$$\mathcal{C}\ell(F) \subset \underset{F(X)}{E}[X \in UU(1)]. \tag{1}$$

D'autre part, envisageons une classe arbitraire d'ensembles X ($X \in UU(1)$) et posons: $Y = F(X)$. Comme $F^2 \overset{\circ}{=} F$, on a suivant les déf. 8^a et 10: $F(Y) = FF(X) = F^2(X) = F(X) = Y$, d'où à fortiori $F(Y) \subset Y$, donc, conformément à la déf. 16, $Y \in \mathcal{C}\ell(F)$. Il est ainsi démontré que pour tout $X \in UU(1)$ on a $F(X) \in \mathcal{C}\ell(F)$; en d'autres termes

$$\underset{F(X)}{E}[X \in UU(1)] \subset \mathcal{C}\ell(F). \tag{2}$$

Les inclusions (1) et (2) donnent l'égalité: $\mathcal{C}\ell(F) = \underset{F(X)}{E}[X \in UU(1)$; en posant dans la déf. 6: $f \overset{\circ}{=} F$ et $A = UU(1)$, on en obtient la formule cherchée:

$$\mathcal{C}\ell(F) = \overline{F}UU(1).$$

En raison du th. 23^b il est facile de comprendre pourquoi on peut se borner ici aux opérations G adjonctives, c.-à-d. vérifiant l'inclusion: $I \overset{\circ}{\subset} G$ (cf. p. 209). En examinant la notion de classe close par rapport à une opération arbitraire F, on peut en effet remplacer cette opération par une opération adjonctive G (notamment par $G \overset{\circ}{=} I \overset{\circ}{+} F$) de façon que les familles correspondantes $\mathcal{C}\ell(F)$ et $\mathcal{C}\ell(G)$ coïncident.

Théorème 24. a) *Si $F \in \mathfrak{M}$ ou $I \overset{\circ}{\subset} G$, on a $\mathcal{C}\ell(F \overset{\circ}{+} G) \subset \mathcal{C}\ell(FG)$;*

[b]) *si* $F \in \mathfrak{M}$ *et* $I \overset{\circ}{\subset} G$, *on a* $\mathcal{C}\ell(FG) \subset \mathcal{C}\ell(F)$;

[c]) *si* $I \overset{\circ}{\subset} F$, *on a* $\mathcal{C}\ell(FG) \subset \mathcal{C}\ell(G)$;

[d]) *si* $F \in \mathfrak{M}$, $I \overset{\circ}{\subset} F$ *et* $I \overset{\circ}{\subset} G$, *on a* $\mathcal{C}\ell(FG) = \mathcal{C}\ell(F \overset{\circ}{+} G) = \mathcal{C}\ell(F) \cdot \mathcal{C}\ell(G)$.

Démonstration. [a]) Soit $X \in \mathcal{C}\ell(F \overset{\circ}{+} G)$. En raison des déf. 16 et 9[a], on a $F(X) + G(X) \subset X$, d'où $F(X) \subset X$ et $G(X) \subset X$. Si $F \in \mathfrak{M}$, on applique le lem. 15[a], en y remplaçant X par $G(X)$ et Y par X; de l'inclusion: $G(X) \subset X$ on obtient ainsi: $FG(X) \subset F(X)$, ce qui, rapproché de la formule: $F(X) \subset X$, donne: $FG(X) \subset X$. Si, d'autre part, $I \overset{\circ}{\subset} G$, on a en vertu du lem. 17[f] $X \subset G(X)$, d'où $G(X) = X$; en remplaçant donc X par $G(X)$ dans la formule: $F(X) \subset X$, on obtient de nouveau: $FG(X) \subset X$. Or, conformément à la déf. 16, cette dernière inclusion équivaut à la formule: $X \in \mathcal{C}\ell(FG)$.

Nous avons ainsi prouvé que dans les hypothèses du lemme la formule: $X \in \mathcal{C}\ell(F \overset{\circ}{+} G)$ entraîne toujours: $X \in \mathcal{C}\ell(FG)$; par conséquent l'inclusion cherchée: $\mathcal{C}\ell(F \overset{\circ}{+} G) \subset \mathcal{C}\ell(FG)$ se trouve établie.

[b]) Suivant le lem. 17[c] les formules $F \in \mathfrak{M}$ et $I \overset{\circ}{\subset} G$ donnent $F \overset{\circ}{\subset} FG$; à l'aide du th. 21[a] on en conclut que $\mathcal{C}\ell(FG) \subset \mathcal{C}\ell(F)$, c. q. f. d.

[c]) se démontre d'une façon complètement analogue.

[d]) Les formules [a])—[c]) établies tout à l'heure impliquent que $\mathcal{C}\ell(F \overset{\circ}{+} G) \subset \mathcal{C}\ell(FG) \subset \mathcal{C}\ell(F) \cdot \mathcal{C}\ell(G)$. En rapprochant cette inclusion double du th. 21[b] on en obtient aussitôt:

$$\mathcal{C}\ell(FG) = \mathcal{C}\ell(F \overset{\circ}{+} G) = \mathcal{C}\ell(F) \cdot \mathcal{C}\ell(G), \quad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 25. *Si* $I \overset{\circ}{\subset} F$ *et* $1 \leqslant \nu < \omega$, *on a* $\mathcal{C}\ell(F^\nu) = \mathcal{C}\ell(F)$.

Démonstration. On déduit facilement de la déf. 10 les formules suivantes:

$$(1) \qquad F^1 \overset{\circ}{=} F \ \textit{ et } \ F^\nu F \overset{\circ}{=} FF^\nu \overset{\circ}{=} F^{\nu+1} \ (\textit{pour } 1 \leqslant \nu < \omega).$$

En remplaçant dans les th. 21[b] et 24[a] F par F^ν et G par F, on obtient: $\mathcal{C}\ell(F^\nu) \cdot \mathcal{C}\ell(F) = \mathcal{C}\ell(F^\nu \overset{\circ}{+} F) \subset \mathcal{C}\ell(F^\nu F)$; d'où selon (1)

$$(2) \qquad \mathcal{C}\ell(F^\nu) \cdot \mathcal{C}\ell(F) \subset \mathcal{C}\ell(F^{\nu+1}).$$

A l'aide du principe de l'induction complète on en conclut que

$$(3) \qquad \mathcal{C}\ell(F) \subset \mathcal{C}\ell(F^\nu) \quad (\textit{pour } 1 \leqslant \nu < \omega).$$

En effet, le nombre $\nu = 1$ vérifie la formule (3), puisqu'on a suivant (1) $\mathcal{C}\ell(F) = \mathcal{C}\ell(F^1)$; si ensuite un nombre arbitraire ν, où $1 \leqslant \nu < \omega$, remplit la formule (3), on obtient, d'après (4), $\mathcal{C}\ell(F) \subset \mathcal{C}\ell(F^{\nu+1})$, ce qui veut dire que le nombre $\nu + 1$ remplit la même formule.

D'autre part, en posant dans le th. 24[c]: $G \overset{\circ}{=} F^\nu$ et en tenant compte de (1), on parvient à la formule: $\mathcal{C}\ell(F^{\nu+1}) \subset \mathcal{C}\ell(F^\nu)$, d'où on obtient par une induction facile:

$$(4) \qquad \mathcal{C}\ell(F^\nu) \subset \mathcal{C}\ell(F^1) = \mathcal{C}\ell(F) \quad (\textit{pour } 1 \leqslant \nu < \omega).$$

Les inclusions (3) et (4) donnent aussitôt:

$$\mathcal{C}\ell(F^\nu) = \mathcal{C}\ell(F), \quad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 26. $\mathcal{C}\ell(F^*) = \overline{C}(\mathcal{C}\ell(F))$.

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{C}\ell(F)$, donc d'après la déf. 16 $F(X) \subset X$. A l'aide des lem. 15[a] et 18[a] on en obtient: $CF(X) \subset C(X)$, d'où en vertu du lem. 19[a] $F^* C(X) \subset C(X)$. Par conséquent, en raison de la déf. 16, on a $C(X) \in \mathcal{C}\ell(F^*)$.

Ce raisonnement prouve l'inclusion: $\overline{C}(\mathcal{C}\ell(F)) \subset \mathcal{C}\ell(F^*)$.

D'une façon tout à fait analogue on peut démontrer qu'à toute classe $Y \in \mathcal{C}\ell(F^*)$ correspond une classe $X \in \mathcal{C}\ell(F)$ telle que $Y = C(X)$. Il en résulte l'inclusion: $\mathcal{C}\ell(F^*) \subset \overline{C}(\mathcal{C}\ell(F))$, qui, rapprochée de l'inclusion précédente, donne l'identité cherchée:

$$\mathcal{C}\ell(F^*) = \overline{C}(\mathcal{C}\ell(F)).$$

Corollaire 27. *Si* $\mathcal{C}\ell(F) = \mathcal{C}\ell(G)$, *on a* $\mathcal{C}\ell(F^*) = \mathcal{C}\ell(G^*)$.

Théorème 28. [a]) *Si* $F \in \mathfrak{M}$ *et* $I \overset{\circ}{\subset} F$, *on a* $\mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} F) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} F^*) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} F \overset{\circ}{+} E^*) = \mathcal{C}\ell(CF) = \mathcal{C}\ell(CF^*) = \mathcal{C}\ell(CFF^*)$;

[b]) *si* $F \in \mathfrak{M}$, *on a* $\mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} F) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} F^*) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} F \overset{\circ}{+} F^*)$.

Démonstration. [a]) En vertu du lem. 19[g,i] on a par hypothèse

$$(1) \qquad F^* \in \mathfrak{M} \ \textit{ et } \ I \overset{\circ}{\subset} F^*;$$

à l'aide des lem. 16[c], 17[e] et 18[a] on obtient de l'hypothèse et de (1):

(2) $FF^* \in \mathfrak{M}$ *et* $I \overset{\circ}{\subset} FF^*$; $CF \in \mathfrak{M}$ *et* $CF^* \in \mathfrak{M}$.

En appliquant à deux reprises le th. 24[a] (pour $F \overset{\circ}{=} C$ et $G \overset{\circ}{=} F$ et puis pour $F \overset{\circ}{=} C$ et $G \overset{\circ}{=} F^*$) et en tenant compte du lem. 18[a], on conclut que

(3) $\mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F) \subset \mathcal{Cl}(CF)$ *et* $\mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F^*) \subset \mathcal{Cl}(CF^*)$;

tout pareillement, en vertu de l'hypothèse et de (1), le th. 24[b] donne:

(4) $\mathcal{Cl}(CF) \subset \mathcal{Cl}(C)$ *et* $\mathcal{Cl}(CF^*) \subset \mathcal{Cl}(C)$.

En remplaçant dans le th. 24[a] F et G par CF, resp. par CF^*, on obtient selon (2): $\mathcal{Cl}(CF \overset{\circ}{+} CF) \subset \mathcal{Cl}(CF\,CF)$, resp. $\mathcal{Cl}(CF^* \overset{\circ}{+} CF^*) \subset \mathcal{Cl}(CF^*\,CF^*)$, d'où en raison du lemme 19[a,b]

(5) $\mathcal{Cl}(CF) \subset \mathcal{Cl}(F^*F)$ *et* $\mathcal{Cl}(CF^*) \subset \mathcal{Cl}(FF^*)$.

En tenant compte de l'hypothèse et de (1), le th. 24[b] implique encore que $\mathcal{Cl}(F^*F) \subset \mathcal{Cl}(F^*)$ et $\mathcal{Cl}(FF^*) \subset \mathcal{Cl}(F)$; en rapprochant ces inclusions de (5), nous obtenons:

(6) $\mathcal{Cl}(CF) \subset \mathcal{Cl}(F^*)$ *et* $\mathcal{Cl}(CF^*) \subset \mathcal{Cl}(F)$.

Les formules (4) et (6) donnent: $\mathcal{Cl}(CF) \subset \mathcal{Cl}(C) \cdot \mathcal{Cl}(F^*)$ et $\mathcal{Cl}(CF^*) \subset \mathcal{Cl}(C) \cdot \mathcal{Cl}(F)$; comme, en vertu du th. 21[b],

$$\mathcal{Cl}(C) \cdot \mathcal{Cl}(F^*) = \mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F^*) \text{ et } \mathcal{Cl}(C) \cdot \mathcal{Cl}(F) = \mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F),$$

on en conclut que

(7) $\mathcal{Cl}(CF) \subset \mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F^*)$ *et* $\mathcal{Cl}(CF^*) \subset \mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F)$.

De (3) et (7) on déduit aussitôt:

(8) $\mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F) = \mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F^*) = \mathcal{Cl}(CF) = \mathcal{Cl}(CF^*)$.

Le cor. 22, si l'on y remplace F par $C \overset{\circ}{+} F$, G par $C \overset{\circ}{+} F^*$ et H par F^*, entraîne selon (8):

(9) $\mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F \overset{\circ}{+} F^*) = \mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F^*)$.

Appliquons enfin le th. 24[d], en y posant: $G \overset{\circ}{=} F^*$; en raison de l'hypothèse et de (1), nous en concluons que $\mathcal{Cl}(FF^*) = \mathcal{Cl}(F \overset{\circ}{+} F^*)$, d'où suivant le cor. 22

(10) $\mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} FF^*) = \mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F \overset{\circ}{+} F^*)$.

La formule (8) ayant été déduite pour toute opération monotone et adjonctive, on peut y remplacer selon (2) en particulier F par FF^*; on obtient donc: $\mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} FF^*) = \mathcal{Cl}(CFF^*)$, d'où en vertu de (10)

(11) $\mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F \overset{\circ}{+} F^*) = \mathcal{Cl}(CFF^*)$.

Les égalités (8), (9) et (11) constituent la formule à démontrer.

b) En vertu des lem. 16[c], 17[a] et 13 on a $I \overset{\circ}{+} F \in \mathfrak{M}$ et $I \overset{\circ}{\subset} I \overset{\circ}{+} F$, d'où, en remplaçant dans a) F par $I \overset{\circ}{+} F$ et en tenant compte du lem. 19[d,i], on obtient: $\mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} I \overset{\circ}{+} F) = \mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} I \overset{\circ}{+} F^*) = \mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} I \overset{\circ}{+} F \overset{\circ}{+} F^*)$. La formule cherchée en résulte aussitôt selon le th. 23[b].

On peut déduire des th. 24 et 28 certaines conséquences d'un caractère plus général. Considérons une classe arbitraire $\mathfrak{F}$ composée exclusivement d'opérations monotones et adjonctives et ajoutons à cette classe, si l'on veut, l'opération C, qui est aussi monotone, mais pas adjonctive. A l'aide de l'addition et de la multiplication relative on peut former des opérations de la classe $\mathfrak{F}$, resp. $\{C\} + \mathfrak{F}$, diverses autres opérations; nous avons convenu de désigner par le symbole $\mathfrak{B}(\mathfrak{F})$, resp. $\mathfrak{B}(\{C\} + \mathfrak{F})$, la classe de toutes les opérations ainsi formées (cf. la déf. 11[c]). Or, en généralisant les résultats exprimés par les th. 24[d] et 28[a], on peut montrer qu'au cours de l'étude des classes closes par rapport aux opérations considérées on peut se restreindre à n'envisager que les opérations de structure asser simple, à savoir celles qui s'obtiennent des opérations de la classe primitive $\mathfrak{F}$, de leurs opérations doubles et de deux opérations C et I par la seule addition. En symboles introduits dans la déf. 11, on peut démontrer notamment les théorèmes suivants:

A. *Si* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M} \cdot \underset{F}{E}[I \overset{\circ}{\subset} F]$, *on a* $\underset{\mathcal{Cl}(G)}{E}[G \in \mathfrak{B}(\mathfrak{F})] = \underset{\mathcal{Cl}(G)}{E}[G \in \mathfrak{S}(\mathfrak{F})]$.

B. *Si* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M} \cdot \underset{F}{E}[I \overset{\circ}{\subset} F]$ *et* $\mathfrak{G} = \underset{F^*}{E}[F \in \mathfrak{F}]$, *on a*

$$\underset{\mathcal{Cl}(G)}{E}[G \in \mathfrak{B}(\{C\} + \mathfrak{F})] = \underset{\mathcal{Cl}(G)}{E}[G \in \mathfrak{S}(\{I, C\} + \mathfrak{F} + \mathfrak{G})] =$$

$$= \{\mathcal{Cl}(I), \mathcal{Cl}(C)\} + \underset{\mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} G)}{E}[G \in \mathfrak{S}(\mathfrak{F})] + \underset{\mathcal{Cl}(G)}{E}[G \in \mathfrak{S}(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})].$$

Dans le cas particulier où la classe $\mathfrak{F}$ se compose d'une seule opération F, les th. A et B donnent les corollaires suivants:

C. *Si* $F \in \mathfrak{M}$ *et* $I \overset{\circ}{\subset} F$, *on a* $\underset{\mathcal{Cl}(G)}{E}[G \in \mathfrak{B}(\{F\})] = \{\mathcal{Cl}(F)\}$.

D. *Si* $F \in \mathfrak{M}$ *et* $I \overset{\circ}{\subset} F$, *on a* $\underset{\mathcal{Cl}(G)}{E}[G \in \mathfrak{B}(\{C, F\})] =$

$$= \{\mathcal{Cl}(I), \mathcal{Cl}(C), \mathcal{Cl}(F), \mathcal{Cl}(F^*), \mathcal{Cl}(C \overset{\circ}{+} F), \mathcal{Cl}(F \overset{\circ}{+} F^*)\}.$$

On peut en outre supprimer dans le cor. C l'hypothèse: $\boldsymbol{F} \in \mathfrak{M}$, en obtenant ainsi une généralisation du th. 25. En se bornant aux opérations de la classe $\mathfrak{P}(\{\boldsymbol{C}, \boldsymbol{F}\})$ (cf. la déf. 11[b]), le cor. D peut être développé et complété comme suit:

E. [a]) $\mathfrak{P}(\{\boldsymbol{C}, \boldsymbol{F}\}) = \{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{C}\} + \mathfrak{P}(\{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}^*\}) + \underset{\boldsymbol{CG}}{E}\,[\boldsymbol{G} \in \mathfrak{P}(\{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}^*\})]$;

[b]) *si* $\boldsymbol{F} \in \mathfrak{M}$ *et* $\boldsymbol{I} \mathrel{\mathring{\subset}} \boldsymbol{F}$, *on a*

$$\underset{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{G})}{E}\,[\boldsymbol{G} \in \mathfrak{P}(\{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}^*\})] = \{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F}),\ \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F}^*),\ \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F} \mathbin{\mathring{+}} \boldsymbol{F}^*)\} \quad \textit{et}$$

$$\underset{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{CG})}{E}\,[\boldsymbol{G} \in \mathfrak{P}(\{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}^*\})] = (\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \mathbin{\mathring{+}} \boldsymbol{F})\}.$$

Je renonce à donner ici la démonstration de ces théorèmes.

Le théorème suivant mérite d'être cité par son intérêt spécial, bien qu'il n'aura pas d'application dans les considérations ultérieures:

Théorème 29. *Si* $\boldsymbol{F} \in \mathfrak{M}$ *et* $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})$, *on a* $\Pi(\mathcal{K}) \in \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\boldsymbol{X} \in \mathcal{K}$. On a alors notoirement $\Pi(\mathcal{K}) \subset \boldsymbol{X}$; l'opération $\boldsymbol{F}$ étant monotone, on en conclut suivant le lem. 15[a] que $\boldsymbol{F}\Pi(\mathcal{K}) \subset \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. Or, ce raisonnement étant valable pour une classe arbitraire de $\mathcal{K}$, on en obtient la formule:

$$(1) \qquad \boldsymbol{F}\Pi(\mathcal{K}) \subset \prod_{\boldsymbol{X} \in \mathcal{K}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}).$$

Comme d'autre part $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})$, on a conformément à la déf. 16:

$$(2) \qquad \prod_{\boldsymbol{X} \in \mathcal{K}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \subset \prod_{\boldsymbol{X} \in \mathcal{K}} \boldsymbol{X} = \Pi(\mathcal{K}).$$

Les formules (1) et (2) donnent aussitôt: $\boldsymbol{F}\Pi(\mathcal{K}) \subset \Pi(\mathcal{K})$, d'où en raison de la déf. 16

$$\Pi(\mathcal{K}) \in \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F}), \quad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire 30. *Si* $\boldsymbol{F} \in \mathfrak{M}$, *à toute classe d'ensembles* $\boldsymbol{K}$ *correspond une classe* $\boldsymbol{L}$ *vérifiant les formules:* $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})$ *et* $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F}) \subset \boldsymbol{V}(\boldsymbol{L})$.

D é m o n s t r a t i o n. Posons: $\mathcal{K} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})$ et $\boldsymbol{L} = \Pi(\mathcal{K})$. En tenant compte de la déf. 5[c], on conclut tout de suite que $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{K})$ et que $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F}) \subset \boldsymbol{V}(\boldsymbol{L})$; de plus le th. 29 donne: $\boldsymbol{L} \in \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})$. $\boldsymbol{L}$ est donc la classe cherchée.

Il est à noter que l'hypothèse: $\boldsymbol{F} \in \mathfrak{M}$ joue dans les th. 29 et 30 un rôle essentiel; on pourrait néanmoins la supprimer, si l'on avait convenu de désigner par le symbole $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})$ la famille de toutes les classes closes au sens plus étroit par rapport à l'opération $\boldsymbol{F}$ (cf. p. 211).

Conformément au cor. 30, dans l'hypothèse que $\boldsymbol{F}$ est une opération monotone on peut faire correspondre à toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ la plus petite classe $\boldsymbol{L}$ contenant $\boldsymbol{K}$ et close par rapport à $\boldsymbol{F}$. Dans le cas le plus général on n'a que peu à dire sur la nature de cette classe. Ce n'est que dans les hypothèses spéciales que l'on peut établir quelques propriétés plus profondes de la classe L; on a p. ex. le théorème suivant:

Théorème 31. *Si* $\boldsymbol{F} \in \mathfrak{A}_\beta$, *où* $cf(\beta) = \beta$, *et si pour toute classe* $\boldsymbol{X}$ *on a* $\overline{\overline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})}} \leqslant (\overline{\overline{\boldsymbol{X}}})^{\aleph_\beta}$, *alors à toute classe d'ensembles* $\boldsymbol{K}$ *telle que* $\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} \geqslant 2$ *correspond une classe* $\boldsymbol{L}$ *vérifiant les formules:*

$$\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F}), \quad \boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F}) \subset \boldsymbol{V}(\boldsymbol{L}) \quad \textit{et} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{L}}} \leqslant (\overline{\overline{\boldsymbol{K}}})^{\aleph_\beta}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Définissons par recurrence une suite transfinie de classes d'ensembles $\boldsymbol{K}_\xi$ du type ω_β, en posant

$$(1) \qquad \boldsymbol{K}_0 = \boldsymbol{K},$$

$$(2) \qquad \boldsymbol{K}_\xi = \boldsymbol{F}\Big(\sum_{\eta<\xi} \boldsymbol{K}_\eta\Big) \quad \textit{pour } 0 < \xi < \omega_\beta;$$

soit en outre

$$(3) \qquad \boldsymbol{L} = \sum_{\xi<\omega_\beta} \boldsymbol{K}_\xi.$$

Considérons un ensemble arbitraire X tel que

$$(4) \qquad X \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{L}).$$

Comme par hypothèse $\boldsymbol{F} \in \mathfrak{A}_\beta$, le lem. 15[c] donne: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{L}) = \sum_{\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{L})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})$; en vertu de (4) on en conclut qu'il existe une classe d'ensembles $\boldsymbol{Y}$ vérifiant les formules:

$$(5) \qquad X \in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})$$

et $Y \in U_\beta(L)$ ou, en d'autres termes (cf. la déf. 5^b),

(6) $$Y \subset L \quad et \quad \overline{\overline{Y}} < \aleph_\beta.$$

En tenant compte de l'hypothèse et de (3), on obtient de (6): $\overline{\overline{Y}} < \aleph_{cf(\beta)}$ et $Y \subset \sum\limits_{\xi<\omega_\beta} K_\xi$. Conformément au lem. 3^c (pour $B = Y$ $\alpha = \beta$ et $F_\xi = K_\xi$), ces formules impliquent l'existence d'un nombre ordinal ξ tel que

(7) $$0 < \xi < \omega_\beta \quad et \quad Y \subset \sum_{\eta<\xi} K_\eta.$$

L'opération F étant par hypothèse semi-additive, elle est à plus forte raison monotone (lem. 16^a). Par conséquent, d'après le lem. 15^a, les formules (7) entraînent: $F(Y) \subset F\left(\sum\limits_{\eta<\xi} K_\eta\right)$, d'où selon (2) $F(Y) \subset K_\xi$; en vertu de (3) on en obtient:

(8) $$F(Y) \subset L.$$

Les formules (5) et (8) donnent aussitôt:

(9) $$X \in L.$$

Nous avons ainsi montré que (4) entraîne constamment (9). On a donc l'inclusion: $F(L) \subset L$, d'où en raison de la déf. 16 $L \in \mathcal{C}\ell(F)$: comme de plus, selon (1) et (3), $K \subset L$, on parvient à la formule:

(10) $$L \in V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(F).$$

Or, on peut prouver que L est la plus petite classe de la famille $V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(F)$. Envisageons dans ce but une classe arbitraire X telle que

(11) $$X \in V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(F).$$

Par une induction facile on obtient la formule:

(12) $$K_\xi \subset X \quad pour \quad \xi < \omega_\beta.$$

En effet, en vertu de (1) et (11) le nombre $\xi = 0$ vérifie cette formule. Soit donné ensuite un nombre ξ, $0 < \xi < \omega_\beta$, et admettons que tous les nombres $\eta < \xi$ remplissent la formule (12) On a donc

$\sum\limits_{\eta<\xi} K_\eta \subset X$; la fonction F étant monotone (comme il a été dit plus haut), on en conclut à l'aide du lem. 15^a que $F\left(\sum\limits_{\eta<\xi} K_\eta\right) \subset F(X)$, d'où en raison de (2) $K_\xi \subset F(X)$. Comme d'autre part, d'après la déf. 16, la formule (11) donne: $F(X) \subset X$, on en obtient: $K_\xi \subset X$, ce qui veut dire que le nombre ξ remplit également la formule en question.

La formule (12), établie tout à l'heure, implique que $\sum\limits_{\xi<\omega_\beta} K_\xi \subset X$, d'où, selon (3), $L \subset X$. On voit ainsi que la classe L est contenue dans toute classe de la famille $V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(F)$; on a donc

(13) $$V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(F) \subset V(L).$$

En ce qui concerne la puissance des classes K_ξ et L, observons en premier lieu les inégalités:

(14) $$\overline{\overline{K}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$$

et

(15) $$\aleph_\beta \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}},$$

qu'on déduit facilement du lem. $5^{c,d}$ (en tenant compte de l'inégalité: $\overline{\overline{K}} \geqslant 2$).

En appliquant une fois encore le principe de l'induction transfinie, nous allons établir la formule:

(16) $$\overline{\overline{K_\xi}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \quad pour \quad \xi < \omega_\beta.$$

En vertu de (1) et (14),

(17) *le nombre* $\xi = 0$ *vérifie la formule* (16).

Soit ensuite ξ un nombre ordinal tel que

(18) $$0 < \xi < \omega_\beta$$

et supposons que

(19) *tout nombre* η, $\eta < \xi$, *vérifie la formule* (16).

Il résulte de (18) et (19) que $\overline{\overline{\sum\limits_{\eta<\xi} K_\eta}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \cdot \overline{\overline{\xi}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \cdot \aleph_\beta$, d'où, en raison de (15), $\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi} K_\eta}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$. En appliquant le lemme 5[b], on en conclut aussitôt que: $\left(\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi} K_\eta}}\right)^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \leqslant ((\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$. Comme on a par hypothèse: $cf(\beta)=\beta$, le lem. 8[a] (pour $\mathfrak{a}=\overline{\overline{K}}$ et $\gamma=\beta$) donne: $((\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} = (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$, et on obtient finalement la formule:

(20) $$\left(\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi} K_\eta}}\right)^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}.$$

D'autre part, conformément à l'hypothèse du théorème, on a:

$$\overline{\overline{F\left(\sum_{\eta<\xi} K_\eta\right)}} \leqslant \left(\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi} K_\eta}}\right)^{\aleph_\beta},$$

d'où, en raison de (2),

(21) $$\overline{\overline{K_\xi}} \leqslant \left(\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi} K_\eta}}\right)^{\aleph_\beta}.$$

Les inégalités (20) et (21) donnent aussitôt: $\overline{\overline{K_\xi}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$; en d'autres termes

(22) *le nombre ξ vérifie la formule* (16).

Il est ainsi démontré que les conditions (18) et (19) entraînent toujours (22); en tenant compte de (17), on parvient donc à la conclusion que tout nombre $\xi<\omega_\beta$ vérifie la formule (16).

Dé (3) et (16) on déduit facilement: $\overline{\overline{L}} \leqslant \sum_{\xi<\omega_\beta} \overline{\overline{K_\xi}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}} \cdot \aleph_\beta$, d'où en vertu de (15)

(23) $$\overline{\overline{L}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}.$$

Les formules (10), (13) et (23) prouvent que la classe L satisfait à toutes les conditions du théorème.

Il est à noter que dans l'hypothèse: $cf(\beta)<\beta$ l'inégalité: $\overline{\overline{L}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$, qui figure dans la thèse du théorème précédent, doit être remplacée par une inégalité plus faible, à savoir: $\overline{\overline{L}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\aleph_\beta}$.

Le but de cet article étant de déterminer les puissances des familles $\mathcal{Cl}(F)$ d'après la puissance de l'ensemble universel 1 dans les cas de différentes opérations particulières F, notons d'abord que dans le cas général il n'est possible d'établir que les bornes: inférieure et supérieure de ces puissances, comme le montre le théorème suivant, qui est d'ailleurs d'un caractère tout à fait banal:

Théorème 32. *Si* $\overline{\overline{1}}=\aleph_\alpha$, *on a* $1 \leqslant \overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$; *il existe des opérations F telles que* $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}}=1$ *et il en existe aussi des opérations F, p. ex.* $F \overset{\circ}{=} I$, *telles que* $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. En raison du lem. 10[a] on a pour tout ensemble A: $\overline{\overline{U\,U(A)}} = 2^{\overline{\overline{U(A)}}} = 2^{2^{\overline{\overline{A}}}}$, d'où en particulier $\overline{\overline{U\,U(1)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. En rapprochant cette formule des th. 20 et 23[a], on obtient aussitôt: $1 \leqslant \overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ et $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(I)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. Considérons ensuite l'opération F définie par la formule: $F(X)=U(1)$ pour toute classe X. A l'aide de la déf. 16 on vérifie facilement que $\mathcal{Cl}(F)=\{U(1)\}$, donc que $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}}=1$, ce qui achève la démonstration du théorème.

On a d'habitude affaire aux opérations F qui vérifient la formule: $F \overset{\circ}{\subset} U\Sigma$ (c.-à-d. $F(X) \subset U(\Sigma(X))$ pour toute classe X). Or, en se bornant aux opérations de cette sorte et à leurs opérations doubles, on peut établir pour la puissance de $\mathcal{Cl}(F)$ une délimitation plus précise que celle du th. 32, notamment $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ (cf. le th. 49 du § 5).

Théorème 33. $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(F^*)}} = \overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}}$.

Démonstration. La fonction $C(X)$ est biunivoque; si en effet, $C(X)=C(Y)$, on a $CC(X)=CC(Y)$, donc d'après le lem. 18[a] et la déf. 13 on obtient: $X=Y$. Il en résulte que les familles $\mathcal{Cl}(F)$ et $\overline{C}(\mathcal{Cl}(F))$ ont les puissances égales, d'où en raison du th. 26 $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(F^*)}} = \overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}}$, c. q. f. d.

L'importance du théorème précédent pour les problèmes fondamentaux de ces recherches n'éxige pas d'explications.

Lorsqu'il s'agit de déterminer la puissance de la famille $\mathcal{Cl}(F)$ dans divers cas particuliers, le lemme suivant rend parfois des services considérables :

Lemme 34. [a]) *Si* $\mathbf{F}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$ *et* $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$ *et si en outre la classe d'ensembles* $\mathbf{K}$ *vérifie la formule:* $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \underset{\mathbf{X}}{\dot{E}}[\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}]$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\mathbf{F})}} \geqslant 2^{\overline{\overline{\mathbf{K}}}}$

[b]) *si d plus* $\overline{\overline{\mathit{1}}} = \aleph_\alpha$ *et* $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = 2^{\aleph_\alpha}$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\mathbf{F})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration [a]) Considérons deux classes $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ assujetties aux conditions:

(1) $$\mathbf{X} \in \mathbf{U}(\mathbf{K}), \quad \mathbf{Y} \in \mathbf{U}(\mathbf{K})$$

et

(2) $$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{Y}).$$

Suivant l'hypothèse les formules (1) donnent:

(3) $$\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{Y}.$$

Comme $\mathbf{I} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{F}$, on a d'après le lém. 17[f] $\mathbf{X} \subset \mathbf{F}(\mathbf{X})$ et $\mathbf{Y} \subset \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, donc en vertu de (1) $\mathbf{X} \subset \mathbf{K}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X})$ et $\mathbf{Y} \subset \mathbf{K}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{Y})$; en tenant compte de (3), on en conclut que

(4) $$\mathbf{K} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{Y}).$$

De (2) et (4) on obtient aussitôt l'égalité:

(5) $$\mathbf{X} = \mathbf{Y}.$$

Ainsi les formules (1) et (2) entraînent constamment (5). Il en résulte que la fonction $\mathbf{F}$ transforme d'une façon biunivoque la famille $\mathbf{U}(\mathbf{K})$ en $\overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{U}(\mathbf{K})$; ces familles sont donc de puissance égale, d'où en raison du lem. 10[a]

(6) $$\overline{\overline{\overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{U}(\mathbf{K})}} = 2^{\overline{\overline{\mathbf{K}}}}$$

D'autre part l'inclusion évidente: $\mathbf{K} \subset \mathbf{U}(\mathit{1})$ implique que $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{U}\,\mathbf{U}(\mathit{1})$ et $\overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{U}\,\mathbf{U}(\mathit{1})$; à l'aide du th. 23[d] et en vertu de l'hypothèse nous en concluons que

(7) $$\overline{\mathbf{F}}\,\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \mathcal{C}\ell(\mathbf{F}).$$

Les formules (6) et (7) donnent aussitôt:

$$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\mathbf{F})}} \geqslant 2^{\overline{\overline{\mathbf{K}}}}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

[b]) résulte facilement de [a]) et du th. 32.

Il serait désirable d'avoir les généralisations de ce lemme, dans lesquelles les conditions qui concernent l'opération $\mathbf{F}$ (surtout la condition: $\mathbf{F}^2 \overset{\circ}{=} \mathbf{F}$) soient remplacées par des conditions moins restrictives.

Quant aux opérations $\mathbf{F}$ qui sont simultanément itératives, adjonctives et monotones, on peut démontrer l'équivalence des formules: $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \underset{\mathbf{X}}{E}[\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}]$ et $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \cdot \underset{\mathbf{X}}{E}[\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{K})] = \{\mathbf{K}\}$, dont la première figure dans l'hypothèse du lem. 34; les classes $\mathbf{K}$ qui vérifient la deuxième formule pourraient être appelées *irréductibles par rapport à l'opération* $\mathbf{F}$. Il est aisé d'apercevoir que toute sous-classe $\mathbf{X}$ d'une classe $\mathbf{K}$ remplissant l'hypothèse du lem. 34[a] remplit également cette hypothèse; cette remarque est de nature à faciliter la détermination de la puissance de la famille des classes de cette sorte.

Le lem. 34 fournit une méthode de déterminer la puissance de la famille $\mathcal{C}\ell(\mathbf{F})$ dans le cas où l'opération $\mathbf{F}$ est itérative et adjonctive. Cette méthode, dont j'aurai à faire l'usage plusieurs fois, consiste dans la construction d'une classe $\mathbf{K}$ remplissant les hypothèses du lem. 34[a] et ayant en outre la plus haute puissance possible, c.-à-d. $2^{\aleph_\alpha}$ (où $\overline{\overline{\mathit{1}}} = \aleph_\alpha$); il résulte alors du lem. 34[b] que la famille $\mathcal{C}\ell(\mathbf{F})$ est aussi de la plus haute puissance possible, c.-à-d. $2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Il est manifeste que cette méthode n'est pas toujours appliquable: elle est en défaut dans tous les cas où chaque classe $\mathbf{K}$ assujettie aux conditions du lemme, et que nous savons construire, est de la puissance $< 2^{\aleph_\alpha}$. Bien qu'il soit encore possible dans ce cas d'obtenir à l'aide du lem. 34[a] une délimitation inférieure de la puissance de $\mathcal{C}\ell(\mathbf{F})$, il est plus facile d'ordinaire parvenir à ce résultat par une autre voie. Ainsi, dans le cas général, la classe vide peut être la seule classe $\mathbf{K}$ qui vérifie la formule: $\mathbf{U}(\mathbf{K}) \subset \underset{\mathbf{X}}{E}[\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}]$; le lem. 34[a] ne donne alors qu'une délimitation banale: $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\mathbf{F})}} \geqslant 1$. Dans l'hypothèse que $\mathbf{F} \overset{\circ}{\subset} \mathbf{U}\,\boldsymbol{\Sigma}$, cette formule est remplie, comme on voit facilement, par toute classe d'ensembles disjoints. Par conséquent, il y a parmi les classes considérées des classes de puissance $\aleph_\alpha$, p. ex. $\mathbf{K} = \overline{J}(\mathit{1}) = \underset{\{x\}}{E}[x \in \mathit{1}]$, d'où en raison du lem. 34[a] $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\mathbf{F})}} \geqslant 2^{\aleph_\alpha}$; or, la même délimitation sera obtenue dans le th. 49 du § 5 par une voie plus simple.

La méthode qui vient d'être décrite sera employée tout de suite pour déterminer la puissance de la famille $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C})$.

Lemme 35. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *il existe une classe d'ensembles* $\boldsymbol{K}$ *vérifiant les formules*: $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K}) \subset \underset{\boldsymbol{X}}{E}[\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{X}]$ *et* $\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Démonstration. Considérons un élément arbitraire a de 1 et posons:

(1) $$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{U}(1 - \{a\}).$$

Il résulte de (1) que pour tout ensemble Y la formule: $Y \epsilon \boldsymbol{K}$ entraîne: $a \epsilon 1 - Y$, donc $1 - Y \overline{\epsilon} \boldsymbol{K}$. Comme d'après la déf. 15 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) = \underset{1-Y}{E}[Y \epsilon \boldsymbol{X}]$, on en conclut que pour toute classe $\boldsymbol{X}$ contenue dans $\boldsymbol{K}$ on a $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) = 0$ et a fortiori $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{X}$. Par conséquent

(2) $$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K}) \subset \underset{\boldsymbol{X}}{E}[\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{X}].$$

On a ensuite $\overline{\overline{1-\{a\}}} = \aleph_\alpha - 1 = \aleph_\alpha$; la formule (1) donne donc en vertu du lem. 10ª:

(3) $$\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

En raison de (2) et (3), $\boldsymbol{K}$ est la classe cherchée.

Théorème fondamental I. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{K}$ une classe arbitraire remplissant la thèse du lemme précédent. Conformément aux déf. 9ª et 13 on a: $\boldsymbol{K}\cdot[\boldsymbol{I} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{C}](\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})) \subset \boldsymbol{X} + \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{X}$ pour $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{K}$; par conséquent, on peut transformer les formules du lem. 35 de la façon suivante:

(1) $$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K}) \subset \underset{\boldsymbol{X}}{E}[\boldsymbol{K}\cdot[\boldsymbol{I} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{C}](\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{X}] \quad et \quad \overline{\overline{\boldsymbol{K}}} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

L'opération $\boldsymbol{I} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{C}$ étant évidemment adjonctive ($\boldsymbol{I} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{I} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{C}$) et de plus itérative (comme le prouve le lem. 18ᶜ), on peut appliquer le lem. 34ᵇ, en y posant: $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{I} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{C}$; en vertu de (1) on en obtient:

(2) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{I} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{C})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Comme, en raison du th. 23ᵇ, $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{I} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{C}) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C})$, la formule (2) donne:

$$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Ce sont exclusivement les ensembles infinis qui nous intéressent ici, bien que plusieurs modes de raisonnement, de même que certains résultats, se prêtent après des modifications convenables à des extensions aux ensembles finis. Il est à remarquer en particulier que dans le th. 32 et le lem. 34 le nombre $\aleph_\alpha$ peut être remplacé par un nombre cardinal $\mathfrak{a}$ tout à fait arbitraire. Quant au th. fond. I, on peut l'étendre aux nombres finis sous la forme suivante:

$$Si \quad \overline{\overline{1}} = \mathfrak{a} > 0, \quad on\ a \quad 2^{2^{\mathfrak{a}-1}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C})}} \leqslant 2^{2^{\mathfrak{a}}}.$$

§ 4. Opération $\boldsymbol{T}$. Classes d'ensembles héréditaires.

A partir de ce § nos recherches ne concernent que des opérations spéciales.

L'opération qui sera mise au premier plan et que je vais désigner par $\boldsymbol{T}$ consiste à ajouter à une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ donnée tous les sous-ensembles des éléments de cette classe. Les classes d'ensembles closes par rapport à cette opération peuvent être appelées dans le language ordinaire *classes héréditaires*.

Définition 17. $$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) = \sum_{\boldsymbol{X} \epsilon \boldsymbol{K}} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}).$$

Notons les propriétés suivantes de l'opération $\boldsymbol{T}$:

Théorème 36. ª) $\boldsymbol{T} \epsilon \mathfrak{A}$, *donc* $\boldsymbol{T} \epsilon \mathfrak{A}_\beta$ *et* $\boldsymbol{T} \epsilon \mathfrak{M}$;

ᵇ) $\boldsymbol{T}^2 \overset{\circ}{=} \boldsymbol{T}$ *et* $\boldsymbol{I} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{T}$;

ᶜ) $\boldsymbol{T}(0) = 0$;

ᵈ) $\boldsymbol{T}(\{A\}) = \boldsymbol{U}(A)$, *en particulier* $\boldsymbol{T}(\{0\}) = \{0\}$;

ᵉ) *si* $\boldsymbol{K} \neq 0$, *on a* $0 \epsilon \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$;

ᶠ) *si* $1 \epsilon \boldsymbol{K}$, *on a* $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{U}(1)$;

ᵍ) $\underset{\{x\}}{E}[x \epsilon \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{K})] \subset \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$;

ʰ) *si* $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{K}) \epsilon \boldsymbol{K}$, *on a* $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{K})$.

Démonstration est évidente.

En dehors de l'opération $\boldsymbol{T}$, c'est l'opération $\boldsymbol{T}^*$, double de $\boldsymbol{T}$, qui va nous occuper ici; comme nous allons le voir, elle consiste à ajouter à une classe $\boldsymbol{K}$ donnée tous les sur-ensembles des éléments de cette classe.

Théorème 37. $\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{K}) = \sum_{X \epsilon \boldsymbol{K}} \boldsymbol{V}(X)$.

Démonstration résulte des déf. 15 et 17.

Certaines propriétés de l'opération $\boldsymbol{T}^*$ se laissent déduire aisément à l'aide du lem. 19 des propriétés correspondantes de l'opération $\boldsymbol{T}$ qui viennent d'être formulées dans le th. $36^{a,b,c}$. Je vais donner ici quelques autres propriétés de $\boldsymbol{T}^*$.

Théorème 38. [a]) *Si* $\boldsymbol{K} \neq 0$, *on a* $1 \epsilon \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{K})$;

[b]) *si* $0 \epsilon \boldsymbol{K}$, *on a* $\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{V}(0) = \boldsymbol{U}(1)$;

[c]) *quelles que soient les classes* $\boldsymbol{K}$ *et* $\boldsymbol{L}$, *les trois formules*: $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{L} = 0$, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{L}) = 0$ *et* $\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{L}) = 0$ *sont équivalentes*;

[d]) $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*(0) = 0 = \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}(0)$; $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{U}(1) = \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$ *pour* $\boldsymbol{K} \neq 0$;

[e]) $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^* \overset{\circ}{=} \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*$;

[f]) *pour que* $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*$, *il faut et il suffit que* $\boldsymbol{F}(0) = 0$.

Démonstration. Les conditions [a]) et [b]) s'obtiennent aussitôt du th. 37.

[c]) Supposons que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{L}) \neq 0$; soit p. ex. $Z \epsilon \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{L})$. D'après la déf. 17 et le th. 37, il existe donc des ensembles X et Y tels que $X \epsilon \boldsymbol{K}$, $Y \epsilon \boldsymbol{L}$ et $Y \subset Z \subset X$, d'où $Y \subset Z$. En appliquant une fois encore la déf. 17 et le th. 37, on en obtient: $X \epsilon \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{L})$ et $Y \epsilon \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{L}$; par conséquent $\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{L}) \neq 0$ et $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{L} \neq 0$.

On conclut de ce raisonnement par contraposition que chacune des formules: $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{L} = 0$ et $\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{L}) = 0$ entraîne: $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{L}) = 0$. En tenant compte des inclusions: $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$ et $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{L})$ (que l'on déduit du th. 36^b à l'aide des lem. 19^j et 17^f), on se convaint sans peine que les implications inverses se présentent aussi. Les trois formules sont donc équivalentes, c. q. f. d.

[d]) En vertu du th. 36^c et du lem. 19^k on obtient: $\boldsymbol{T}(0) = 0 = \boldsymbol{T}^*(0)$, donc $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*(0) = 0 = \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}(0)$. Si par contre $\boldsymbol{K} \neq 0$, on a $1 \epsilon \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{K})$ et $0 \epsilon \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$ (th. 38^a et 36^c), d'où en raison des th. 36^f ét 38^b: $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{U}(1) = \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$. Les formules [d]) sont ainsi établies.

[e]) et [f]) résultent de [d]) et du lem. 18^d.

Deux opérations arbitraires $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ qui remplissent la condition suivante: *les formules* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{Y} = 0$ *et* $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{Y}) = 0$ *sont équivalentes pour toutes deux classes* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$, peuvent être appelées *conjuguées*; conformément au th. 38^c, $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}^*$ sont donc des opérations conjuguées. J'avais démontré à ce propos le théorème général suivant [1]):

L'additivité totale d'une opération $\boldsymbol{F}$ *donnée est une condition à la fois nécéssaire et suffisante pour que* $\boldsymbol{F}$ *admette une opération conjuguée.*

J'ai omis, bien entendu, dans les th. 36 et 38 plusieurs propriétés élémentaires des opérations $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}^*$ dont je ne ferai pas usage dans la suite, comme p. ex. $\boldsymbol{T} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{T}^* \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Pi}$; $\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{T} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{T} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{\Pi}$; $\overline{\overline{\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{K})}} \leqslant \overline{\overline{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})}} \leqslant 2^{\overline{\overline{\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{K})}}}$; $\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{J} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{V}$; $\mathfrak{P}(\{\boldsymbol{C}, \boldsymbol{T}\}) = \{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^*, \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^*, \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*\}$ et $\mathfrak{B}(\{\boldsymbol{C}, \boldsymbol{T}\}) = \mathfrak{S}\mathfrak{P}(\{\boldsymbol{C}, \boldsymbol{T}\})$. De plus, certaines formules que l'on trouve dans les théorèmes précédents peuvent être mises dans une autre forme, moins intuitive, mais plus concise, p. ex.: $\boldsymbol{T} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{\Sigma}\overline{\boldsymbol{U}}$ (déf. 17), $\boldsymbol{T}\boldsymbol{J} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{U}$ (th. 36^d), $\overline{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{\Sigma} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{T}$ (th. 36^g) et $\boldsymbol{T}^* \overset{\circ}{=} \boldsymbol{\Sigma}\overline{\boldsymbol{V}}$ (th. 37); cf. ici les remarques de la p. 209.

Il est remarquable que les deux opérations $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}^*$ satisfont à tous les postulats que M. Kuratowski a admis dans sa Thèse pour l'opération de *fermeture* [2]); comme une autre opération de cette nature on peut citer $\boldsymbol{I} \overset{\circ}{+} \overline{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{\Sigma}$.

Ce sont des classes closes par rapport aux opérations $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}^*$ qui seront étudiées dans la suite de ce §.

Théorème 39. $\mathcal{Cl}(\boldsymbol{T}^*) = \underset{\boldsymbol{U}(1) - \boldsymbol{X}}{E} [\boldsymbol{X} \epsilon \mathcal{Cl}(\boldsymbol{T})]$.

Démonstration. Le th. 38^c, si l'on y pose: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{U}(1) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$, donne: $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{U}(1) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})) = 0$; la fonction $\boldsymbol{T}^*$ admettant comme valeurs des classes d'ensembles, on a en outre évidemment $\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{U}(1) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})) \subset \boldsymbol{U}(1)$. Par conséquent,

(1) $$\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{U}(1) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})) \subset \boldsymbol{U}(1) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}).$$

[1]) Cf. ma communication: *Sur quelques propriétés caractéristiques des images d'ensembles* dans les *Comptes-rendus des séances de la Soc. Pol. de Math. Section de Varsovie*, Ann. de la Soc. Pol. de Math. VI, p. 127—128.

[2]) *Sur l'opération $\overline{A}$ d'Analysis Situs*, Fund. Math. III, p. 182—199.

En vertu du th. 36^b et du lem. 19^j on obtient:

$$(2) \qquad I \dot{\subset} T^*,$$

d'où suivant le lem. 17^f (pour $F \overset{\circ}{=} T^*$)

$$U(1) - T(K) \subset T^*(U(1) - T(K));$$

en rapprochant cette inclusion de (1), on conclut aussitôt que

(3) $T^*(U(1) - T(K)) = U(1) - T(K)$ *pour toute classe* K.

D'une façon tout à fait analogue on établit la formule:

(4) $T(U(1) - T^*(L)) = U(1) - T^*(L)$ *pour toute classe* L.

Or, soit X une classe arbitraire de $\mathcal{C}\ell(T)$ et $Y = U(1) - X$. En raison des th. 23^c (pour $F = T$) et 36^b on a $T(X) = X$; en posant dans la formule (3): $K = X$, on en obtient: $T^*(Y) = Y$, donc, d'après la déf. 16, $Y \epsilon \mathcal{C}\ell(T^*)$. A l'aide des formules (2) et (4) on prouve de même qu'à toute classe Y de $\mathcal{C}\ell(T^*)$ vient correspondre une classe X (à savoir $X = U(1) - Y$) telle que $Y = U(1) - X$ et $X \epsilon \mathcal{C}\ell(T)$.

Nous avons ainsi établi l'équivalence des deux conditions suivantes: (a) $Y \epsilon \mathcal{C}\ell(T^*)$ et (b) *il existe une classe* X *vérifiant les formules*: $Y = U(1) - X$ *et* $X \epsilon \mathcal{C}\ell(T)$. Il en résulte immediatement l'identité cherchée:

$$\mathcal{C}\ell(T^*) = \underset{U(1)-X}{E}[X \epsilon \mathcal{C}\ell(T)].$$

$\mathcal{H}$ étant une famille de classes, posons, par analogie complète avec la déf. 15: $\mathcal{C}(\mathcal{H}) = \underset{U(1)-X}{E}[X \epsilon \mathcal{H}]$; le th. 39 prend alors la forme suivante: $\mathcal{C}\ell(T^*) = \mathcal{C}(\mathcal{C}\ell(T))$. Il est instructif de rapprocher cette identité de celle qui s'obtient comme cas particulier du th. 26: $\mathcal{C}\ell(T^*) = \overline{C}(\mathcal{C}\ell(T))$; malgré la ressemblance extérieure de ces deux formules, l'une exprime une propriété spécifique de l'operation T, pendant que l'autre résulte des propriétés les plus générales de la notion d'opération double.

Pour examiner la puissance des familles $\mathcal{C}\ell(T)$ et $\mathcal{C}\ell(T^*)$, il faut rappeler au préalable le lemme suivant, dû à M. Knaster [1]), mais formulé ici dans les termes un peu différents:

[1]) Cf. C. Kuratowski, *Sur la puissance des „nombres de dimension" au sens de M. Fréchet*, Fund. Math. VIII, p. 205, note [1]).

Lemme 40. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *il existe une classe d'ensembles* K *vérifiant les formules*: $U(K) \subset \underset{X}{E}[K \cdot T(X) \subset X]$, $U(K) \subset \underset{X}{E}[K \cdot T^*(X) \subset X]$ *et* $\overline{\overline{K}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Démonstration de ce lemme étant connue [1]), je me borne à en ésquisser la marche générale.

La formule: $\aleph_\alpha = 2 \cdot \aleph_\alpha$ implique l'existence d'un ensemble A tel que $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{1 - A}} = \aleph_\alpha$. On en conclut qu'il existe une fonction f qui transforme de façon biunivoque l'ensemble A en son complémentaire $1 - A$: $f(A) = 1 - A$. Posons $F(X) = X + f(A - X)$ pour $X \subset A$ et $K = \overline{F}\,U(A)$. Il est aisé à démontrer que les formules $Y \epsilon K$, $Z \epsilon K$ et $Z \subset Y$ entraînent constamment: $Y = Z$, donc que $K \cdot U(Y) = \{Y\}$ et $K \cdot V(Z) = \{Z\}$ pour tous ensembles Y et Z de la classe K. On en obtient à l'aide de la déf. 17 et du th. 37: $K \cdot T(X) = K \cdot \sum\limits_{Y \epsilon X} U(Y) = \sum\limits_{Y \epsilon X} K \cdot U(Y) = \sum\limits_{Y \epsilon X} \{Y\} = X$ et d'une manière semblable: $K \cdot T^*(X) = X$ pour toute sous-classe X de K. Par conséquent, la classe K vérifie les formules: $U(K) \subset \underset{X}{E}[K \cdot T(X) \subset X]$ et $U(K) \subset \underset{X}{E}[K \cdot T^*(X) \subset X]$.

D'autre part, on voit facilement que la fonction F est biunivoque, donc que la classe $U(A)$ est de puissance égale à celle de son image $\overline{F}\,U(A) = K$; en vertu du lem. 10^a on en conclut que $\overline{\overline{K}} = 2^{\overline{\overline{A}}} = 2^{\aleph_\alpha}$. Ainsi K est la classe cherchée.

Comme conséquence facile du lemme précédent on obtient le

Théorème fondamental II. *Si* $1 = \aleph_\alpha$, *on a*

$$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Démonstration. En raison du lem. $19^{f,j}$, l'opération T étant itérative et adjonctive (th. 36^b), l'opération double T^* l'est également. On peut donc appliquer à deux reprises le lem. 34^b, en y posant: $F \overset{\circ}{=} T$ et puis $F \overset{\circ}{=} T^*$; en tenant compte du lem. 40, on parvient aussitôt à la formule cherchée: $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Ce théorème a été acquis par l'auteur de cet ouvrage en collaboration avec M. Lindenbaum.

[1]) Cf. la note précédente.

En analysant la démonstration du théoréme précédent, on obtient un théorème un peu plus général, qui est appliquable au cas d'ensembles finis.

Si $\overline{\overline{I}} = \mathfrak{a}$, *on a* $2^{2^{E\left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T})}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T}^*)}} \leqslant 2^{2^{\mathfrak{a}}}$ *(le symbole* $E\left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)$ *désignant le plus grand des nombres* $\mathfrak{x}$ *qui vérifient la formule:* $2 \cdot \mathfrak{x} \leqslant \mathfrak{a}$).

Il est à noter que la formule: $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T})}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T}^*)}}$ établie dans le th. fond. II s'obtient facilement du th. 39; d'ailleurs elle ne présente qu'un cas particulier du th. 33.

Quant aux classes closes par rapport aux deux opérations $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}^*$ à la fois, on a le suivant

Théorème 41. [a]) $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^*) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^*) = \{0, \boldsymbol{U}(1)\}$;

[b]) *si* $\boldsymbol{H}(0) = 0$, *on a* $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{H}) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^* \overset{\circ}{+} \boldsymbol{H}) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^* \overset{\circ}{+} \boldsymbol{H}) = \{0, \boldsymbol{U}(1)\}$.

Démonstration. [a]) En vertu du th. 36[a,b], on peut faire appel au th. 28[a] (pour $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{T}$); en tenant compte du th. 38[e], on en conclut que $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^*) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*)$. De même, en posant dans le th. 24[d]: $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{G} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{T}^*$, on obtient en raison du th. 36[a,b] et du lem. 19[i]: $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^*) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*)$. Or, si l'on rapproche du th. 38[d] la déf. 16, on se convaint sans peine qu'il n'y a que deux classes d'ensembles closes par rapport à l'opération $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*$, à savoir 0 et $\boldsymbol{U}(1)$: $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*) = \{0, \boldsymbol{U}(1)\}$. On parvient ainsi à la formule [a]) cherchée:

$$\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^*) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^*) = \{0, \boldsymbol{U}(1)\}.$$

[b]) Conformément à la déf. 16, la formule: $\boldsymbol{F}(0) = 0$ donne: $0 \in \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{H})$; comme en outre, d'après le th. 20, $\boldsymbol{U}(1) \in \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{H})$, on obtient: $\{0, \boldsymbol{U}(1)\} \subset \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{H})$. D'autre part, le th. 21[b] (pour $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{G} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{H}$) entraîne: $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{H}) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{H})$, d'où en vertu de la formule [a]): $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{H}) = \{0, \boldsymbol{U}(1)\} \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{H})$. On en conclut aussitôt que $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{H}) = \{0, \boldsymbol{U}(1)\}$; les autres parties de la formule [b]) s'obtiennent d'une façon analogue.

Comme la formule $\boldsymbol{H}(0) = 0$ est remplie par toutes les opérations dont nous avons affaire ici, le théorème qui vient d'être établi nous permet de négliger dans les recherches ultérieures les opérations de la forme $\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^* \overset{\circ}{+} \boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^* \overset{\circ}{+} \boldsymbol{H}$.

Théorème fondamental III. $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T})}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^*)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^*)}} = 2$.

C'est une conséquence immédiate du th. 41[a].

Nous laissons au lecteur d'examiner les propriétés de l'opération $\boldsymbol{T}^{\times}$ (c.-à-d. de la deuxième opération double de $\boldsymbol{T}$; cf. la fin du § 2) et en particulier d'établir les théorèmes suivants:

A. *Si* $\overline{\overline{I}} = \aleph_\alpha$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T}^{\times})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ *et* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^{\times})}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

B. $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^{\times}) = \{0, \boldsymbol{U}(1)\}$ *et* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{T}^{\times})}} = 2$.

§ 5. Opération $\boldsymbol{S}$. Classes d'ensembles additives.

Je passe à l'opération $\boldsymbol{S}$ qui consiste à former tous les ensembles-sommes de sous-classes quelconques d'une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ donnée; les classes closes par rapport à cette opération seront appelées parfois *classes additives.*

Définition 18. $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}) = \overline{\Sigma}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K}) - \{0\})$.

L'opération $\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{K}) = \overline{\Sigma}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K}))$, qui parait plus naturelle, est moins commode à cause de la propriété: $0 \in \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{K})$, qui se présente pour tout $\boldsymbol{K}$, donc même pour $\boldsymbol{K} = 0$. En conséquence les th. 42[c,d] et 43[d,e] seraient en défaut.

Certaines propriétés élémentaires de l'opération $\boldsymbol{S}$ sont données dans le suivant

Théorème 42. [a]) $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{M}$;

[b]) $\boldsymbol{S}^2 \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}$ *et* $\boldsymbol{I} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{S}$;

[c]) $\boldsymbol{S}(0) = 0$;

[d]) $\Sigma\, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}) = \Sigma(\boldsymbol{K})$ *et* $\Pi\, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}) = \Pi(\boldsymbol{K})$;

[e]) *si* $\boldsymbol{K} \neq 0$, *on a* $\Sigma(\boldsymbol{K}) \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})$;

[f]) *si* $\boldsymbol{K} \neq 0$ *et* $\underset{\{x\}}{E}[x \in \Sigma(\boldsymbol{K})] \subset \boldsymbol{K}$, *on a* $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{U}\Sigma(\boldsymbol{K})$;

[g]) $\overline{\overline{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})}} \leqslant 2^{\overline{\overline{\boldsymbol{K}}}}$.

Démonstration est tout à fait élémentaire. En particulier, la formule: $\boldsymbol{S}^2 \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}$ de [b]) se déduit facilement de la loi associative générale d'addition des ensembles à l'aide de l'axiome du choix. Si l'on veut cependant éviter ici l'usage de cet axiome, il suffit de remarquer qu'il est possible de définir d'une façon effective une fonction $\boldsymbol{F}$ faisant correspondre à tout ensemble X de $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})$ une classe d'ensembles $\boldsymbol{F}(X)$ telle que $\boldsymbol{F}(X) \subset \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{F}(X) \neq 0$ et $X = \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}(X)$; on pose notamment: $\boldsymbol{F}(X) = \sum_{Y \subset \boldsymbol{K} \text{ et } \boldsymbol{\Sigma}(Y) = X} Y$. Cette fonction étant en outre biunivoque, son existence entraîne selon le lem. 10[a] la formule [g]).

Je vais établir à présent quelques relations qui existent entre l'opération $\boldsymbol{S}$ et les opérations $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}^*$ examinées dans le § précédent.

Théorème 43. [a]) *$\boldsymbol{TS}(0) = 0 = \boldsymbol{ST}(0)$; si $\boldsymbol{K} \neq 0$, on a $\boldsymbol{TS}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{U\Sigma}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{ST}(\boldsymbol{K})$;*

[b]) *$\boldsymbol{TS} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{ST}$;*

[c]) *pour que $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{TS}$, il faut et il suffit que $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{U\Sigma}$ et que $\boldsymbol{F}(0) = 0$;*

[d]) *$\boldsymbol{S} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{T}^*$;*

[e]) *$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{L}) \subset \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{L})$ pour toutes deux classes $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{S}[\boldsymbol{F} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{G}] \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{F} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}\boldsymbol{G}$ pour toutes deux opérations $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$).*

D é m o n s t r a t i o n. [a]) Les th. 36[c] et 42[c] donnent aussitôt: $\boldsymbol{TS}(0) = 0 = \boldsymbol{ST}(0)$. Si par contre $\boldsymbol{K} \neq 0$, on a en vertu des th. 42[e] et 36[g]: $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{K}) \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})$ et $\underset{\{x\}}{E}[x \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{K})] \subset \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$, d'où d'après les th. 36[h] et 42[f]: $\boldsymbol{TS}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{U\Sigma}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{ST}(\boldsymbol{K})$. Les formules [a]) sont donc établies.

[b]) et [c]) s'obtiennent tout de suite de [a]). Les formules [d]) et [e]) résultent facilement de la déf. 18 et du th. 37.

Comme il a été dit (p. 209), l'opération $\boldsymbol{I}$ constitue dans un certain sens la borne inférieure de la plupart des operations qui nous occupent dans cet ouvrage; or, l'opération $\boldsymbol{TS}$ envisagée dans le théorème précédent en constitue dans le même sens la borne supérieure. Les opérations $\boldsymbol{F}$ qui vérifient l'inclusion: $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{TS}$ (ou, si l'on veut, l'inclusion un peu plus générale: $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{U\Sigma}$) peuvent être appelées *intrinsèques*.

Il mérite d'être noté qu'il y a des opérations intrinsèques $\boldsymbol{F}$, comme p. ex. $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{T}$, dont les opérations doubles $\boldsymbol{F}^*$ ne le sont pas. On connaît cependant un nombre des opérations qui sont intrinsèques avec leurs doubles et que l'on pourrait appeler pour cette raison *intrinsèques au sens strict*; telles sont p. ex. l'opération $\boldsymbol{S}$ et les opérations qui seront définies dans le § 6. On voit facilement que les opérations $\boldsymbol{F}$ de cette sorte sont caracterisées par les formules: $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{TS}$ et $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{S}^*$ (ou, ce qui revient au même, par les formules: $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{U\Sigma}$ et $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{V\Pi}$). Il est enfin à remarquer que la propriété d'être une opération intrinsèque subsiste, si l'on passe de $\boldsymbol{F}$ à l'opération $\boldsymbol{F}^{\times}$ mentionnée à la fin du § 2.

Le théorème suivant, qui ne présente d'ailleurs qu'une conséquence immédiate des déf. 15 et 18 et des lois bien connues de D e M o r g a n, caractérise l'opération $\boldsymbol{S}^*$, double de $\boldsymbol{S}$:

Théorème 44. *$\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K}) = \overline{\boldsymbol{\Pi}}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K}) - \{0\})$.*

On voit ainsi que l'opération $\boldsymbol{S}^*$ consiste à former tous les produits possibles des ensembles d'une classe $\boldsymbol{K}$ donnée. Vu l'importance de cette opération, on pourrait la désigner par un signe spécial, p. ex. $\boldsymbol{P}$; les classes d'ensembles closes par rapport à $\boldsymbol{S}^*$ peuvent être appelées *classes multiplicatives.*

Nous ferons appel dans la suite aux diverses propriétés de l'opération $\boldsymbol{S}^*$ qu'on déduit des th. 42[a–c] et 43[b,d,e] par l'application du lem. 19. Considérons en outre les propriétés suivantes qui résultent immédiatement du th. 44 (et de la déf. 17):

Théorème 45. [a]) *$\boldsymbol{\Sigma S}^*(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{K})$ et $\boldsymbol{\Pi S}^*(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{K})$;*

[b]) *si $\boldsymbol{K} \neq 0$, on a $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{K}) \in \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$; en particulier, si $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{K}) = 0$, on a $0 \in \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$* [1]);

[c]) *$\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{L}) \subset \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{L})$ pour toutes deux classes $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{S}^*[\boldsymbol{F} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{G}] \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{TF} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*\boldsymbol{G}$ pour toutes deux opérations $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$).*

Dans l'étude approfondie des opérations $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S}^*$ (et surtout dans l'étude des classes d'ensembles qui sont à la fois additives et multiplicatives) une opération auxiliaire $\boldsymbol{M}$ rend des services considérables. Cette opération consiste à former des ensembles d'une

[1]) J'admets ici, comme d'habitude, $\boldsymbol{\Pi}(0) = 1$; la formule $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{K}) = 0$ implique donc que $\boldsymbol{K} \neq 0$.

classe $\boldsymbol{K}$ donnée certains autres ensembles dits *molécules* ou *atomes* de cette classe. En généralisant notamment une notion introduite par M. Fréchet [1]), nous appelons *atome de la classe $\boldsymbol{K}$ relatif à l'élément a de $\Sigma(\boldsymbol{K})$*, en symboles $A_{\boldsymbol{K}}(a)$, la partie commune (le produit) de tous les ensembles de la classe $\boldsymbol{K}$ qui contiennent l'élément a; la classe $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})$ est formée par tous ces atomes $A_{\boldsymbol{K}}(a)$ (où $a \epsilon \Sigma(\boldsymbol{K})$) et de plus par l'ensemble 0 dans le cas où cet ensemble coïncide avec $\Pi(\boldsymbol{K})$.

Définition 19. a) $A_{\boldsymbol{K}}(a) = \prod\limits_{a \epsilon X \epsilon \boldsymbol{K}} X$;

b) $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}) = \overline{A_{\boldsymbol{K}}}(\Sigma(\boldsymbol{K})) + \{0\} \cdot \{\Pi(\boldsymbol{K})\}$.

Quelques propriétés de l'opération $\boldsymbol{M}$, qui sont d'importance pour nos recherches, sont formulées dans le suivant

Théorème 46. a) $\boldsymbol{M} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{S}^*$;

b) $\boldsymbol{M}\boldsymbol{S} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{M} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{M}\boldsymbol{S}^*$;

c) $\boldsymbol{S}\boldsymbol{M} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*$;

d) $\overline{\overline{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})}} \leqslant \overline{\overline{\Sigma(\boldsymbol{K})}} + 1$.

Démonstration. a) Soit $\boldsymbol{K}$ une classe arbitraire d'ensembles. D'après la déf. 19[a], à tout $x \epsilon \Sigma(\boldsymbol{K})$ correspond une classe $\boldsymbol{Y}$ telle que $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{Y} \neq 0$ et $A_{\boldsymbol{K}}(x) = \Pi(\boldsymbol{Y})$, à savoir: $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{V}(\{x\}) \cdot \boldsymbol{K}$. Il en résulte que $\overline{A_{\boldsymbol{K}}}(\Sigma(\boldsymbol{K})) = \underset{A_{\boldsymbol{K}}(x)}{E}[x \epsilon \Sigma(\boldsymbol{K})] \subset \overline{\Pi}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K}) - \{0\})$, d'où, en raison du th. 44, $\overline{A_{\boldsymbol{K}}}(\Sigma(\boldsymbol{K})) \subset \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$. Comme, en outre, suivant le th. 45[b], $\{0\} \cdot \{\Pi(\boldsymbol{K})\} \subset \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$, on en obtient conformément à la déf. 19[b]: $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$ pour toute classe $\boldsymbol{K}$. Par conséquent $\boldsymbol{M} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{S}^*$, c. q. f. d.

b) $\boldsymbol{K}$ étant une classe quelconque, on obtient du th. 42[b] à l'aide des lem. 17[f] et 19[i] les inclusions: $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})$ et $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$, d'où pour tout x:

(1) $$\prod_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})} X \subset \prod_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{K}} X \quad \text{et} \quad \prod_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})} X \subset \prod_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{K}} X.$$

[1]) Cf. *Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits*, Fund. Math. V, p. 210—213 et 217—218.

Considérons un ensemble arbitraire Y tel que $x \epsilon Y \epsilon \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})$. Conformément à la déf. 18, Y se laisse représenter sous la forme $Y = \Sigma(\boldsymbol{L})$ où $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{K}$. On a donc $x \epsilon \Sigma(\boldsymbol{L}) = Y$, ce qui implique l'existence d'un ensemble Z vérifiant les formules: $x \epsilon Z \epsilon \boldsymbol{L}$ et $Z \subset Y$. Par conséquent $\prod\limits_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{K}} X \subset \prod\limits_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{L}} X \subset Z \subset Y$, d'où $\prod\limits_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{K}} X \subset Y$. Or, cette dernière inclusion étant remplie par tout ensemble Y assujetti à la condition $x \epsilon Y \epsilon \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})$, on en conclut que

(2) $$\prod_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{K}} X \subset \prod_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})} X.$$

D'une façon analogue, soit $x \epsilon Y \epsilon \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$. D'après le th. 44, il existe une classe $\boldsymbol{L}$ telle que $Y = \Pi(\boldsymbol{L})$ et $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{K}$. On a donc $x \epsilon Z \epsilon \boldsymbol{K}$ pour tout ensemble Z de $\boldsymbol{L}$, d'où $\prod\limits_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{K}} X \subset Z$. On en obtient ensuite: $\prod\limits_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{K}} X \subset \prod\limits_{Z \epsilon \boldsymbol{L}} Z = \Pi(\boldsymbol{L}) = Y$. Ce raisonnement s'appliquant à tout ensemble Y tel que $x \epsilon Y \epsilon \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$, on parvient à la formule:

(3) $$\prod_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{K}} X \subset \prod_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})} X.$$

Les inclusions (1)—(3) donnent aussitôt: $\prod\limits_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})} X = \prod\limits_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{K}} X = \prod\limits_{x \epsilon X \epsilon \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})} X$, d'où, en raison de la déf. 19[a],

(4) $$A_{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})}(x) = A_{\boldsymbol{K}}(x) = A_{\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})}(x) \ \textit{pour tout élément } x.$$

A l'aide de (4) on déduit de la déf. 19[b] que

(5) $$\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}) = \overline{A_{\boldsymbol{K}}}(\Sigma\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})) + \{0\} \cdot \{\Pi\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})\}, \ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}) = \\ = \overline{A_{\boldsymbol{K}}}(\Sigma(\boldsymbol{K})) + \{0\} \cdot \{\Pi(\boldsymbol{K})\} \ \text{et} \ \boldsymbol{M}\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K}) = \overline{A_{\boldsymbol{K}}}(\Sigma\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})) + \\ + \{0\} \cdot \{\Pi\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})\}.$$

Comme on a en vertu des th. 42[d] et 45[a]: $\Sigma\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}) = \Sigma(\boldsymbol{K}) = \Sigma\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$ et $\Pi\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}) = \Pi(\boldsymbol{K}) = \Pi\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$, les formules (15) entraînent: $\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$ pour toute classe $\boldsymbol{K}$; par conséquent,

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{S} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{M} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{M}\boldsymbol{S}^*, \quad \text{c. q. f. d.}$$

[c]) Envisageons un ensemble arbitraire X tel que

(6) $$X \in \boldsymbol{K} - \{0\}.$$

En vertu de (6) $X \subset \Sigma(\boldsymbol{K})$, donc $\overline{A_{\boldsymbol{K}}}(X) \subset \overline{A_{\boldsymbol{K}}}(\Sigma(\boldsymbol{K}))$, d'où suivant la déf. 19[b]

(7) $$\overline{A_{\boldsymbol{K}}}(X) \subset \boldsymbol{M}(\boldsymbol{K});$$

comme de plus, $X \neq 0$, on a:

(8) $$\overline{A_{\boldsymbol{K}}}(X) \neq 0.$$

En tenant compte de (6), on conclut facilement de la déf. 19[a] que $A_{\boldsymbol{K}}(x) \subset X$ pour tout $x \in X$, donc que

(9) $$\Sigma(\overline{A_{\boldsymbol{K}}}(X)) \subset X.$$

D'autre part la déf. 19[a] implique également que $x \in A_{\boldsymbol{K}}(x)$, quel que soit x, d'où pour tout x de X on a $x \in \Sigma(\overline{A_{\boldsymbol{K}}}(X))$; il en résulte que $X \subset \Sigma(\overline{A_{\boldsymbol{K}}}(X))$. En rapprochant cette inclusion de (9), on en obtient:

(10) $$X = \Sigma(\overline{A_{\boldsymbol{K}}}(X)).$$

Les formules (7), (8) et (10) montrent que l'ensemble X est de la forme $X = \Sigma(\boldsymbol{L})$ où $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})$ et $\boldsymbol{L} \neq 0$; autrement dit, $X \in \overline{\Sigma}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}) - \{0\})$, donc conformément à la déf. 18:

(11) $$X \in \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}).$$

Il est ainsi prouvé que la formule (6) entraîne constamment (11); cette implication peut être évidemment exprimée par la formule:

(12) $$\boldsymbol{K} - \{0\} \subset \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})$$

Passons au cas où $X \in \boldsymbol{K} \cdot \{0\}$. On a alors évidemment $X = 0 = \Pi(\boldsymbol{K})$, donc $X \in \{0\} \cdot \{\Pi(\boldsymbol{K})\}$, d'où en raison de la déf. 19[b]: $X \in \boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})$; comme de plus, en vertu du th. 42[b] et du lem. 17[f], $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})$, on en obtient: $X \in \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})$. Par conséquent

(13) $$\boldsymbol{K} \cdot \{0\} \subset \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}).$$

Les inclusions (12) et (13) donnent aussitôt: $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})$ pour toute classe $\boldsymbol{K}$; conformément aux déf. 13 et 8[b] on a donc

(14) $$\boldsymbol{I} \mathring{\subset} \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}.$$

En posant dans le lem. 17[c]: $\boldsymbol{F} \doteq \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{G} \doteq \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*$, on obtient de (14): $\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^* \mathring{\subset} \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*$. Or, la formule [b]) du théorème considéré, qui a été établie plus haut, implique que $\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^* \doteq \boldsymbol{S}[\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}]\boldsymbol{S}^* \doteq \boldsymbol{S}[\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}^*] \doteq \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}$. On en conclut que

(15) $$\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^* \mathring{\subset} \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}.$$

D'autre part, en vertu de la formule [a]), qui a été de même déjà établie, on a $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}^*$; comme en outre $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{M}$ (th. 42[a]), on en obtient à l'aide de la déf. 12[a]:

(16) $$\boldsymbol{S}\boldsymbol{M} \mathring{\subset} \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*.$$

Les formules (15) et (16) entraînent immédiatement l'identité cherchée:

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{M} \doteq \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*.$$

[d]) Posons dans le lem. 11[a] (qui résulte notoirement de l'axiome du choix): $f \doteq A_{\boldsymbol{K}}$ et $A = \Sigma(\boldsymbol{K})$; on en obtient: $\overline{\overline{\overline{A_{\boldsymbol{K}}}(\Sigma(\boldsymbol{K}))}} \leqslant \overline{\overline{\Sigma(\boldsymbol{K})}}$, d'où d'après la déf. 19[b] $\overline{\overline{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})}} \leqslant \overline{\overline{\overline{A_{\boldsymbol{K}}}(\Sigma(\boldsymbol{K}))}} + \overline{\overline{\{0\} \cdot \{\Pi(\boldsymbol{K})\}}} \leqslant \overline{\overline{\Sigma(\boldsymbol{K})}} + 1$, c. q. f. d.

Les propriétés de l'opération $\boldsymbol{M}$ qui viennent d'être établies trouveront une application intéressante dans la démonstration du suivant

Théorème 47. $\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^* \doteq \boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}$.

D é m o n s t r a t i o n. Le th. 46[b] donne: $\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\boldsymbol{S} \doteq \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}$; à l'aide du th. 46[c] on en conclut que

(1) $$\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S} \doteq \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*.$$

En posant dans le lem. 17[c]: $\boldsymbol{F} \doteq \boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{G} \doteq \boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}$ et en tenant compte du th. 42[b], nous obtenons ensuite: $\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}$, d'où selon (1)

(2) $$\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S} \mathring{\subset} \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*.$$

Par l'application du lem. 19[b,c,e] on déduit successivement de (2): $[\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}]^* \mathring{\subset} [\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*]^*$, $\boldsymbol{S}^{**}\boldsymbol{S}^* \mathring{\subset} \boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}^{**}$ et enfin

(3) $$\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^* \mathring{\subset} \boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}.$$

Les inclusions (2) et (3) donnent aussitôt:

$$\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S} \doteq \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Le théorème précédent se laisse d'ailleurs démontrer par une autre voie, plus naturelle peut-être, mais pas plus simple: au lieu de l'opération $\boldsymbol{M}$, on applique notamment les lois distributives d'addition et de multiplication des ensembles dans leur forme la plus générale. Toutefois on se heurte à certaines difficultés, si l'on tâche d'éviter dans cette nouvelle démonstration l'usage de l'axiome du choix.

Je vais mentionner ici quelques propriétés des opérations $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}^*$ et $\boldsymbol{M}$ qui ont été omises dans les th. 42—47. On peut démontrer que *la formule*: $\boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma} \doteq \boldsymbol{\Sigma}\overline{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{S}$ (c.-à-d. $\boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}(\mathcal{H}) = \sum_{X \epsilon \boldsymbol{S}(\mathcal{H})} \boldsymbol{F}(X)$ *pour toute famille de classes* $\mathcal{H}$) *est une condition à la fois nécessaire et suffisante pour que l'on ait*: $\boldsymbol{F} \epsilon \mathfrak{M}$ *et* $\boldsymbol{F}(0) = 0$; on a donc en particulier: $\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Sigma} \doteq \boldsymbol{\Sigma}\overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{S}$. Le th. 29 du § 3 se laisse formuler de la façon suivante: *si* $\boldsymbol{F} \epsilon \mathfrak{M}$, *on a* $\boldsymbol{S}^*(\mathit{Cl}(\boldsymbol{F})) \subset \mathit{Cl}(\boldsymbol{F})$. On a ensuite: $\boldsymbol{S}\boldsymbol{J} \doteq \boldsymbol{J} \doteq \boldsymbol{S}^*\boldsymbol{J}$; $\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{S}^*(0) = 0 = \boldsymbol{S}^*\boldsymbol{T}^*(0)$, $\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{S}^*\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{K})$ *pour* $\boldsymbol{K} \neq 0$; $\mathfrak{P}(\{\boldsymbol{C}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}\}) = \{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^*, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^*, \boldsymbol{C}\boldsymbol{S}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*, \boldsymbol{T}\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{C}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*\}$. L'opération $\boldsymbol{M}$ vérifie en outre les formules: $\boldsymbol{M}^2 \doteq \boldsymbol{M}$; $\overline{\boldsymbol{J}}(1) \cdot \boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})$; $\boldsymbol{M}(0) = 0$; $\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{M} \doteq \boldsymbol{\Sigma}$; $\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(0) = 0$, $\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) = \overline{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{K}) + \{0\}$ *pour* $\boldsymbol{K} \neq 0$; $\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} \epsilon \mathfrak{A}$, $[\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}]^2 \doteq \boldsymbol{M}\boldsymbol{T}$; $\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{M} \doteq \boldsymbol{M}$. Il est à noter que $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K})$ n'est pas dans le cas général une classe d'ensembles disjoints.

Passons aux problèmes qui concernent les classes d'ensembles additives et multiplicatives.

Théorème fondamental IV. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *on a* $\overline{\overline{\mathit{Cl}(\boldsymbol{S})}} = \overline{\overline{\mathit{Cl}(\boldsymbol{S}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

D é m o n s t r a t i o n. Le th. 21[a] donne en vertu du th. 43[d]: $\mathit{Cl}(\boldsymbol{T}^*) \subset \mathit{Cl}(\boldsymbol{S})$, d'où d'après le th. fond. I $\overline{\overline{\mathit{Cl}(\boldsymbol{S})}} \geqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(\boldsymbol{T}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. L'inégalité inverse, c.-à-d. $\overline{\overline{\mathit{Cl}(\boldsymbol{S})}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$, résulte immédiatement du th. 32. Comme on a de plus, en raison du th. 33, $\overline{\overline{\mathit{Cl}(\boldsymbol{S})}} = \overline{\overline{\mathit{Cl}(\boldsymbol{S}^*)}}$, on obtient finalement: $\overline{\overline{\mathit{Cl}(\boldsymbol{S})}} = \overline{\overline{\mathit{Cl}(\boldsymbol{S}^*)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$, c. q. f. d.

Ce théorème m'a été communiqué par M. L i n d e n b a u m.

Théorème 48. [a]) $\mathit{Cl}(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}) = \mathit{Cl}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}) = \{0\} + \overline{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}(1)$;
[b]) $\mathit{Cl}(\boldsymbol{T}^* \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*) = \mathit{Cl}(\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{S}^*) = \{0\} + \overline{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}(0) = \{0\} + \overline{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{U}(1)$.

D é m o n s t r a t i o n. [a]) En tenant compte des th. 36[a,b] et 42[b], on obtient du th. 24[d]:

$$\mathit{Cl}(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}) = \mathit{Cl}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}). \tag{1}$$

Envisageons une classe arbitraire $\boldsymbol{Y}$ de $\mathit{Cl}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})$, différente de 0. Conformément à la déf. 16 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Y}) \subset \boldsymbol{Y}$, d'où en raison du th. 43[a] $\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{Y}) \subset \boldsymbol{Y}$; en outre, on a évidemment $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{Y})$ (pour toute classe $\boldsymbol{Y}$). Par conséquent $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{Y})$; la classe $\boldsymbol{Y}$ est donc de la forme $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}(X)$, où $X = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{Y})$ appartient à la classe $\boldsymbol{U}(1)$ (comme ensemble d'individus).

Il résulte de ce raisonnement que $\mathit{Cl}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}) \subset \{0\} + \underset{\boldsymbol{U}(X)}{E}[X \epsilon \boldsymbol{U}(1)]$. Or, d'après la déf. 6 (pour $f \doteq \boldsymbol{U}$ et $A = \boldsymbol{U}(1)$), cette inclusion peut être mise sous la forme:

$$\mathit{Cl}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}) \subset \{0\} + \overline{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}(1). \tag{2}$$

D'autre part, soit $\boldsymbol{Y} \epsilon \{0\} + \overline{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}(1)$. Si $\boldsymbol{Y} \epsilon \{0\}$, on a $\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{Y}$, d'où $\boldsymbol{Y} \epsilon \mathit{Cl}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})$ (th. 43[a], déf. 16). Si, par contre, $\boldsymbol{Y} \epsilon \overline{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}(1)$, il existe un ensemble X tel que $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}(X)$ (et $X \epsilon \boldsymbol{U}(1)$). On en conclut aussitôt que $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}(X) = X$, d'où $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{Y})$ et, suivant le th. 43[a], $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Y})$; en appliquant une fois encore la déf. 16, on en obtient donc de nouveau la formule: $\boldsymbol{Y} \epsilon \mathit{Cl}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})$.

Il est ainsi prouvé que

$$\{0\} + \overline{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}(1) \subset \mathit{Cl}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}). \tag{3}$$

Les formules (1)—(3) entraînent tout de suite:

$$\mathit{Cl}(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}) = \mathit{Cl}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}) = \{0\} + \overline{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}(1), \text{ c. q. f. d.}$$

[b]) A l'aide du th. 26 on obtient facilement de [a]): $\mathit{Cl}([\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}]^*) = \mathit{Cl}([\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}]^*) = \overline{\boldsymbol{C}}(\{0\} + \overline{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}(1))$, d'où en vertu du lem. 19[d,e] $\mathit{Cl}(\boldsymbol{T}^* \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*) = \mathit{Cl}(\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{S}^*) = \overline{\boldsymbol{C}}(\{0\}) + \overline{\boldsymbol{C}}\overline{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}(1)$. Or, le lem. 18[d] donne: $\overline{\boldsymbol{C}}(\{0\}) = \{0\}$, et à l'aide des déf. 5, 6 et 14 on se convaint sans peine que $\overline{\boldsymbol{C}}\overline{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}(1) = \underset{\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}(X)}{E}[X \epsilon \boldsymbol{U}(1)] = \underset{\boldsymbol{V}(1-X)}{E}[X \epsilon \boldsymbol{U}(1)] = \underset{\boldsymbol{V}(Y)}{E}[Y \epsilon \boldsymbol{U}(1)] = \overline{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{U}(1)$. On parvient ainsi à la formule cherchée: $\mathit{Cl}(\boldsymbol{T}^* \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*) = \mathit{Cl}(\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{S}^*) = \{0\} + \overline{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{U}(1) = \{0\} + \overline{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}(0)$.

Théorème fondamental V. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *on a* $\overline{\overline{\mathit{Cl}(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S})}} = \overline{\overline{\mathit{Cl}(\boldsymbol{T}^* \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

D é m o n s t r a t i o n. $\boldsymbol{U}$ est évidemment une fonction biunivoque: si $\boldsymbol{U}(X) = \boldsymbol{U}(Y)$, on a $\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}(X) = \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}(Y)$, d'où $X = Y$. Par conséquent, la classe $U(1)$ est de la même puissance que son image donnée par U: $\overline{\overline{U(1)}} = \overline{\overline{\overline{U}\,U(1)}}$. En raison du th. 48^a on a donc $\mathcal{Cl}(T \overset{\circ}{+} S) = \overline{U(1)} + \overline{\{0\}}$, d'où en vertu du lem. 10^a $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(T \overset{\circ}{+} S)}} = 2^{\aleph_\alpha} + 1 = 2^{\aleph_\alpha}$. Comme en outre, d'après le th. 33 et le lem. 19^d, $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(T^* \overset{\circ}{+} S^*)}} = \overline{\overline{\mathcal{Cl}([T \overset{\circ}{+} S]^*)}} = \overline{\overline{\mathcal{Cl}(T \overset{\circ}{+} S)}}$, on obtient finalement la formule cherchée: $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(T \overset{\circ}{+} S)}} = \overline{\overline{\mathcal{Cl}(T^* \overset{\circ}{+} S^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

A l'aide du théorème précédent il est aisé de déterminer la borne inférieure des puissances des familles $\mathcal{Cl}(F)$ qui correspondent aux opérations F intrinsèques et à leurs opérations doubles (tandis que la borne supérieure de ces puissances reste la même que dans le cas général):

Théorème 49. *Si* $\overline{\overline{I}} = \aleph_\alpha$, *chacune des formules:* $F \overset{\circ}{\subset} T \overset{\circ}{+} S$, $F \overset{\circ}{\subset} TS$, $F \overset{\circ}{\subset} T^* \overset{\circ}{+} S^*$ *et* $F \overset{\circ}{\subset} T^* S^*$ *entraîne:* $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après th. 21^a la formule: $F \overset{\circ}{\subset} T \overset{\circ}{+} S$ donne: $\mathcal{Cl}(T \overset{\circ}{+} S) \subset \mathcal{Cl}(F)$, d'où, en raison du th. fond. V, $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}}$. En rapprochant cette inégalité du th. 32, on en obtient aussitôt la formule cherchée: $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{Cl}(F)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. En tenant compte du th. 48, on raisonne dans les autres hypothèses d'une façon complètement analogue.

Il est à noter que les inclusions: $F \overset{\circ}{\subset} TS$ et $F \overset{\circ}{\subset} T^* S^*$ peuvent être remplacées dans le théorème précédent par les formules un peu plus générales, à savoir: $F \overset{\circ}{\subset} U\Sigma$ et $F \overset{\circ}{\subset} V\Pi$.

Théorème fondamental VI. *Si* $\overline{\overline{I}} = \aleph_\alpha$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S \overset{\circ}{+} S^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après le th. $42^{a,b}$ et le lem. 19^j, on a $S \in \mathfrak{M}$, $I \overset{\circ}{\subset} S$ et $I \overset{\circ}{\subset} S^*$; en vertu du th. 24^d il en résulte que

$$\mathcal{Cl}(S \overset{\circ}{+} S^*) = \mathcal{Cl}(SS^*). \tag{1}$$

Suivant le lem. 17^e, les inclusions: $I \overset{\circ}{\subset} S$ et $I \overset{\circ}{\subset} S^*$ donnent ensuite: $I \overset{\circ}{\subset} SS^*$. On a de plus $S^2 \overset{\circ}{=} S$, $[S^*]^2 \overset{\circ}{=} S^*$ et $SS^* \overset{\circ}{=} S^*S$ (th. 42^b, lem. 19^f et th. 47), d'où en raison du lem. 14^e $[SS^*]^2 \overset{\circ}{=} SS^*$. L'opération SS^* étant donc itérative et adjonctive, on peut appliquer le th. 23^d, en y posant: $F \overset{\circ}{=} SS^*$. Nous obtenons ainsi la formule:

$\mathcal{Cl}(SS^*) = \overline{SS^*}\,UU(1)$, qui, rapprochée de (1), donne: $\mathcal{Cl}(S \overset{\circ}{+} S^*) = \overline{SS^*}\,UU(1)$; comme en vertu du th. 46^c $SS^* \overset{\circ}{=} SM$, il vient:

$$\mathcal{Cl}(S \overset{\circ}{+} S^*) = \overline{SM}\,UU(1). \tag{2}$$

Or, conformément à la propriété connue des images, on a $\overline{fg}(A) = \overline{f}\,\overline{g}(A)$ pour toutes deux fonctions f et g et pour tout ensemble A. On a donc en particulier $\overline{SM}\,U\,U(1) = \overline{S}\,\overline{M}\,U\,U(1)$. En posant dans le lem. 11^a: $f \overset{\circ}{=} S$ et $A = \overline{M}\,U\,U(1)$, on en obtient: $\overline{\overline{\overline{SM}\,U\,U(1)}} \leqslant \overline{\overline{\overline{M}\,U\,U(1)}}$, d'où selon (2)

$$\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S \overset{\circ}{+} S^*)}} \leqslant \overline{\overline{\overline{M}\,U\,U(1)}}. \tag{3}$$

Envisageons une classe arbitraire X de $U\,U(1)$. En raison du th. 46^d, on a $\overline{\overline{M(X)}} \leqslant \overline{\overline{\Sigma(X)}} + 1$; comme par hypothèse $\overline{\overline{I}} = \aleph_\alpha$ et en outre $\Sigma(X) \subset I$, on en conclut que $\overline{\overline{M(X)}} \leqslant \aleph_\alpha + 1 = \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1}$. De plus, d'après la déf. 19, $M(X)$ est une classe d'ensembles, donc $M(X) \subset U(1)$; en tenant compte de la déf. 5^b (pour $A = U(1)$), on en obtient: $M(X) \in U_{\alpha+1}\,U(1)$.

Ce raisonnement prouve que $\overline{M}\,U\,U(1) \subset U_{\alpha+1}\,U(1)$, d'où

$$\overline{\overline{\overline{M}\,U\,U(1)}} \leqslant \overline{\overline{U_{\alpha+1}\,U(1)}}. \tag{4}$$

A l'aide des lem. $10^{a,c}$ et 6^b on obtient facilement: $\overline{\overline{U_{\alpha+1}\,U(1)}} \leqslant (\overline{\overline{U(1)}})^{\underbrace{\aleph_{\alpha+1}}} = (2^{\aleph_\alpha})^{\underbrace{\aleph_{\alpha+1}}} = (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha^2} = 2^{\aleph_\alpha}$; en le rapprochant de (3) et (4), on en déduit l'inégalité:

$$\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S \overset{\circ}{+} S^*)}} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}. \tag{5}$$

D'autre part, le th. 43^d entraîne: $S \overset{\circ}{+} S^* \overset{\circ}{\subset} S^* \overset{\circ}{+} T^*$; par application du th. 49 on en conclut que

$$\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S \overset{\circ}{+} S^*)}} \geqslant 2^{\aleph_\alpha}. \tag{6}$$

Les inégalités (5) et (6) donnent aussitôt:

$$\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S \overset{\circ}{+} S^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Le théorème connu, suivant lequel la classe F de tous les ensembles fermés de nombres réels est de la puissance $2^{\aleph_0}$, se laisse déduire facilement du théorème précédent. Soit, en effet, I l'ensemble de tous les nombres rationnels et R celui de tous les nombres réels (y inclus $+\infty$ et $-\infty$); posons ensuite $G(x)=1\cdot\underset{y}{E}[y<x]$ pour tout $x\in R$. La fonction $G(x)$ transforme notoirement d'une façon biunivoque R en une sous-classe de $U(1)$. Il s'en suit que la fonction $\overline{G}(X)$ transforme de la même façon la classe $U(R)$ dans une sous-famille de $UU(1)$; F étant une sous-classe de $U(R)$, on en conclut en particulier que $\overline{\overline{F}}=\overline{\overline{\underset{\overline{G}(X)}{E}[X\in F]}}$. Or, il est aisé de prouver que la formule: $X\in F$ entraîne: $S\overline{G}(X)\subset\overline{G}(X)$ et $S^*\overline{G}(X)\subset\overline{G}(X)$, d'où $\overline{G}(X)\in\mathcal{C}\ell(S)\cdot\mathcal{C}\ell(S^*)=\mathcal{C}\ell(S\mathring{+}S^*)$; on a donc $\underset{\overline{G}(X)}{E}[X\in F]\subset\mathcal{C}\ell(S\mathring{+}S^*)$, d'où $\overline{\overline{F}}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S\mathring{+}S^*)}}$. Comme dans le cas considéré $\overline{\overline{1}}=\aleph_0$, on en obtient d'après le th. fond. VI: $\overline{\overline{F}}\leqslant 2^{\aleph_0}$. D'autre part on a évidemment $\overline{\overline{F}}\geqslant 2^{\aleph_0}$ (puisque p. ex. $\overline{J}(R)\subset F$ et $\overline{\overline{\overline{J}(R)}}=2^{\aleph_0}$); on parvient donc à la formule cherchée: $\overline{\overline{F}}=2^{\aleph_0}$, c. q. f. d.

Il est cependant à remarquer que le raisonnement ci-dessus s'appuie d'une façon implicite sur l'axiome du choix, tandis que les autres démonstrations connues du théorème en question sont indépendantes de cet axiome.

Théorème fondamental VII. *Si* $\overline{\overline{1}}=\aleph_\alpha$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S)}}=2^{\aleph_\alpha}$.

Démonstration. En tenant compte du th. 42^{a}, on obtient par application du th. 28^{b}: $\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S)=\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S\mathring{+}S^*)$; à l'aide du th. 21^{b} (pour $F=C$ et $G=S\mathring{+}S^*$), on en conclut que $\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S)=\mathcal{C}\ell(C)\cdot\mathcal{C}\ell(S\mathring{+}S^*)$, d'où $\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S)\subset\mathcal{C}\ell(S\mathring{+}S^*)$. En raison du th. fond. VI, cette inclusion donne:

(1) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S)}}\leqslant 2^{\aleph_\alpha}.$$

Posons ensuite

(2) $$F(X)=\{0,X,1-X,1\}\text{ pour tout ensemble }X.$$

Soit a un élément arbitraire de 1. X étant un ensemble quelconque de la classe $U(1-\{a\})$, évidemment l'ensemble $1-X$ n'appartient pas à cette classe. Selon (2) il en résulte facilement que les formules: $X\in U(1-\{a\})$, $Y\in U(1-\{a\})$ et $F(X)=F(Y)$ entraînent constamment: $X=Y$; en d'autres termes, la fonction F transforme d'une façon biunivoque la classe $U(1-\{a\})$ en son image $\overline{F}U(1-\{a\})$. Par conséquent, on a $\overline{\overline{\overline{F}U(1-\{a\})}}=\overline{\overline{U(1-\{a\})}}$; comme en outre $\overline{\overline{1-\{a\}}}=\aleph_\alpha-1=\aleph_\alpha$, on en obtient d'après le lem. 10^{a}:

(3) $$\overline{\overline{\overline{F}U(1-\{a\})}}=2^{\aleph_\alpha}.$$

Or, on conclut sans peine de (2) à l'aide des déf. 14 et 18 que $SF(X)\subset F(X)$ et $CF(X)\subset F(X)$ pour tout X, d'où, en vertu de la déf. 16 et du th. 21^{b}, $F(X)\in\mathcal{C}\ell(C)\cdot\mathcal{C}\ell(S)=\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S)$. Il en résulte en particulier que $\overline{F}U(1-\{a\})\subset\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S)$; en rapprochant cette inclusion de (3), on en obtient:

(4) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S)}}\geqslant 2^{\aleph_\alpha}.$$

Les inégalités (1) et (4) donnent finalement:

$$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S)}}=2^{\aleph_\alpha},\quad\text{c. q. f. d.}$$

L'analyse des démonstrations des th. fond. V—VII nous conduit aux propositions suivantes, qui se rattachent au cas d'ensembles finis:

Si $\overline{\overline{1}}=\mathfrak{a}<\aleph_0$, *on a*

a) $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T\mathring{+}S)}}=\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T^*\mathring{+}S^*)}}=2^{\mathfrak{a}}\mathring{+}1$;

b) $2^{\mathfrak{a}}+1\leqslant\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S\mathring{+}S^*)}}\leqslant\sum\limits_{\mathfrak{r}\leqslant\mathfrak{a}+1}\binom{2^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{r}}$;

si en outre $\mathfrak{a}>0$, *on a*

c) $2^{\mathfrak{a}-1}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S^*)}}\leqslant\sum\limits_{\mathfrak{r}\leqslant\mathfrak{a}+1}\binom{2^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{r}}$

(le symbole $\binom{2^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{r}}$ *désignant, comme d'habitude, le nombre des combinaisons de* $2^{\mathfrak{a}}$ *éléments à* $\mathfrak{r}$ *éléments).*

Quant aux puissances de $\mathcal{C}\ell(S)$ et $\mathcal{C}\ell(S^*)$, on parvient par l'analyse du th. fond. IV aux mêmes délimitations qui ont été indiquées plus haut (p. 232) pour les familles $\mathcal{C}\ell(T)$ et $\mathcal{C}\ell(T^*)$.

Les théorèmes fondamentaux établis jusqu'ici épuisent tous les problèmes concernant les puissances des familles de la forme $\mathcal{C}\ell(G)$ où $G\in\mathfrak{S}(\{C,T,T^*,S,S^*\})$, c.-à-d. des familles des classes closes par rapport à une des opérations C, T, T^*, S et S^* ou bien par rapport à plusieurs de ces opérations à la fois. Les problèmes non examinés se réduisent facilement à ceux qui ont été examinés explicitement; on a p. ex. en vertu du th. 28 $\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S)=\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S^*)=\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}S\mathring{+}S^*)$, en raison du th. 41 $\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}T)=\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}T\mathring{+}S)=\mathcal{C}\ell(C\mathring{+}T^*\mathring{+}S^*)$ et d'après le th. 43^{d} $\mathcal{C}\ell(T^*)=\mathcal{C}(T^*\mathring{+}S)$. Les résultats acquis peuvent être résumés comme suit:

A. *Chacune des classes* $\mathit{Cl}(G)$ *où* $G \in \mathfrak{S}(\{C, T, T^*, S, S^*\})$ *coïncide avec une des classes suivantes*: $\mathit{Cl}(C)$, $\mathit{Cl}(T)$, $\mathit{Cl}(T^*)$, $\mathit{Cl}(S)$, $\mathit{Cl}(S^*)$, $\mathit{Cl}(C \mathring{+} T)$, $\mathit{Cl}(C \mathring{+} S)$, $\mathit{Cl}(T \mathring{+} S)$, $\mathit{Cl}(T^* \mathring{+} S^*)$ *et* $\mathit{Cl}(S \mathring{+} S^*)$.

B. *Dans l'hypothèse que* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *les familles* $\mathit{Cl}(C)$, $\mathit{Cl}(T)$, $\mathit{Cl}(T^*)$, $\mathit{Cl}(S)$ *et* $\mathit{Cl}(S^*)$ *ont la même puissance, à savoir* $2^{2^{\aleph_\alpha}}$; *les familles* $\mathit{Cl}(C \mathring{+} S)$, $\mathit{Cl}(T \mathring{+} S)$, $\mathit{Cl}(T^* \mathring{+} S^*)$ *et* $\mathit{Cl}(S \mathring{+} S^*)$ *ont aussi la puissance égale, notamment* $2^{\aleph_\alpha}$; *enfin la famille* $\mathit{Cl}(C \mathring{+} T)$ *ne contient que deux éléments.*

Ces résultats peuvent être étendus à toutes les opérations qui s'obtiennent des opérations considérées à l'aide de l'addition et de la multiplication relative, c.-à-d. aux opérations de la classe $\mathfrak{B}(\{C, T, S\})$. En appliquant notamment le th. B de la p. 217 (§ 3), on constate facilement que toute famille $\mathit{Cl}(G)$ où $G \in \mathfrak{B}(\{C, T, S\})$ coïncide soit avec la famille $\mathit{Cl}(I)$, soit avec une des familles citées plus haut.

§ 6. Opération S_β. Classes d'ensembles additives au dégré β.

L'opération S_β, qui sera traitée dans ce §, consiste à former des ensembles-sommes de moins que $\aleph_\beta$ ensembles de la classe donnée K. Les classes d'ensembles appartenant à la famille $\mathit{Cl}(S_\beta)$ peuvent être appelées *classes additives au dégré* β.

La définition exacte de l'opération S_β est la suivante:

Définition 20. $S_\beta(K) = \overline{\Sigma}(U_\beta(K) - \{0\})$.

Plus simple, mais moins commode serait la définition: $S'_\beta(K) = \overline{\Sigma}\, U_\beta(K)$, resp. $S'_\beta \mathring{=} \overline{\Sigma}\, U_\beta$ (cf. remarques, p. 233, en rélation avec la déf. 18).

Il est aisé d'établir les propriétés suivantes de cette opération:

Théorème 50. a) $S_\beta \in \mathfrak{A}_\beta$, *donc* $S_\beta \in \mathfrak{M}$;

b) $I \mathring{\subset} S_\beta$;

c) $S_\beta(0) = 0$;

d) $S_\beta(\{A\}) = \{A\}$;

e) $S_\beta(K + \{0\}) = S_\beta(K) + \{0\}$;

f) $\overline{\overline{S_\beta(K)}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\aleph_{\underset{\smile}{\beta}}}$.

D é m o n s t r a t i o n. Les formules a)—e) résultent facilement de la déf. 20 et des considérations du § 2; pour démontrer la formule a) il est commode de s'appuyer sur le lem. 15e.

Quant à la formule f), on posera dans le lem. 11a: $f \mathring{=} \Sigma$ et $A = U_\beta(K) - \{0\}$, d'où, à cause de la déf. 20, $\overline{\overline{S_\beta(K)}} \leqslant \overline{\overline{U_\beta(K) - \{0\}}} \leqslant \overline{\overline{U_\beta(K)}}$. Comme en vertu du lem. 10c: $\overline{\overline{U_\beta(K)}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\aleph_{\underset{\smile}{\beta}}}$, on obtient l'inégalité cherchée: $\overline{\overline{S_\beta(K)}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\aleph_{\underset{\smile}{\beta}}}$. Je ne sais pas éviter dans ce raisonnement l'axiome du choix.

Certains rapports entre l'opération S_β et les opérations examinées dans les §§ précédents sont données dans le suivant

Théorème 51. a) $TS_\beta \mathring{=} S_\beta T$;

b) $S_\beta \mathring{\subset} S \mathring{\subset} T^*$;

c) *si* $\overline{\overline{K}} < \aleph_\beta$ *ou bien* $\overline{\overline{\Sigma(K)}} < \aleph_\beta$, *on a* $S_\beta(K) = S(K)$;

d) *si* $\overline{\overline{1}} < \aleph_\beta$, *on a* $S_\beta \mathring{=} S$;

e) *si* $F \in \mathfrak{A}_\beta$ *et* $F \mathring{\subset} S$, *on a* $F \mathring{\subset} S_\beta$; *si* $F \in \mathfrak{A}_\beta$ *et* $F \mathring{\subset} TS$, *on a* $F \mathring{\subset} TS_\beta$.

D é m o n s t r a t i o n. Les formules a) et b) se déduisent facilement des déf. 17, 18 et 20 et du th. 43d; il est cependant à noter que nous ne savons pas démontrer l'inclusion: $S_\beta T \mathring{\subset} TS_\beta$ sans avoir recours à l'axiome du choix.

Quant à la formule c), on a évidemment d'après la déf. 5a,b: $U_\beta(K) = U(K)$ dans le cas où $\overline{\overline{K}} < \aleph_\beta$, donc conformément aux déf. 20 et 18: $S_\beta(K) = S(K)$. Dans l'hypothèse que $\overline{\overline{\Sigma(K)}} < \aleph_\beta$ on raisonne par contre comme suit.

Considérons un ensemble arbitraire X tel que

$$X \in S(K). \tag{1}$$

En raison de la déf. 18, (1) entraîne l'existence d'une classe L vérifiant les formules:

$$X = \Sigma(L), \tag{2}$$

$$L \subset K \quad \textit{et} \quad L \neq 0. \tag{3}$$

De (2) et (3) on conclut en premier lieu que $X \subset \Sigma(K)$, donc que $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{\Sigma(K)}}$, d'où en vertu de l'hypothèse

$$\overline{\overline{X}} < \aleph_\beta. \tag{4}$$

Tenant compte de (2) et appliquant l'axiome du choix, on parvient ensuite à la conclusion qu'on peut faire correspondre à tout élément y de X un ensemble $F(y)$ de façon que l'on ait: $y \in F(y) \in \boldsymbol{L}$. Par conséquent cette fonction F remplit les formules suivantes:

$$X \subset \sum_{y \in X} F(y) = \Sigma \overline{F}(X) \tag{5}$$

et

$$\overline{F}(X) \subset \boldsymbol{L}. \tag{6}$$

Il résulte de (6) et (2) que $\Sigma \overline{F}(X) \subset \Sigma(\boldsymbol{L}) = X$; en rapprochant cette inclusion de (5), nous obtenons:

$$X = \Sigma \overline{F}(X). \tag{7}$$

Selon (3) et (6) on a $\overline{F}(X) \subset \boldsymbol{K}$; le lem. 11[a] donne en outre $\overline{\overline{\overline{F}(X)}} \leqslant \overline{\overline{X}}$, d'où en vertu de (4) $\overline{\overline{\overline{F}(X)}} < \aleph_\beta$. On en conclut que

$$\overline{F}(X) \in \boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{K}). \tag{8}$$

Si $X \neq 0$, on a $\overline{F}(X) \neq 0$, donc suivant (8) et (7) $\overline{F}(X) \in \boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{K}) - \{0\}$ et $X \in \overline{\Sigma}(\boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{K}) - \{0\})$, d'où conformément à la déf. 20

$$X \in S_\beta(\boldsymbol{K}). \tag{9}$$

Or, cette formule (9) se vérifie également dans le cas de $X = 0$. On a alors en effet, en raison de (2) et (3), $\boldsymbol{L} = \{0\}$, d'où $\overline{\overline{\boldsymbol{L}}} < \aleph_\beta$ et $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{K}) - \{0\}$, donc, comme auparavant, $X \in \overline{\Sigma}(\boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{K}) - \{0\}) = S_\beta(\boldsymbol{K})$.

Ainsi la formule (1) entraîne constamment (9); par conséquent, la classe $\boldsymbol{K}$ vérifie l'inclusion: $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K})$. D'autre part la formule [b]) du théorème qui nous occupe donne en vertu de la déf. 8[b]: $\boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})$. On a donc finalement:

$$\boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}) \textit{ dans l'hypothèse que } \overline{\overline{\Sigma(\boldsymbol{K})}} < \aleph_\beta, \quad \text{c. q. f. d.}$$

La formule [d]) présente une conséquence facile de la proposition établie tout à l'heure. Si, en effet, $\overline{\overline{1}} < \aleph_\beta$, on a à plus forte raison $\overline{\overline{\Sigma(\boldsymbol{K})}} < \aleph_\beta$, donc $\boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K})$ pour toute classe $\boldsymbol{K}$; à l'aide de la déf. 8[a] on en obtient aussitôt l'identité cherchée: $\boldsymbol{S}_\beta \doteq \boldsymbol{S}$.

Pour démontrer enfin la proposition [e]), envisageons une opération arbitraire $\boldsymbol{F}$ semi-additive au degré β et contenue dans $\boldsymbol{S}$ (c.-à-d. satisfaisant aux formules: $\boldsymbol{F} \in \mathfrak{A}_\beta$ et $\boldsymbol{F} \mathring{\subset} \boldsymbol{S}$). Conformément au lem. 15[c] on a pour toute classe d'ensembles $\boldsymbol{Y}$:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}) = \sum_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{Y})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}). \tag{10}$$

L'application du même lemme à l'opération $\boldsymbol{S}_\beta$ donne en raison du th. 50[a]:

$$\boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{Y}) = \sum_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{Y})} \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{X}). \tag{11}$$

Or, soit $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{Y})$, donc $\overline{\overline{\boldsymbol{X}}} < \aleph_\beta$. En conséquence de la formule [d]) démontrée auparavant, on obtient: $\boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})$; comme $\boldsymbol{F} \mathring{\subset} \boldsymbol{S}$, on a en outre $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{S}(\boldsymbol{X})$, de sorte que

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{X}) \textit{ pour tout } \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{Y}). \tag{12}$$

Les formules (10)—(12) impliquent aussitôt que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}) \subset \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{Y})$, quelle que soit la classe $\boldsymbol{Y}$, d'où

$$\boldsymbol{F} \mathring{\subset} \boldsymbol{S}_\beta, \quad \text{c. q. f. d.}$$

L'opération $\boldsymbol{TS}_\beta$ étant, de même que $\boldsymbol{S}_\beta$, semi-additive au degré β (d'après le lem. 16[g]), la seconde partie de la proposition [e]) se démontre d'une manière parfaitement analogue.

Je dois la proposition [c]) du théorème précédent à MM. Kozniewski et Lindenbaum [1]).

Je vais établir à leur tour certains rapports entre diverses opérations $\boldsymbol{S}_\beta$ avec l'indice β variable.

Théorème 52. [a]) *Si $A \neq 0$ et $\beta = sup(\overline{\varphi}(A))$, on a* $\boldsymbol{S}_\beta \doteq \mathring{\sum_{x \in A}} \boldsymbol{S}_{\varphi(x)}$;

[b]) *si* $\beta \leqslant \gamma$, *on a* $\boldsymbol{S}_\beta \mathring{\subset} \boldsymbol{S}_\gamma$;

[c]) *si* $\gamma < \beta$, *on a* $\boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{S}_\gamma \doteq \boldsymbol{S}_\beta$;

[d]) *si* $\beta \leqslant cf(\gamma)$, *on a* $\boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{S}_\gamma \doteq \boldsymbol{S}_\gamma$;

[e]) *si* $cf(\gamma) < \beta \leqslant \gamma + 1$, *on a* $\boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{S}_\gamma \doteq \boldsymbol{S}_{\gamma+1}$;

[f]) *si* $cf(\beta) = \beta$, *on a* $\boldsymbol{S}_\beta^2 \doteq \boldsymbol{S}_\beta$;

[g]) *si* $cf(\beta) < \beta$, *on a* $\boldsymbol{S}_\beta^2 \doteq \boldsymbol{S}_\beta^3 \doteq \boldsymbol{S}_{\beta+1}$.

[1]) Cf. à ce propos leur note: *Sur les opérations d'addition et de multiplication dans les classes d'ensembles*, Fund. Math. XV, p. 343, Th. 1.

Démonstration. La formule a) constitue une conséquence facile des déf. 20 et 9^b, puisqu'on a en raison de la déf. 5^b $U_\beta(K) = \sum_{x\in A} U_{\varphi(x)}(K)$ dans l'hypothèse que $\beta = \sup(\overline{\varphi}(A))$. Si l'on pose en particulier: $\beta=\gamma$, $A=\{0,1\}$ et $\varphi(0)=\beta\leqslant\varphi(1)=\gamma$, on obtient de a): $S_\gamma \overset{\circ}{=} S_\beta \overset{\circ}{+} S_\gamma$ et on parvient ainsi à l'inclusion b).

c) Suivant le th. $50^{a,b}$, on a $S_\beta \in \mathfrak{M}$ et $I \overset{\circ}{\subset} S_\gamma$; en appliquant donc la seconde partie du lem. 17^c (pour $F \overset{\circ}{=} S_\gamma$ et $G \overset{\circ}{=} S_\beta$), on en obtient:

$$S_\beta \overset{\circ}{\subset} S_\beta S_\gamma. \tag{1}$$

Posons dans le lem. 16^f: $F \overset{\circ}{=} S_\beta$ et $G \overset{\circ}{=} S_\gamma$; comme d'après le th. 50^a $S_\beta \in \mathfrak{A}_\beta$ et $S_\gamma \in \mathfrak{A}_\gamma$ et comme par hypothèse $\gamma<\beta$, ce lemme donne:

$$S_\beta S_\gamma \in \mathfrak{A}_\beta. \tag{2}$$

Les formules: $S_\beta \in \mathfrak{M}$ et $S_\gamma \overset{\circ}{\subset} S$ (th. 50^a, th. 51^b) impliquent ensuite, conformément à la déf. 12^a: $S_\beta S_\gamma \overset{\circ}{\subset} S_\beta S$; comme d'autre part $I \overset{\circ}{\subset} S_\beta \subset S \overset{\circ}{=} S^2$ (th. 50^a, th. 51^b, th. 42^b), on obtient à l'aide du lem. 17^d: $S_\beta S \overset{\circ}{=} S$. Par conséquent,

$$S_\beta S_\gamma \overset{\circ}{\subset} S. \tag{3}$$

Or, d'après le th. 51^e (pour $F \overset{\circ}{=} S_\beta S_\gamma$), les formules (2) et (3) entraînent l'inclusion: $S_\beta S_\gamma \overset{\circ}{\subset} S_\beta$, qui, rapprochée de (1), donne finalement:

$$S_\beta S_\gamma \overset{\circ}{=} S_\beta, \quad \text{c. q. f. d.}$$

La formule d) s'obtient d'une façon complètement analogue.

Passons à la proposition e); admettons donc que $cf(\gamma)<\beta\leqslant\gamma+1$. En vertu de la formule b) établie auparavant on a dans ce cas $S_\beta \overset{\circ}{\subset} S_{\gamma+1}$, d'où suivant le lem. 14^b $S_\beta S_\gamma \overset{\circ}{\subset} S_{\gamma+1} S_\gamma$; si l'on pose d'autre part: $\beta=\gamma+1$ dans la formule c), on obtient: $S_{\gamma+1} S_\gamma \overset{\circ}{=} S_{\gamma+1}$. Par conséquent,

$$S_\beta S_\gamma \overset{\circ}{\subset} S_{\gamma+1}, \ \textit{lorsque}\ \beta\leqslant\gamma+1. \tag{14}$$

Soient K une classe d'ensembles arbitraire et X un ensemble tel que

$$X \in S_{\gamma+1}(K). \tag{15}$$

Conformément aux déf. 20 et 5^b, (15) entraîne l'existence d'une classe L satisfaisant aux conditions:

$$X = \Sigma(L), \tag{16}$$

$$L \subset K,\ \overline{\overline{L}} < \aleph_{\gamma+1}\ \textit{et}\ L \neq 0. \tag{17}$$

Il résulte de (17) que $0<\overline{\overline{L}}\leqslant\aleph_\gamma$. A l'aide du lem. 2^b (pour $A=L$ et $\alpha=\gamma$) on en conclut qu'il existe une suite de classes L_ξ du type $\omega_{cf(\gamma)}$ vérifiant les formules:

$$L = \sum_{\xi<\omega_{cf(\gamma)}} L_\xi; \tag{18}$$

$$\overline{\overline{L_\xi}} < \aleph_\gamma\ \textit{et}\ L_\xi \neq 0\ \textit{pour}\ \xi<\omega_{cf(\gamma)}. \tag{19}$$

Les formules (16) et (18) donnent, en raison de la loi associative de l'addition des ensembles:

$$X = \Sigma\Big(\sum_{\xi<\omega_{cf(\gamma)}} L_\xi\Big) = \sum_{\xi<\omega_{cf(\gamma)}} \Sigma(L_\xi) = \Sigma(\underset{\Sigma(L_\xi)}{E}[\xi<\omega_{cf(\gamma)}]). \tag{20}$$

En vertu de (17) et (18), $L_\xi \subset K$ pour $\xi<\omega_{cf(\gamma)}$, d'où, selon (19), $L_\xi \in U_\gamma(K)-\{0\}$. Par conséquent, $\Sigma(L_\xi) \in \overline{\Sigma}(U_\gamma(K)-\{0\})$, donc conformément à la déf. 20

$$\Sigma(L_\xi) \in S_\gamma(K)\ \textit{pour}\ \xi<\omega_{cf(\gamma)}. \tag{21}$$

Posons momentanément: $\Sigma(L_\xi)=F(\xi)$, d'où $\underset{\Sigma(L_\xi)}{E}[\xi<\omega_{cf(\gamma)}] = \overline{F}(\underset{\xi}{E}[\xi<\omega_{cf(\gamma)}])$. Par l'application du lem. 11^a (pour $f \overset{\circ}{=} F$ et $A=\underset{\xi}{E}[\xi<\omega_{cf(\gamma)}]$) nous en obtenons: $\overline{\overline{\underset{\Sigma(L_\xi)}{E}[\xi<\omega_{cf(\gamma)}]}} \leqslant \overline{\overline{\underset{\xi}{E}[\xi<\omega_{cf(\gamma)}]}} = \aleph_{cf(\gamma)}$, donc à fortiori $\overline{\overline{\underset{\Sigma(L_\xi)}{E}[\xi<\omega_{cf(\gamma)}]}} < \aleph_\beta$, lorsque $cf(\gamma)<\beta$. Comme en outre selon (21) $\underset{\Sigma(L_\xi)}{E}[\xi<\omega_{cf(\gamma)}]$ est une classe non-vide contenue dans $S_\gamma(K)$, on conclut de la déf. 5^b que

$$\underset{\Sigma(L_\xi)}{E}[\xi<\omega_{cf(\gamma)}] \in U_\beta S_\gamma(K) - \{0\}\ \textit{pour}\ cf(\gamma)<\beta. \tag{22}$$

Il résulte de (20) et (22) que $X \in \overline{\Sigma}(U_\beta S_\gamma(K)-\{0\})$, d'où suivant la déf. 20

$$X \in S_\beta S_\gamma(K),\ \textit{lorsque}\ cf(\gamma)<\beta. \tag{23}$$

Ainsi la formule (15) entraîne toujours (23). Toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ vérifie donc l'inclusion: $\boldsymbol{S}_{\gamma+1}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{S}_\gamma(\boldsymbol{K})$; autrement dit,

$$\boldsymbol{S}_{\gamma+1} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{S}_\gamma, \textit{ lorsque } cf(\gamma) < \beta. \tag{24}$$

Les formules (14) et (24) donnent aussitôt:

$$\boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{S}_\gamma \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}_{\gamma+1}, \textit{ lorsque } cf(\gamma) < \beta \leqslant \gamma + 1, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Tenant compte de la déf. 10[a,b,c], on obtient comme un cas particulier de la formule [d]) (pour $\gamma = \beta$) la formule [f]): $\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}_\beta$, *lorsque* $cf(\beta) = \beta$.

En posant de même dans la formule [a]): $\gamma = \beta$, on parvient à l'égalité: $\boldsymbol{S}_\beta^2 \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}_{\beta+1}$, lorsque $cf(\beta) < \beta$, d'où $\boldsymbol{S}_\beta^3 \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}_\beta^2 \boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}_{\beta+1} \boldsymbol{S}_\beta$; comme en outre, d'après la formule [c]), $\boldsymbol{S}_{\beta+1} \boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}_{\beta+1}$, on obtient finalement [g]): $\boldsymbol{S}_\beta^2 \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}_\beta^3 \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}_{\beta+1}$, *lorsque* $cf(\beta) < \beta$.

La démonstration du th. 52 est ainsi achevée.

On aperçoit facilement l'analogie entre le lem. 8[a,b,c] et le th. 52[c,d,e]: l'opération $\boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{S}_\gamma$ coïncide respectivement avec une des opérations $\boldsymbol{S}_\beta$, $\boldsymbol{S}_\gamma$ ou $\boldsymbol{S}_{\gamma+1}$ dans les mêmes hypothèses, dans lesquelles le nombre $(\aleph_\gamma)^{\aleph_\beta}$ est égal à un des nombres $\aleph_\beta$, $\aleph_\gamma$ ou $\aleph_{\gamma+1}$.

A même titre que l'opération $\boldsymbol{S}_\beta$, son opération double $\boldsymbol{S}_\beta^*$ va nous intéresser ici; il est parfois commode d'assigner à cette opération un symbole indépendant, p. ex. $\boldsymbol{P}_\beta$. En s'appuyant sur les déf. 14, 15 et 20, on peut établir le théorème suivant qui explique le sens de l'opération $\boldsymbol{S}_\beta^*$:

Théorème 53. $\boldsymbol{S}_\beta^*(\boldsymbol{K}) = \overline{\overline{\Pi}}(\boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{K}) - \{0\})$.

Comme on voit, l'opération en question consiste à former des ensembles-produits de moins que $\aleph_\beta$ ensembles de la classe donnée $\boldsymbol{K}$. Les classes d'ensembles closes par rapport à l'opération $\boldsymbol{S}_\beta^*$ peuvent être appelées *classes multiplicatives au degré* β.

En s'appuyant sur le lem. 19 on peut déduire des propriétés de l'opération $\boldsymbol{S}_\beta$ qui viennent d'être établies dans les th. 50—52 celles qui leur correspondent pour l'opération $\boldsymbol{S}_\beta^*$. Ce ne sont que les propriétés suivantes (correspondant aux th. 50[d,e] et 51[c]) qui ne s'en obtiennent pas automatiquement, mais exigent une démonstration spéciale:

Théorème 54. [a]) $\boldsymbol{S}_\beta^*(\{A\}) = \{A\}$;

[b]) $\boldsymbol{S}_\beta^*(\boldsymbol{K} + \{0\}) = \boldsymbol{S}_\beta^*(\boldsymbol{K}) + \{0\}$;

[c]) *si* $\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} < \aleph_\beta$ *ou bien* $\overline{\overline{\Sigma(\boldsymbol{K})}} < \aleph_\beta$, *on a* $\boldsymbol{S}_\beta^*(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$.

Démonstration des formules [a]) et [b]) est tout à fait élémentaire. Pour établir la proposition [c]), il est commode d'envisager la classe $\boldsymbol{K}^\times = \underset{\Sigma(\boldsymbol{K})-X}{E}[X \in \boldsymbol{K}]$. On a évidemment $\overline{\overline{\boldsymbol{K}^\times}} < \aleph_\beta$ ou bien $\overline{\overline{\Sigma(\boldsymbol{K}^\times)}} < \aleph_\beta$ (suivant l'hypothèse admise pour la classe $\boldsymbol{K}$), d'où d'après le th. 51[c] $\boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K}^\times) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}^\times)$; d'autre part, en rapprochant les déf. 20 et 18 des th. 53 et 44, on se convaint facilement que $\boldsymbol{S}_\beta^*(\boldsymbol{K}) = \underset{\Sigma(\boldsymbol{K})-X}{E}[X \in \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K}^\times)]$ et de même que $\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K}) = \underset{\Sigma(\boldsymbol{K})-X}{E}[X \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{K}^\times)]$ [1]). On en obtient aussitôt la formule cherchée: $\boldsymbol{S}_\beta^*(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{K})$.

En dehors des propriétés de $\boldsymbol{S}_\beta$ et $\boldsymbol{S}_\beta^*$ énoncées dans les derniers théorèmes les propriétés suivantes sont à mentionner ici. On a le théorème: *pour que* $\boldsymbol{F} \in \mathfrak{A}_\beta$ *et* $\boldsymbol{F}(0) = 0$, *il faut et il suffit que* $\boldsymbol{F}\Sigma \overset{\circ}{=} \Sigma \overline{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{S}_\beta$ (c.-à-d. que $\boldsymbol{F}\Sigma(\mathscr{K}) = \sum_{X \in \boldsymbol{S}_\beta(\mathscr{K})} \boldsymbol{F}(X)$, *quelle que soit la famille de classes* $\mathscr{K}$; cf. le théoréme analogue, p. 240); donc en particulier: $\boldsymbol{S}_\beta \Sigma \overset{\circ}{=} \Sigma \overline{\boldsymbol{S}}_\beta \boldsymbol{S}_\beta$. On a ensuite les formules: $\Sigma \boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{=} \Sigma \overset{\circ}{=} \Sigma \boldsymbol{S}_\beta^*$ et $\Pi \boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{=} \Pi \overset{\circ}{=} \Pi \boldsymbol{S}_\beta^*$; $\boldsymbol{M} \boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{=} \boldsymbol{M} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{M} \boldsymbol{S}_\beta^*$; $\boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}) \subset \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{L})$ *et* $\boldsymbol{S}_\beta^*(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}) \subset \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{S}_\beta^*(\boldsymbol{L})$ *pour toutes deux classes* $\boldsymbol{K}$ *et* $\boldsymbol{L}$ (resp. $\boldsymbol{S}_\beta[\boldsymbol{F} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{G}] \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{T}^* \boldsymbol{F} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{G}$ *et* $\boldsymbol{S}_\beta^*[\boldsymbol{F} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{G}] \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{T}\boldsymbol{F} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_\beta^* \boldsymbol{G}$ *pour toutes deux opérations* $\boldsymbol{F}$ *et* $\boldsymbol{G}$). On peut établir les réciproques du th. 52[f,g]: les formules: $\boldsymbol{S}_\beta^2 \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}_\beta$ et $cf(\beta) = \beta$ sont donc équivalentes, de même que les formules: $\boldsymbol{S}_\beta^2 \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}_{\beta+1}$ et $cf(\beta) < \beta$. Il existe enfin certaines relations moins simples entre les opérations de la forme $\boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{S}_\gamma^*$, $\boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{S}_\gamma^* \boldsymbol{S}_\delta \ldots$ d'une part et celles de la forme $\boldsymbol{S}_\beta^* \boldsymbol{S}_\gamma$, $\boldsymbol{S}_\beta^* \boldsymbol{S}_\gamma \boldsymbol{S}_\delta^* \ldots$ d'autre part [2]).

Les opérations $\boldsymbol{S}_\beta$ et $\boldsymbol{S}_\beta^*$ n'étaient pas étudieés jusqu'à présent que

[1]) Cf. les remarques, p. 211, sur la coïncidence des opérations $\boldsymbol{F}^*$ et $\boldsymbol{F}^\times$ pour $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}$, resp. $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{S}_\beta$.

[2]) Cf. à ce propos: W. Sierpiński et A. Tarski, *Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles*, Fund. Math. XV, p. 292; A. Kozniewski et A. Lindenbaum, *Sur les opérations d'addition et de multiplication dans les classes d'ensembles*, ibid. p. 342

dans les cas particuliers de $\beta=0$ et $\beta=1$ [1]). M. Hausdorff a introduit les symboles spéciaux pour les opérations $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_1^*$, à savoir σ et δ ($\mathbf{K}_\sigma = \mathbf{S}_1(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}_\delta = \mathbf{S}_1^*(\mathbf{K})$), ainsi que les termes spéciaux pour les classes d'ensembles appartenant respectivement aux familles $\mathcal{Cl}(\mathbf{S}_0 \stackrel{\circ}{+} \mathbf{S}_0^*)$, $\mathcal{Cl}(\mathbf{S}_1)$, $\mathcal{Cl}(\mathbf{S}_1^*)$ et $\mathcal{Cl}(\mathbf{S}_1 \stackrel{\circ}{+} \mathbf{S}_1^*)$, à savoir *Ring*, *σ System*, *δ-System* et *(σδ)-System* [2]).

Pour les considérations qui vont suivre, il est commode d'introduire une opération auxiliaire $\mathbf{R}_\beta$; cette opération, étroitement liée avec $\mathbf{S}_\beta$ et $\mathbf{S}_\beta^*$, semble d'ailleurs présenter par elle-même quelque intérêt. Afin d'effectuer l'opération $\mathbf{R}_\beta$ sur une classe d'ensembles donnée $\mathbf{K}$, on envisage toutes les sous-classes $\mathbf{X}$ de $\mathbf{K}$ qui contiennent moins de $\aleph_\beta$ ensembles et on forme pour tout $\mathbf{X}$ toutes les sommes des produits (ou bien, ce qui revient au-même d'après le th. 47, tous les produits des sommes) d'ensembles de $\mathbf{X}$; les ensembles ainsi formés constituent la classe $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K})$. On a donc en symboles:

Définition 21. $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) = \sum\limits_{\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})} \mathbf{S}\mathbf{S}^*(\mathbf{X})$.

On peut mettre la définition précédente dans une forme plus concise, à savoir: $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) \stackrel{\circ}{=} \Sigma\, \overline{\mathbf{S}\mathbf{S}^*}\, \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})$, resp. $\mathbf{R}_\beta \stackrel{\circ}{=} \Sigma\, \overline{\mathbf{S}\mathbf{S}^*}\, \mathbf{U}_\beta$. Il est à noter que les opérations $\mathbf{S}_\beta$ et $\mathbf{S}_\beta^*$ se laissent exprimer aussi par des formules analogues: $\mathbf{S}_\beta \stackrel{\circ}{=} \Sigma\, \overline{\mathbf{S}}\, \mathbf{U}_\beta$ et $\mathbf{S}_\beta^* \stackrel{\circ}{=} \Sigma\, \overline{\mathbf{S}^*}\, \mathbf{U}_\beta$. Ce procédé de former les opérations $\mathbf{S}_\beta$, $\mathbf{S}_\beta^*$ et $\mathbf{R}_\beta$ à partir de $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^*$ et $\mathbf{S}\mathbf{S}^*$ se prête à une généralisation, qui consiste à faire correspondre à toute opération $\mathbf{F}$ et à tout nombre ordinal β une opération $\mathbf{F}_\beta$ déterminée par la formule: $\mathbf{F}_\beta \stackrel{\circ}{=} \Sigma\, \overline{\mathbf{F}}\, \mathbf{U}_\beta$; il s'y rattache aussi l'opération plus vaste $\mathbf{F}_\infty \stackrel{\circ}{=} \Sigma\, \overline{\mathbf{F}}\, \mathbf{U}$ (qui ne constitue d'ailleurs qu'un cas particulier de $\mathbf{F}_\beta$). L'étude de ces notions, qui rentrent dans l'algorythme esquissé au § 2, ne sera pas développée ici.

Certaines propriétés élémentaires de l'opération $\mathbf{R}_\beta$ sont données dans les deux théorèmes suivants:

[1]) Le cas de $\beta=2$ a été envisagé par M. Sierpiński dans son article: *Sur les ensembles hyperboreliens*, Comptes rendus des séances de la Soc. des Sc. et des L. de Varsovie 1926, p. 16—22.

[2]) Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre* II, Aufl., Berlin und Leipzig 1927, p. 77—85; cf. aussi W. Sierpiński, *Wstęp do teorji mnogości i topologji* (*Introduction à la Théorie des Ensembles et à la Topologie*, en polonais), Lwów 1930, p. 108—119.

Théorème 55. [a]) *$\mathbf{R}_\beta \in \mathfrak{A}_\beta$, donc $\mathbf{R}_\beta \in \mathfrak{M}$;*

[b]) *$\mathbf{I} \mathring{\subset} \mathbf{R}_\beta$;*

[c]) *si $\mathbf{F} \in \mathfrak{A}_\beta$ et $\mathbf{F} \mathring{\subset} \mathbf{S}\mathbf{S}^*$, on a $\mathbf{F} \mathring{\subset} \mathbf{R}_\beta$;*

[d]) *$\mathbf{S}_\beta \mathring{\subset} \mathbf{R}_\beta \mathring{\subset} \mathbf{S}^*\mathbf{S}_\beta$ et $\mathbf{S}_\beta^* \mathring{\subset} \mathbf{R}_\beta \mathring{\subset} \mathbf{S}\mathbf{S}_\beta^*$;*

[e]) *$\mathbf{R}_\beta^* = \mathbf{R}_\beta$ et $\mathbf{C}\mathbf{R}_\beta \stackrel{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta \mathbf{C}$;*

[f]) *$\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}+\mathbf{L}) \subset \mathbf{T}\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}) + \mathbf{T}^*\mathbf{S}_\beta^*(\mathbf{L})$ pour toutes deux classes d'ensembles $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$* (en d'autres termes, $\mathbf{R}_\beta[\mathbf{F} \stackrel{\circ}{+} \mathbf{G}] \mathring{\subset} \mathbf{T}\mathbf{S}_\beta \mathbf{F} \stackrel{\circ}{+} \mathbf{T}^*\mathbf{S}_\beta^* \mathbf{G}$ *pour toutes deux opérations $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$*);

[g]) *$\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) \leqslant (\overline{\overline{\mathbf{K}}})^{\aleph_\beta} \cdot 2^{2^{\aleph_\beta}}$.*

Démonstration. Les formules [a]) et [b]) se déduisent facilement de la déf. 21 et du th. 42[b] à l'aide des définitions et des lemmes du § 2.

La démonstration de [c]) est analogue à celle du th. 51[e].

Si l'on pose dans [c]): $\mathbf{F} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta$, resp. $\mathbf{F} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{S}_\beta^*$, et si l'on tient compte des formules: $\mathbf{S}_\beta \in \mathfrak{A}_\beta$ et $\mathbf{S}_\beta \mathring{\subset} \mathbf{S}\mathbf{S}^*$, resp. $\mathbf{S}_\beta^* \in \mathfrak{A}_\beta$ et $\mathbf{S}_\beta^* \mathring{\subset} \mathbf{S}\mathbf{S}^*$ (qui s'obtiennent sans peine des th. 50[a], 51[b] et 42[a,b] par l'application des lem. 17[c] et 19[c,j,i]), on parvient aussitôt aux inclusions: $\mathbf{S}_\beta \mathring{\subset} \mathbf{R}_\beta$ et $\mathbf{S}_\beta^* \mathring{\subset} \mathbf{R}_\beta$. En appliquant d'autre part les th. 47, 51[c] et 54[c], on obtient les transformations suivantes de la déf. 21: $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) =$

$$= \sum_{\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})} \mathbf{S}^*\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})} \mathbf{S}^*\mathbf{S}_\beta(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K})} \mathbf{S}\mathbf{S}_\beta^*(\mathbf{X});$$

or, les opérations $\mathbf{S}^*\mathbf{S}_\beta$ et $\mathbf{S}\mathbf{S}_\beta^*$ étant monotones (d'après les th. 42[a], 50[a] et les lem. 19[g], 16[c]), on en conclut à l'aide du lem. 15[a] que $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) \subset \mathbf{S}^*\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K})$ et $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K}) \subset \mathbf{S}\mathbf{S}_\beta^*(\mathbf{K})$ pour toute classe $\mathbf{K}$, donc que $\mathbf{R}_\beta \mathring{\subset} \mathbf{S}^*\mathbf{S}_\beta$ et $\mathbf{R}_\beta \mathring{\subset} \mathbf{S}\mathbf{S}_\beta^*$. Les formules [d]) sont ainsi entièrement établies.

Pour démontrer les identités [e]), observons qu'en vertu de [a]) et du lem. 19[i] on a $\mathbf{R}_\beta^* \in \mathfrak{A}_\beta$; comme d'autre part $\mathbf{S}\mathbf{S}_\beta^* \mathring{\subset} \mathbf{S}\mathbf{S}^*$ (th. 51[b], lem. 19[c], th. 42[a], déf. 12[a]), on déduit de [d]) à l'aide du lem. 19[b,c,e]: $\mathbf{R}_\beta^* \mathring{\subset} [\mathbf{S}^*\mathbf{S}_\beta]^* \stackrel{\circ}{=} \mathbf{S}\mathbf{S}_\beta^* \mathring{\subset} \mathbf{S}\mathbf{S}^*$. En posant donc dans [c]): $\mathbf{F} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta$, nous en concluons que $\mathbf{R}_\beta^* \mathring{\subset} \mathbf{R}_\beta$, d'où par l'application du lem. 19[b,c]: $\mathbf{R}_\beta \stackrel{\circ}{=} [\mathbf{R}_\beta^*]^* \mathring{\subset} \mathbf{R}_\beta^*$ et finalement: $\mathbf{R}_\beta^* \stackrel{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta$. En raison du lem. 19[a], cette dernière formule donne en outre: $\mathbf{C}\mathbf{R}_\beta \stackrel{\circ}{=} \mathbf{R}_\beta\mathbf{C}$, c. q. f. d.

En ce qui concerne [f]), on raisonnera comme il suit.

Envisageons une classe d'ensembles $\mathbf{X}$ telle que

$$\mathbf{X} \in \mathbf{U}_\beta(\mathbf{K}+\mathbf{L}). \tag{1}$$

Conformément à la déf. 5^{b} on a donc $X \subset K + L$ et $\overline{\overline{X}} < \aleph_\beta$, d'où

$$(2) \qquad X = K \cdot X + L \cdot X,$$

$$(3) \qquad \overline{\overline{K \cdot X}} < \aleph_\beta \quad \textit{et} \quad \overline{\overline{L \cdot X}} < \aleph_\beta.$$

En appliquant le th. 45^{c}, on obtient de (2): $S^*(X) \subset T(K \cdot X) + S^*(L \cdot X)$; l'opération S étant monotone (th. 42^{a}), il s'en suit que $SS^*(X) \subset S(T(K \cdot X) + S^*(L \cdot X))$. D'autre part, le th. 43^{e} pour $K = S^*(L \cdot X)$ et $L = T(K \cdot X)$ donne: $S(T(K \cdot X) + S^*(L \cdot X)) \subset ST(K \cdot X) + T^* S^*(L \cdot X)$. Par conséquent:

$$(4) \qquad SS^*(X) \subset ST(K \cdot X) + T^* S^*(L \cdot X).$$

D'après le th. 43^{b} on a: $ST(K \cdot X) = TS(K \cdot X)$; en tenant compte de (3), on en conclut à l'aide du th. 51^{c} que $ST(K \cdot X) = TS_\beta(K \cdot X)$. Comme $TS_\beta \in \mathfrak{M}$ (en vertu des th. 36^{a}, 50^{a} et du lem. 16^{c}), il en résulte enfin que

$$(5) \qquad ST(K \cdot X) \subset TS_\beta(K).$$

D'une façon analogue on obtient:

$$(6) \qquad T^* S^*(L \cdot X) \subset T^* S^*_\beta(L),$$

et les inclusions (4)—(6) entraînent immédiatement:

$$(7) \qquad SS^*(X) \subset TS_\beta(K) + T^* S^*_\beta(L).$$

Il est ainsi prouvé que toute classe X qui remplit la formule (1) vérifie aussi l'inclusion (7). Par conséquent on a: $\sum_{X \in U_\beta(K+L)} SS^*(X) \subset TS_\beta(K) + T^* S^*_\beta(L)$, d'où en raison de la déf. 21:

$R_\beta(K+L) \subset TS_\beta(K) + T^* S^*_\beta(L)$ *pour toutes deux classes* K *et* L.

A l'aide des déf. 8^{b} et 9^{a} on en déduit sans peine un autre énoncé:

$R_\beta[F \overset{\circ}{+} G] \overset{\circ}{\subset} TS_\beta F \overset{\circ}{+} T^* S^*_\beta G$ *pour toutes deux opérations* F *et* G,

ce qui achève la démonstration de $^{\mathrm{f}}$).

Passons enfin à $^{\mathrm{g}}$). Il résulte de la déf. 21 que

$$(8) \qquad \overline{\overline{R_\beta(K)}} \leqslant \sum_{X \in U_\beta(K)} \overline{\overline{SS^*(X)}}.$$

Suivant le th. 42^{g} et le lem. 19^{1} on a: $\overline{\overline{SS^*(X)}} \leqslant 2^{\overline{\overline{S^*(X)}}} \leqslant 2^{2^{\overline{\overline{X}}}}$ pour toute classe d'ensembles X; par conséquent, si $X \in U_\beta(K)$, donc $\overline{\overline{X}} < \aleph_\beta$, on obtient à l'aide de la déf. 4: $\overline{\overline{SS^*(X)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\beta}}$. Comme de plus, d'après le lem. 10^{c}, $\overline{\overline{U_\beta(K)}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\aleph_\beta}$, on en conclut que

$$(9) \qquad \sum_{X \in U_\beta(K)} \overline{\overline{SS^*(X)}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\aleph_\beta} \cdot 2^{2^{\aleph_\beta}}.$$

Les formules (8) et (9) entraînent immédiatement l'inégalité cherchée:

$$\overline{\overline{R_\beta(K)}} \leqslant (\overline{\overline{K}})^{\aleph_\beta} \cdot 2^{2^{\aleph_\beta}}.$$

Le théorème en question est donc complètement démontré.

Théorème 56. $^{\mathrm{a}}$) *Si* $A \neq 0$ *et* $\beta = sup(\overline{\varphi}(A))$, *on a* $R_\beta \overset{\circ}{=} \overset{\circ}{\sum_{x \in A}} R_{\varphi(x)}$;

$^{\mathrm{b}}$) *si* $\beta \leqslant \gamma$, *on a* $R_\beta \overset{\circ}{\subset} R_\gamma$;

$^{\mathrm{c}}$) *si* $\gamma < \beta$, *on a* $R_\beta R_\gamma \overset{\circ}{=} R_\beta$;

$^{\mathrm{d}}$) *si* $\beta \leqslant cf(\gamma)$, *on a* $R_\beta R_\gamma \overset{\circ}{=} R_\gamma$;

$^{\mathrm{e}}$) *si* $cf(\beta) = \beta$, *on a* $R^2_\beta \overset{\circ}{=} R_\beta$;

$^{\mathrm{f}}$) *si* $cf(\beta) = \beta$, *on a* $[R_\beta[I \overset{\circ}{+} C]]^2 \overset{\circ}{=} R_\beta[I \overset{\circ}{+} C]$.

Démonstration des propositions $^{\mathrm{a}}$)—$^{\mathrm{e}}$) est complètement analogue à celle des parties correspondantes ($^{\mathrm{a}}$)—$^{\mathrm{d}}$) et $^{\mathrm{f}}$)) du th. 52.

Quant à la formule $^{\mathrm{f}}$), on raisonnera comme suit.

En appliquant le lem. 14^{c} et en tenant compte du lem. 17^{b} et du th. 55^{e}, on obtient: $[I \overset{\circ}{+} C] R_\beta \overset{\circ}{=} IR_\beta \overset{\circ}{+} CR_\beta \overset{\circ}{=} R_\beta I \overset{\circ}{+} R_\beta C$; l'opération R_β étant monotone (th. 55^{a}), la déf. 12^{a} donne en outre: $R_\beta I \overset{\circ}{\subset} R_\beta[I \overset{\circ}{+} C]$ et $R_\beta C \overset{\circ}{\subset} R_\beta[I \overset{\circ}{+} C]$, d'où $R_\beta I \overset{\circ}{+} R_\beta C \overset{\circ}{\subset} R_\beta[I \overset{\circ}{+} C]$. Par conséquent,

$$(1) \qquad [I \overset{\circ}{+} C] R_\beta \overset{\circ}{\subset} R_\beta[I \overset{\circ}{+} C].$$

Par une application renouvelée de la déf. 12[a] on déduit de (1): $\mathbf{R}_\beta[[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]\mathbf{R}_\beta]\overset{\circ}{\subset}\mathbf{R}_\beta[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]]$; à l'aide du lem. 14[a,b] on en conclut que

$$(2)\qquad [\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]]\,[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]]\overset{\circ}{\subset}[\mathbf{R}_\beta\mathbf{R}_\beta]\,[[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]\,[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]].$$

Or, la déf. 10 permet d'écrire l'inclusion (2) sous la forme plus simple: $[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]]^2\overset{\circ}{\subset}\mathbf{R}_\beta^2[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]^2$; comme $\mathbf{R}_\beta^2\overset{\circ}{=}\mathbf{R}_\beta$ (suivant la formule [e]) du théorème en question) et $[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]^2\overset{\circ}{=}\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}$ (lem. 18[c]), il s'en suit que

$$(3)\qquad [\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]]^2\overset{\circ}{\subset}\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}].$$

D'autre part on a $\mathbf{I}\overset{\circ}{\subset}\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]$ (th. 55[b], lem. 17[e]), d'où conformément au lem. 17[c]:

$$(4)\qquad \mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]\overset{\circ}{\subset}[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]]\,[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]]\overset{\circ}{=}[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]]^2.$$

Les formules (3) et (4) entraînent tout de suite:

$$[\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}]]^2\overset{\circ}{=}\mathbf{R}_\beta[\mathbf{I}\overset{\circ}{+}\mathbf{C}],\quad \text{c. q. f. d.}$$

Les th. 55[a–c] et 56[a–e] nous renseignent sur plusieurs propriétés de l'opération $\mathbf{R}_\beta$, analogues à celles de $\mathbf{S}_\beta$ et $\mathbf{S}_\beta^*$. Notons encore quelques propriétés de ce genre. On a les formules: $\mathbf{R}_\beta(0)=0$, $\mathbf{R}_\beta(\{A\})=\{A\}$; $\mathbf{\Sigma}\mathbf{R}_\beta\overset{\circ}{=}\mathbf{\Sigma}$ et $\mathbf{\Pi}\mathbf{R}_\beta\overset{\circ}{=}\mathbf{\Pi}$; $\mathbf{M}\mathbf{R}_\beta\overset{\circ}{=}\mathbf{M}$. Par analogie au th. 51[d,e] on peut démontrér les théorémes: *si* $\overline{\overline{\mathbf{K}}}<\aleph_\beta$ *ou* $\overline{\overline{\mathbf{\Sigma}(\mathbf{K})}}<\aleph_\beta$, *on a* $\mathbf{R}_\beta(\mathbf{K})=\mathbf{S}\mathbf{S}^*(\mathbf{K})$; *si* $\overline{\overline{I}}<\aleph_\beta$, *on a* $\mathbf{R}_\beta\overset{\circ}{=}\mathbf{S}\mathbf{S}^*$. Par contre nous ne savons pas, si le th. 52[e,g] se laisse également étendre sur l'opération $\mathbf{R}_\beta$.

Je passe à l'étude des classes closes par rapport aux opérations $\mathbf{S}_\beta$ et $\mathbf{S}_\beta^*$. Il est à remarquer avant tout que cette étude peut se borner aux nombres β qui sont des indices des nombres initiaux réguliers (qui vérifient donc la formule: $cf(\beta)=\beta$). Cela résulte, en effet, du théorème suivant:

Théorème 57. *Si* $cf(\beta)<\beta$, *on a* $\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta)=\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_{\beta+1})$ *et* $\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta^*)=$ $=\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_{\beta+1}^*)$.

D é m o n s t r a t i o n. En posant dans le th. 25: $\mathbf{F}\overset{\circ}{=}\mathbf{S}_\beta$ et $\nu=2$ et en tenant compte du th. 50[b], on obtient: $\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta)=\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta^2)$, d'où suivant le th. 52[g]: $\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta)=\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_{\beta+1})$; selon le cor. 27 on en conclut que $\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta^*)=\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_{\beta+1}^*)$, c. q. f. d.

A l'aide du cor. 22 et du th. 24[d] on peut tirer du théorème précédent quelques corollaires concernant les opérations de la forme $\mathbf{F}\overset{\circ}{+}\mathbf{S}_\beta$ et $\mathbf{F}\overset{\circ}{+}\mathbf{S}_\beta^*$ ($\mathbf{F}$ étant une opération arbitraire), $\mathbf{F}\mathbf{S}_\beta$ et $\mathbf{F}\mathbf{S}_\beta^*$ (où $\mathbf{F}$ est une opération monotone et adjonctive) etc. Je n'insiste pas sur ces questions, car elles n'interviendront pas dans la suite.

L'évaluation de la puissance d'une famille quelconque du type $\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta)$ ou $\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta^*)$ ne comporte pas de difficulté:

Théorème fondamental VIII. *Si* $\overline{\overline{I}}=\aleph_\alpha$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta)}}=$ $=\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta^*)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

D é m o n s t r a t i o n, basée sur le th. 51[b], est tout à fait analogue à celle du th. fond. IV.

Des difficultés beaucoup plus importantes apparaissent dans l'étude des familles telles que $\mathcal{C}\ell(\mathbf{C}\overset{\circ}{+}\mathbf{S}_\beta)$, $\mathcal{C}\ell(\mathbf{T}\overset{\circ}{+}\mathbf{S}_\beta)$, $\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta\overset{\circ}{+}\mathbf{S}_\gamma^*)$ etc. Je vais commencer cette étude par les lemmes suivants:

Lemme 58. *Si* $\overline{\overline{I}}=\aleph_\alpha$, *il existe une classe d'ensembles* $\mathbf{K}$ *vérifiant les formules:* $\mathbf{U}(\mathbf{K})\subset\underset{\mathbf{X}}{E}[\mathbf{K}\cdot\mathbf{T}\mathbf{S}_{p(\alpha)}(\mathbf{X})\subset\mathbf{X}]$ *et* $\overline{\overline{\mathbf{K}}}=2^{\aleph_\alpha}$.

D é m o n s t r a t i o n. Selon le lem. 40 il existe une classe d'ensembles $\mathbf{L}$ telle que

$$(1)\qquad \mathbf{U}(\mathbf{L})\subset\underset{\mathbf{X}}{E}[\mathbf{L}\cdot\mathbf{T}(\mathbf{X})\subset\mathbf{X}]\ \text{ et }\ \overline{\overline{\mathbf{L}}}=2^{\aleph_\alpha}.$$

Nous examinerons ici la famille $\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L})$. Remarquons d'abord que la déf. 5[b] entraîne la formule: $\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{U}_\beta(X)=X$ pour tout ensemble X et tout nombre β. Par conséquent, quels que soient X et Y, si $\mathbf{U}_\beta(X)=\mathbf{U}_\beta(Y)$, on a $\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{U}_\beta(X)=\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{U}_\beta(Y)$, d'où $X=Y$; la fonction $\mathbf{U}_\beta$ est donc biunivoque. Il en résulte en particulier (pour $\beta=p(\alpha)$) que toute classe d'ensembles $\mathbf{X}$ est de la puissance égale à celle de son image $\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{X})$:

$$(2)\qquad \overline{\overline{\mathbf{X}}}=\overline{\overline{\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{X})}}\ \textit{pour toute classe}\ \mathbf{X},$$

d'où selon (1)

$$(3)\qquad \overline{\overline{\overline{\mathbf{U}_{p(\alpha)}}(\mathbf{L})}}=2^{\aleph_\alpha}.$$

Nous allons montrer à présent que la famille $\overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L})$ vérifie la formule

$$(4)\qquad \boldsymbol{U}\,\overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L}) \subset \underset{\mathfrak{X}}{E}\,[\overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L})\cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{S}_{p(\alpha)}(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{X}].$$

Supposons, contrairement à (4), qu'il existe une famille de classes $\mathfrak{X}$ telle que

$$(5)\qquad \mathfrak{X} \subset \overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L}) \quad et \quad \overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L})\cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{S}_{p(\alpha)}(\mathfrak{X}) - \mathfrak{X} \neq 0.$$

(5) implique l'existence d'une classe $\boldsymbol{M}$ satisfaisant aux conditions:

$$(6)\qquad \boldsymbol{M} \in \overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L}) - \mathfrak{X}$$

et

$$(7)\qquad \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{T}\boldsymbol{S}_{p(\alpha)}(\mathfrak{X}).$$

D'après la déf. 17 (pour $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{S}_{p(\alpha)}(\mathfrak{X})$), on conclut de (7) qu'il existe une classe $\boldsymbol{M}_1$ telle que $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{M}_1 \in \boldsymbol{S}_{p(\alpha)}(\mathfrak{X})$. En remplaçant dans la déf. 20 $\boldsymbol{K}$ par $\mathfrak{X}$ et β par $p(\alpha)$, on en déduit l'existence d'une famille $\mathfrak{X}_1$ vérifiant les formules: $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{\Sigma}(\mathfrak{X}_1)$ et $\mathfrak{X}_1 \in \boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(\mathfrak{X})$. On a donc finalement, en raison de la déf. 5[b],

$$(8)\qquad \boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{\Sigma}(\mathfrak{X}_1),$$

$$(9)\qquad \mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X} \quad et \quad \overline{\overline{\mathfrak{X}_1}} < \aleph_{p(\alpha)}.$$

Les formules (5) et (9) donnent: $\mathfrak{X}_1 \subset \overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L})$. A l'aide du théorème connu sur les images des ensembles (*si* $A \subset \overline{f}(B)$, *il existe un ensemble* B_1 *tel que* $A = \overline{f}(B_1)$ *et* $B_1 \subset B$), on en conclut qu'il existe une classe $\boldsymbol{L}_1$ remplissant les conditions:

$$(10)\qquad \mathfrak{X}_1 = \overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L}_1) \quad et \quad \boldsymbol{L}_1 \subset \boldsymbol{L}.$$

Il résulte de (2) et (10) que $\overline{\overline{\mathfrak{X}_1}} = \overline{\overline{\boldsymbol{L}_1}}$, d'où selon (9)

$$(11)\qquad \overline{\overline{\boldsymbol{L}_1}} < \aleph_{p(\alpha)}.$$

En vertu de (6) et (9), $\boldsymbol{M} \in \overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L}_1) - \mathfrak{X}_1$, donc, en raison de (10), $\boldsymbol{M} \in \overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L}) - \overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L}_1)$. En appliquant la formule connue concernant la différence des images ($\overline{f}(A) - \overline{f}(B) \subset \overline{f}(A-B)$), on en obtient ensuite: $\boldsymbol{M} \in \overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}_1)$; par conséquent, suivant la déf. 6, il existe un ensemble A tel que

$$(12)\qquad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(A)$$

et

$$(13)\qquad A \in \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}_1.$$

Selon (1) et (10) $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{L}_1) \subset \boldsymbol{L}_1$; on en obtient à fortiori en vertu de (13): $\{A\}\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{L}_1) \subset \boldsymbol{L}_1 \cdot (\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}_1) = 0$, d'où $A \bar{\in} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{L}_1)$. A l'aide de la déf. 17 on en conclut que $A \bar{\in} \boldsymbol{U}(Z)$, donc que $A - Z \neq 0$ pour tout ensemble Z de la classe $\boldsymbol{L}_1$. En appliquant l'axiome du choix, on peut donc faire correspondre à tout ensemble Z de $\boldsymbol{L}_1$ un élément $f(Z)$ de façon que l'on ait

$$(14)\qquad f(Z) \in A - Z \quad pour \quad Z \in \boldsymbol{L}_1.$$

Il résulte de (14) que $\overline{f}(\boldsymbol{L}_1) \subset A$; on a en outre, d'après le lem. 11[a], $\overline{\overline{\overline{f}(\boldsymbol{L}_1)}} \leqslant \overline{\overline{\boldsymbol{L}_1}}$, d'où, en raison de (11), $\overline{\overline{\overline{f}(\boldsymbol{L}_1)}} < \aleph_{p(\alpha)}$. On en obtient aussitôt: $\overline{f}(\boldsymbol{L}_1) \in \boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(A)$, ce qui, rapproché de (12), donne:

$$(15)\qquad \overline{f}(\boldsymbol{L}_1) \in \boldsymbol{M}.$$

On conclut ensuite de (14) que $\overline{f}(\boldsymbol{L}_1) - Z \neq 0$ pour tout ensemble Z de $\boldsymbol{L}_1$, donc que $\overline{f}(\boldsymbol{L}_1) \bar{\in} \boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(Z)$. Par conséquent, l'ensemble $\overline{f}(\boldsymbol{L}_1)$ n'appartient à aucune des classes formant la famille $\overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L}_1)$, d'où en vertu de (10)

$$(16)\qquad \overline{f}(\boldsymbol{L}_1) \bar{\in} \boldsymbol{\Sigma}(\mathfrak{X}_1).$$

(8) et (16) donnent tout de suite:

$$(17)\qquad \overline{f}(\boldsymbol{L}_1) \bar{\in} \boldsymbol{M}.$$

Or, les formules (15) et (17) étant contradictoires, la supposition (5) est fausse, et la famille $\overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L})$ vérifie en conséquence la formule (4).

Observons encore que pour $X \in \boldsymbol{L}$ on a évidemment $X \subset 1$, d'où $\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(X) \subset \boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(1)$ et $\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(X) \in \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(1)$; il en résulte que

$$(18)\qquad \overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}}(\boldsymbol{L}) \subset \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(1).$$

Si l'on remplace enfin dans le lem. 10[d] A par 1 et β par $p(\alpha)$, on obtient par hypothèse:

$$(19)\qquad \overline{\overline{\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(1)}} = \aleph_\alpha = 1.$$

Posons momentanément: $1^* = U_{\rho(\alpha)}(1)$ et $K^* = \overline{U_{\rho(\alpha)}}(L)$. Les formules (3), (4) et (18) montrent que pour l'ensemble 1^* on peut construire une classe de ses sous-ensembles K^* qui vérifie la thèse du lemme en question. Il est évident que l'existence d'une telle classe de sous-ensembles constitue une propriété de l'ensemble invariante par rapport à toutes les transformations biunivoques; par conséquent, lorsque cette propriété se présente pour un ensemble, elle se présente nécessairement pour tout ensemble de la même puissance. Or, en vertu de (19), les ensembles 1^* et 1 ont les puissances égales; on peut donc construire dans l'ensemble 1 une classe d'ensembles K remplissant les deux conditions de la thèse, c. q f. d.

Dans cette démonstration nous étions contraints d'élargir le domaine primitif des opérations T et S_β et de les appliquer non aux classes d'ensembles, mais aux familles de telles classes; nous avons établi ainsi une propriété des ensembles de rang inférieur par intermédiaire des ensembles de rang supérieur. On applique fréquemment une pareille méthode de raisonnement dans les diverses démonstrations du domaine de la Théorie générale des Ensembles; cependant, aussi bien dans notre cas particulier que dans d'autres cas, la question, si cette *méthode du passage par les ensembles de rang supérieur* est inévitable, reste encore ouverte.

Lemme 59. *Si la classe d'ensembles* K *vérifie les formules*: $U(K) \subset \underset{X}{E}[K \cdot TS_\beta(X) \subset X]$ *et* $\overline{\overline{K}} \geqslant \aleph_\beta$, *on a aussi*:

[a]) $U(K) \subset \underset{X}{E}[K \cdot CTS_\beta(X) \subset X]$;

[b]) $U(K) \subset \underset{X}{E}[K \cdot R_\beta[I \overset{\circ}{+} C](X) \subset X]$.

D é m o n s t r a t i o n. [a]) Supposons, contrairement à la thèse du lemme, que

$$U(K) - \underset{X}{E}[K \cdot CTS_\beta(X) \subset X] \neq 0; \tag{1}$$

ils existent donc une classe d'ensemble L et un ensemble A qui satisfont aux conditions:

$$L \subset K, \quad A \in K \tag{2}$$

et

$$A \in CTS_\beta(L). \tag{3}$$

En appliquant successivement la déf. 14 à la classe $K = TS_\beta(L)$, la déf. 17 à $K = S_\beta(L)$ et la déf. 20 à $K = L$, on déduit de (3) l'existence d'une classe M qui vérifie les formules:

$$\overline{\overline{M}} < \aleph_\beta, \tag{4}$$

$$M \subset L \tag{5}$$

et

$$1 - A \subset \Sigma(M). \tag{6}$$

La formule (4) entraîne:

$$\overline{\overline{M + \{A\}}} < \aleph_\beta; \tag{7}$$

or, K étant par hypothèse de puissance $\geqslant \aleph_\beta$, on en conclut que

$$K - (M + \{A\}) \neq 0. \tag{8}$$

En rapprochant d'autre part (2) et (6), on obtient: $M + \{A\} \subset K$; d'après l'hypothèse du lemme il en résulte que

$$K \cdot TS_\beta(M + \{A\}) \subset M + \{A\}. \tag{9}$$

L'inclusion (6) donne notoirement: $\Sigma(M + \{A\}) = \Sigma(M) + A = 1$. En raison du th. 43[a] il s'en suit que $TS(M + \{A\}) = U(1)$; comme en outre $S_\beta(M + \{A\}) = S(M + \{A\})$ (suivant le th. 51[c] et la formule (7)), on a finalement:

$$TS_\beta(M + \{A\}) = U(1). \tag{10}$$

Or, la formule (10) veut dire que la classe $TS_\beta(M + \{A\})$ se compose de tous les ensembles possibles (contenus dans 1). On a par conséquent $K \subset TS_\beta(M + \{A\})$, d'où suivant (9):

$$K \subset M + \{A\}. \tag{11}$$

La contradiction évidente entre les formules (8) et (10) réfuse la supposition (1); nous sommes donc contraints d'admettre que

$$U(K) \subset \underset{X}{E}[K \cdot CTS_\beta(X) \subset X], \quad \text{c. q. f. d.}$$

[b]) Conformément aux déf. 9[a] et 13 et en vertu du th. 55[f], on a pour toute classe d'ensembles X: $R_\beta[I + C](X) = R_\beta(X + C(X)) \subset$

$\subset TS_\beta(X)+T^*S^*_\beta C(X)$, d'où, en raison du lem. 19$^{\mathrm{a}}$, $R_\beta[I\dotplus C](X)\subset \subset TS_\beta(X)+CTS_\beta(X)$. Il s'en suit aussitôt que

(12) $K\cdot R_\beta[I\dotplus C](X)\subset K\cdot TS_\beta(X)+K\cdot CTS_\beta(X)$ *pour tout* X.

Or, soit $X\subset K$; l'hypothèse du lemme et la formule $^{\mathrm{a}}$) qui vient d'être établie impliquent alors: $K\cdot TS_\beta(X)\subset X$ et $K\cdot CTS_\beta(X)\subset X$; en le rapprochant de (12), nous en concluons que $K\cdot R_\beta[I\dotplus C](X)\subset X$. Par conséquent,

$$U(K)\subset \underset{X}{E}[K\cdot R_\beta[I\dotplus C](X)\subset X],\quad \text{c. q. f. d.}$$

Sans changer la démonstration précédente, on peut remplacer dans le lem. 59 la formule $^{\mathrm{a}}$) par la formule plus forte qui suit: $U(K)\subset \underset{X}{E}[K\cdot CTS_\beta(X)=0]$ Une remarque analogue s'applique au lem. 35 du § 3.

Corollaire 60. *Si* $\overline{\overline{I}}=\aleph_\alpha$, *il existe une classe d'ensembles* K *vérifiant les formules:* $U(K)\subset \underset{X}{E}[K\cdot R_{p(\alpha)}[I\dotplus C](X)\subset X]$ *et* $\overline{\overline{K}}=2^{\aleph_\alpha}$.

Démonstration. Conformément au lem. 58, il existe une classe K telle que $U(K)\subset \underset{X}{E}[K\cdot TS_{p(\alpha)}(X)\subset X]$ et $\overline{\overline{K}}=2^{\aleph_\alpha}$; d'après les lem. 4$^{\mathrm{a}}$ et 1$^{\mathrm{a}}$ on a évidemment $\overline{\overline{K}}>\aleph_\alpha\geqslant\aleph_{p(\alpha)}$. En posant donc dans le lem. 59$^{\mathrm{b}}$: $\beta=p(\alpha)$, on se convaint immédiatement que K est la classe cherchée.

Théorème 61. *Si* $\overline{\overline{I}}=\aleph_\alpha$ *et* $\beta\leqslant p(\alpha)$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\dotplus R_\beta)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. En tenant compte que $cf(p(\alpha))=p(\alpha)$ d'après le lem. 4$^{\mathrm{b}}$, on conclut du th. 56$^{\mathrm{f}}$ (pour $\beta=p(\alpha)$) que l'opération $R_{p(\alpha)}[I\dotplus C]$ est itérative: $[R_{p(\alpha)}[I\dotplus C]]^2\doteq R_{p(\alpha)}[I\dotplus C]$; en vertu du th. 55$^{\mathrm{b}}$, il résulte du lem. 17$^{\mathrm{e}}$ que cette opération est de plus adjonctive: $I\overset{\circ}{\subset}R_{p(\alpha)}[I\dotplus C]$. Par conséquent, nous pouvons appliquer le lem. 34$^{\mathrm{b}}$, en y posant: $F\doteq R_{p(\alpha)}[I\dotplus C]$; en rapprochant ce lemme du cor. 60, nous obtenons:

(1) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(R_{p(\alpha)}[I\dotplus C])}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Comme $R_{p(\alpha)}\in\mathfrak{M}$, $I\overset{\circ}{\subset}R_{p(\alpha)}$ (th. 55$^{\mathrm{a,b}}$) et $I\overset{\circ}{\subset}I\dotplus C$, le th 24$^{\mathrm{d}}$ pour $F\doteq R_{p(\alpha)}$ et $G\doteq I\dotplus C$ donne: $\mathcal{C}\ell(R_{p(\alpha)}[I\dotplus C])=$

$=\mathcal{C}\ell(R_{p(\alpha)}\dotplus I\dotplus C)$, d'où suivant (1):

(2) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(R_{p(\alpha)}\dotplus I\dotplus C)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

En raison du th. 56$^{\mathrm{b}}$, l'inégalité: $\beta\leqslant p(\alpha)$, donnée par l'hypothèse, entraîne: $R_\beta\overset{\circ}{\subset}R_{p(\alpha)}$, donc $C\dotplus R_\beta\subset R_{p(\alpha)}\dotplus I\dotplus C$. A l'aide du th. 21$^{\mathrm{a}}$ on en conclut que

(3) $$\mathcal{C}\ell(R_{p(\alpha)}\dotplus I\dotplus C)\subset\mathcal{C}\ell(C\dotplus R_\beta).$$

Les formules (2) et (3) impliquent aussitôt que $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\dotplus R_\beta)}}\geqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$; l'inégalité inverse étant également remplie d'après le th. 32, on a donc finalement:

$$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\dotplus R_\beta)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}},\quad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire 62. *Si* $\overline{\overline{I}}=\aleph_\alpha$, $\beta\leqslant p(\alpha)$ $F\in\mathfrak{A}_\beta$ *et si en outre* $F\overset{\circ}{\subset}S\dotplus S^*$ *ou bien* $F\overset{\circ}{\subset}SS^*$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\dotplus F)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. A l'aide das lem. 17$^{\mathrm{c}}$ et 19$^{\mathrm{j}}$ on déduit sans peine du th. 42$^{\mathrm{a,b}}$ les inclusions: $S\overset{\circ}{\subset}SS^*$ et $S^*\overset{\circ}{\subset}SS^*$, donc également: $S\dotplus S^*\overset{\circ}{\subset}SS^*$. Par conséquent, la formule: $F\overset{\circ}{\subset}S\dotplus S^*$ implique: $F\overset{\circ}{\subset}SS^*$, de sorte qu'il est superflu d'examiner la première de ces inclusions séparément.

Or, conformément au th. 55$^{\mathrm{c}}$, les formules: $F\in\mathfrak{A}_\beta$ et $F\overset{\circ}{\subset}SS^*$ donnent: $F\overset{\circ}{\subset}R_\beta$, donc aussi: $C\dotplus F\overset{\circ}{\subset}C\dotplus R_\beta$, d'où en vertu du th. 21$^{\mathrm{a}}$ $\mathcal{C}\ell(C\dotplus R_\beta)\subset\mathcal{C}\ell(C\dotplus F)$; comme d'après le th. 61 $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\dotplus R_\beta)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$ et en raison du th. 32 $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\dotplus F)}}\leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$, on en obtient tout de suite:

$$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\dotplus F)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}},\quad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème fondamental IX. *Si* $\overline{\overline{I}}=\aleph_\alpha$ *et* $\beta\leqslant p(\alpha)$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C\dotplus S_\beta)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. En vertu des th. 50$^{\mathrm{a}}$ et 51$^{\mathrm{b}}$, ce théorème n'est qu'un cas particulier du corollaire précédent.

Théorème fondamental X. *Si* $\overline{\overline{I}}=\aleph_\alpha$ *et* $\beta\leqslant p(\alpha)$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T\dotplus S_\beta)}}=\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T^*\dotplus S^*_\beta)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. D'après le th. 36[b] l'opération T est itérative ($T^2 \overset{\circ}{=} T$); en vertu du lem. 4[b], le th. 52[f] (pour $\beta = p(\alpha)$) prouve que l'opération $S_{p(\alpha)}$ l'est aussi. Comme de plus $TS_{p(\alpha)} \overset{\circ}{=} S_{p(\alpha)} T$ (th. 51[a]), on en conclut à l'aide du lem. 14[e] que l'opération $TS_{p(\alpha)}$ est également itérative. Suivant le lem. 17[e] et les th. 36[b] et 50[b] l'opération $TS_{p(\alpha)}$ est en outre adjonctive.

Ces faits établis, on raisonne tout comme dans la démonstration du th. 61, à cette différence près qu'au lieu du cor. 60 on fait usage du lem. 58. On parvient ainsi à l'égalité: $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \dotplus S_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$. Or, il résulte du th. 33 et du lem. 19[d] que $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T^* \dotplus S^*_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell([T \dotplus S_\beta]^*)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \dotplus S_\beta)}}$. En rapprochant les deux formules obtenues, on voit donc que

$$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \dotplus S_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T^* \dotplus S^*_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire 63. [a]) *Si $\overline{\overline{I}} = \aleph_\alpha$ et $\beta \leqslant p(\alpha)$, chacune des formules: $F \overset{\circ}{\subset} T \dotplus S_\beta$, $F \overset{\circ}{\subset} TS_\beta$, $F \overset{\circ}{\subset} T^* \dotplus S^*_\beta$ et $F \overset{\circ}{\subset} T^* S^*_\beta$ implique que $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(F)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;*

[b]) *si $\overline{\overline{I}} = \aleph_\alpha$, $\beta \leqslant p(\alpha)$ et $F \in \mathfrak{A}_\beta$, chacune des formules: $F \overset{\circ}{\subset} T \dotplus S$, $F \overset{\circ}{\subset} TS$, $F \overset{\circ}{\subset} T^* \dotplus S^*$ et $F \overset{\circ}{\subset} T^* S^*$ implique que $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(F)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.*

Démonstration est analogue à celle du th. 49 et du cor. 62; pour déduire [b]) de [a]) on fait usage du th. 51[e].

Dans le cor. 63[b] nous avons réussi d'évaluer la puissance des familles $\mathcal{C}\ell(F)$ pour une classe assez vaste d'opérations F, à savoir pour toutes les opérations qui sont à la fois semi-additives au dégré $\beta \leqslant p(\alpha)$ (où $\overline{\overline{I}} = \aleph_\alpha$) et intrinsèques.

Théorème fondamentale XI. *Si $\overline{\overline{I}} = \aleph_\alpha$ et $\beta \leqslant p(\alpha)$, on a*

[a]) $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S \dotplus S^*_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^* \dotplus S_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$,

[b]) $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \dotplus S^*_\gamma)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\gamma \dotplus S^*_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. En raison du th. 51[b] (pour $\beta = \gamma$) et de la formule: $S^*_\gamma \overset{\circ}{\subset} S^* \overset{\circ}{\subset} T$, qui en résulte d'après le lem. 19[b,c], on a les inclusions suivantes: $S \dotplus S^*_\beta \overset{\circ}{\subset} T^* \dotplus S^*_\beta$, $S^* \dotplus S_\beta \overset{\circ}{\subset} T \dotplus S_\beta$, $S_\beta \dotplus S^*_\gamma \overset{\circ}{\subset} T \dotplus S_\beta$ et $S_\gamma \dotplus S^*_\beta \overset{\circ}{\subset} T^* \dotplus S^*_\beta$. En appliquant donc le cor. 59[a] (pour $F \overset{\circ}{=} S \dotplus S^*_\beta$, $F \overset{\circ}{=} S^* \dotplus S_\beta$ etc.), on parvient aussitôt aux formules cherchées.

Comme une autre conséquence du cor. 63[a] citons le suivant

Théorème 64. *Si $\overline{\overline{I}} = \aleph_\alpha$ et $\beta \leqslant p(\alpha)$, on a $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \dotplus R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T^* \dotplus R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S \dotplus R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^* \dotplus R_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.*

Démonstration. A l'aide des th. 36[a], 50[a], 51[b], 55[d] et des lem. 17[c], 19[b,c,g,i] on établit sans peine les inclusions: $R_\beta \overset{\circ}{\subset} TS_\beta$ et $R_\beta \overset{\circ}{\subset} T^*S^*_\beta$, $T \dotplus R_\beta \overset{\circ}{\subset} TS_\beta$, $T^* \dotplus R_\beta \overset{\circ}{\subset} T^*S^*_\beta$, $S \dotplus R_\beta \overset{\circ}{\subset} T^*S^*_\beta$ et $S^* \dotplus R_\beta \overset{\circ}{\subset} TS_\beta$. D'après le cor. 63[a] ces inclusions impliquent les formules cherchées.

Je vais démontrer à présent deux lemmes qui me permettrons de renforcer le résultat du th. fond. XI[b] dans le cas où, en dehors du nombre β, le nombre γ vérifie aussi la formule: $\gamma \leqslant p(\alpha)$.

Lemme 65. *Si $\overline{\overline{K}} = \aleph_\alpha$, il existe une classe L telle que $L \in V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(S_{p(\alpha)} \dotplus S^*_{p(\alpha)})$ et $\overline{\overline{L}} = \aleph_\alpha$.*

Démonstration. En raison du th. 50[a] et du lem. 19[i], on a $S_{p(\alpha)} \in \mathfrak{A}_{p(\alpha)}$ et $S^*_{p(\alpha)} \in \mathfrak{A}_{p(\alpha)}$, d'où suivant le lem. 16[e]

$$S_{p(\alpha)} \dotplus S^*_{p(\alpha)} \in \mathfrak{A}_{p(\alpha)}. \tag{1}$$

D'après le th. 50[f] et le lem. 19[l] (pour $\mathfrak{f}(\overline{\overline{X}}) = (\overline{\overline{X}})^{\underset{\smile}{\aleph_\beta}}$) on a ensuite: $\overline{\overline{S_{p(\alpha)}(X)}} \leqslant (\overline{\overline{X}})^{\underset{\smile}{\aleph_{p(\alpha)}}}$ et $\overline{\overline{S^*_{p(\alpha)}(X)}} \leqslant (\overline{\overline{X}})^{\underset{\smile}{\aleph_{p(\alpha)}}}$, d'où conformément à la déf. 9[b] $\overline{\overline{[S_{p(\alpha)} \dotplus S^*_{p(\alpha)}](X)}} \leqslant \overline{\overline{S_{p(\alpha)}(X)}} + \overline{\overline{S^*_{p(\alpha)}(X)}} \leqslant (\overline{\overline{X}})^{\underset{\smile}{\aleph_{p(\alpha)}}} \cdot 2$ pour toute classe X. Si en outre $\overline{\overline{X}} \geqslant 2$, il résulte du lem. 5[d] que le nombre $(\overline{\overline{X}})^{\underset{\smile}{\aleph_{p(\alpha)}}}$ est transfini ($\geqslant \aleph_{p(\alpha)}$), donc que $(\overline{\overline{X}})^{\underset{\smile}{\aleph_{p(\alpha)}}} \cdot 2 = (\overline{\overline{X}})^{\underset{\smile}{\aleph_{p(\alpha)}}}$; par conséquent, on a dans ce cas:

$$\overline{\overline{[S_{p(\alpha)} \dotplus S^*_{p(\alpha)}](X)}} \leqslant (\overline{\overline{X}})^{\underset{\smile}{\aleph_{p(\alpha)}}} \text{ pour toute classe } X. \tag{2}$$

Or, si $\overline{\overline{X}} < 2$, les th. 50[c,d], 54[a] et le lem. 19[k] impliquent que $S_{p(\alpha)}(X) = X = S^*_{p(\alpha)}(X)$, d'où $[S_{p(\alpha)} \dotplus S^*_{p(\alpha)}](X) = X$; on en conclut sans peine (à l'aide du lem. 5[c]) que la formule (2) est remplie dans ce cas aussi.

A la suite de (1), (2) et du lem. 4[b] les hypothèses du th. 31, si l'on y pose: $F \overset{\circ}{=} S_{p(\alpha)} \dotplus S^*_{p(\alpha)}$ et $\beta = p(\alpha)$, se trouvent remplies;

il en résulte l'existence d'une classe $\boldsymbol{L}$ qui vérifie les formules:

(3) $$\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_{p(\alpha)})$$

et

(4) $$\overline{\overline{\boldsymbol{L}}} \leqslant (\overline{\overline{\boldsymbol{K}}})^{\aleph_{p(\alpha)}}.$$

En vertu de la déf. 5[c] la formule (3) donne: $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{L}$; comme par hypothèse $\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} = \aleph_\alpha$, on en obtient: $\aleph_\alpha \leqslant \overline{\overline{\boldsymbol{L}}}$. D'autre part il résulte du lem 6[a] que $(\overline{\overline{\boldsymbol{K}}})^{\aleph_{p(\alpha)}} = \aleph_\alpha^{\aleph_{p(\alpha)}} = \aleph_\alpha$, d'où selon (4) $\overline{\overline{\boldsymbol{L}}} \leqslant \aleph_\alpha$. En rapprochant ces deux inégalités, on parvient à la formule:

(5) $$\overline{\overline{\boldsymbol{L}}} = \aleph_\alpha.$$

Les formules (3) et (5) prouvent que $\boldsymbol{L}$ est la classe cherchée.

On peut généraliser et compléter le lemme précédent comme suit:

A. *Si* $\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} = \aleph_\alpha$, $\beta \leqslant p(\alpha)$ *et* $\gamma \leqslant p(\alpha)$, *il existe une classe* $\boldsymbol{L}$ *telle que* $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_\gamma)$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_\gamma) \subset \boldsymbol{V}(\boldsymbol{L})$ *et* $\overline{\overline{\boldsymbol{L}}} = \aleph_\alpha$.

Cette dernière proposition embrasse comme un cas particulier le théorème connu, suivant lequel la classe de tous les ensembles boreliens de nombres réels (ou bien de points d'un espace eucliedien quelconque) est de la puissance $2^{\aleph_0}$. Soient, en effet, $\boldsymbol{K}$ la classe de tous les intervalles, $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$ et $\beta = \gamma = 1$; les hypothèses du th. A sont alors remplies (en particulier, les inégalités $\beta \leqslant p(\alpha)$ et $\gamma \leqslant p(\alpha)$ résultent du lem. 4[c]), et on s'aperçoit facilement que la classe $\boldsymbol{L}$ coïncide avec celle des ensembles boreliens.

Le th. A peut être généralisé à son tour de façon suivante:

B. *Si* $cf(max(\beta,\gamma)) = max(\beta,\gamma)$, *alors à toute classe d'ensembles* $\boldsymbol{K}$ *correspond une classe* $\boldsymbol{L}$ *vérifiant les formules:* $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_\gamma)$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_\gamma) \subset \boldsymbol{V}(\boldsymbol{L})$ *et* $\overline{\overline{\boldsymbol{L}}} \leqslant (\overline{\overline{\boldsymbol{K}}})^{\aleph_{max(\beta,\gamma)}}$.

De même que le lem. 65, ce th. B résulte facilement du th. 31. Quant au cas où $cf(max(\beta,\gamma)) < max(\beta,\gamma)$, cf. remarque, p. 222.

Lemme 66. *Si* $\boldsymbol{K} \in \mathcal{Cl}(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_\beta)$, $\boldsymbol{L} \in \mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_\beta)$ *et* $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{L} + \underset{X+Y}{E}[X \in \boldsymbol{K} \text{ et } Y \in \boldsymbol{L}]$, *on a* $\boldsymbol{M} \in \mathcal{Cl}(\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_\beta)$.

Démonstration. Conformément au th. 21[b] et à la déf. 16, les hypothèses du lemme impliquent que

(1) $$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{K} \quad et \quad \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{K},$$

(2) $$\boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{L}) \subset \boldsymbol{L} \quad et \quad \boldsymbol{S}^*_\beta(\boldsymbol{L}) \subset \boldsymbol{L}.$$

A l'aide de l'axiome du choix on peut faire correspondre à tout ensemble Z de la classe $\boldsymbol{M}$ des ensembles $F(Z)$ et $G(Z)$ de façon que l'on ait

(3) $$Z = F(Z) + G(Z),\ F(Z) \in \boldsymbol{K} + \{0\} \ et \ G(Z) \in \boldsymbol{L} + \{0\} \quad pour \ Z \in \boldsymbol{M}$$

(si, en effet $Z \in \boldsymbol{K}$, on pose: $F(Z) = Z$ et $G(Z) = 0$; si $Z \in \boldsymbol{L}$, on pose: $F(Z) = 0$ et $G(Z) = Z$; enfin, dans le cas qui reste: $Z \in \underset{X+Y}{E}[X \in \boldsymbol{K} \ et \ Y \in \boldsymbol{L}]$, on applique l'axiome du choix).

Envisageons une classe arbitraire $\boldsymbol{N}$ vérifiant la formule:

(4) $$\boldsymbol{N} \in \boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{M}) - \{0\},$$

d'où, en raison de la déf. 5[b],

(5) $$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{M}, \quad \overline{\overline{\boldsymbol{N}}} < \aleph_\beta \quad et \quad \boldsymbol{N} \neq 0.$$

Il résulte de (3) et (5) que $\overline{F}(\boldsymbol{N}) \subset \boldsymbol{K} + \{0\}$, $\overline{F}(\boldsymbol{N}) \neq 0$, $\overline{G}(\boldsymbol{N}) \subset \boldsymbol{L} + \{0\}$ et $\overline{G}(\boldsymbol{N}) \neq 0$; on a de plus, en vertu du lem. 11[a], $\overline{\overline{\overline{F}(\boldsymbol{N})}} \leqslant \overline{\overline{\boldsymbol{N}}}$ et $\overline{\overline{\overline{G}(\boldsymbol{N})}} \leqslant \overline{\overline{\boldsymbol{N}}}$, d'où selon (5) $\overline{\overline{\overline{F}(\boldsymbol{N})}} < \aleph_\beta$ et $\overline{\overline{\overline{G}(\boldsymbol{N})}} < \aleph_\beta$. Par conséquent,

(6) $$\overline{F}(\boldsymbol{N}) \in \boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{K} + \{0\}) - \{0\} \ et \ \overline{G}(\boldsymbol{N}) \in \boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{L} + \{0\}) - \{0\}.$$

Suivant (6) $\sum\limits_{Z \in \boldsymbol{N}} F(Z) = \Sigma \overline{F}(\boldsymbol{N}) \in \overline{\Sigma}(\boldsymbol{U}_\beta(\boldsymbol{K} + \{0\} - \{0\})$, donc d'après la déf. 20 et le th. 50[e] $\sum\limits_{Z \in \boldsymbol{N}} F(Z) \in \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K} + \{0\}) = \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K}) + \{0\}$; tenant compte de (1), on en obtient:

(7) $$\sum_{Z \in \boldsymbol{N}} F(Z) \in \boldsymbol{K} + \{0\}.$$

D'une façon complètement analogue on déduit de (6) et (2):

(8) $$\sum_{Z \in \boldsymbol{N}} G(Z) \in \boldsymbol{L} + \{0\}.$$

Remarquons encore la conséquence suivante de (3) et (5):

(9) $$\Sigma(\boldsymbol{N}) = \sum_{Z \in \boldsymbol{N}} Z = \sum_{Z \in \boldsymbol{N}} (F(Z) + G(Z)) = \sum_{Z \in \boldsymbol{N}} F(Z) + \sum_{Z \in \boldsymbol{N}} G(Z).$$

Les formules (7)—(9) montrent que l'ensemble $\Sigma(\mathbf{N})$ peut être présenter sous la forme: $\Sigma(\mathbf{N})=X+Y$, où $X\epsilon\mathbf{K}+\{0\}$ et $Y\epsilon\mathbf{L}+\{0\}$. On a donc: $\Sigma(\mathbf{N})\,\epsilon\, \underset{X+Y}{E}[X\epsilon\mathbf{K}+\{0\} \text{ et } Y\epsilon\mathbf{L}+\{0\}]=\underset{X+Y}{E}[X\epsilon\mathbf{K} \text{ et } Y\epsilon\mathbf{L}]+ +\mathbf{K}+\mathbf{L}+\{0\}$, d'où en vertu de l'hypothèse $\Sigma(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{M}+\{0\}$, c.-à-d. soit $\Sigma(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{M}$, soit $\Sigma(\mathbf{N})\,\epsilon\,\{0\}$. Or, il est à observer que la formule: $\Sigma(\mathbf{N})\,\epsilon\,\{0\}$ entraîne selon (5): $\mathbf{N}=\{0\}$, $\{0\}\subset\mathbf{M}$, donc aussi $\Sigma(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{M}$. Par conséquent, on a en tout cas

$$\Sigma(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{M}. \tag{10}$$

Passons à présent à l'ensemble $\Pi(\mathbf{N})$. La formule aisée à établir de l'algèbre de la logique: $\prod_{x\epsilon A}(F(x)+G(x))-\prod_{x\epsilon A}G(x)\subset \subset\sum_{x\epsilon A}F(x)$ permet de déduire de (3) et (5) que

$$\Pi(\mathbf{N})-\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}G(Z)=\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}(F(Z)+G(Z))-\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}G(Z)\subset\sum_{Z\epsilon\mathbf{N}}F(Z). \tag{11}$$

Il résulte de (7) et (11) que $\Pi(\mathbf{N})-\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}G(Z)\,\epsilon\sum_{X\epsilon\mathbf{K}+\{0\}}\mathbf{U}(X)$, d'où d'après la déf. 17 $\Pi(\mathbf{N})-\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}G(Z)\,\epsilon\,\mathbf{T}((\mathbf{K})+\{0\})$. Or, le lem. 15[b] et le th. 36[a,d] impliquent l'identité: $\mathbf{T}(\mathbf{K}+\{0\})=\mathbf{T}(\mathbf{K})+\mathbf{T}(\{0\})= =\mathbf{T}(\mathbf{K})+\{0\}$. Il s'en suit que $\Pi(\mathbf{N})-\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}G(Z)\,\epsilon\,\mathbf{T}(\mathbf{K})+\{0\}$, d'où selon (1)

$$\Pi(\mathbf{N})-\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}G(Z)\,\epsilon\,\mathbf{K}+\{0\}. \tag{12}$$

D'autre part on a en vertu de (6): $\overline{\Pi}G(\mathbf{N})\,\epsilon\,\overline{\Pi}(\mathbf{U}_\beta(\mathbf{L}+\{0\})-\{0\})$, donc d'après les th. 53 et 54[b] $\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}G(Z)=\Pi\overline{G}(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{L}+\{0\})= =\mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{L})+\{0\}$. On en obtient suivant (2):

$$\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}G(Z)\,\epsilon\,\mathbf{L}+\{0\}. \tag{13}$$

Observons enfin que les formules (3) et (5) entraînent l'inclusion: $\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}G(Z)\subset\Pi(\mathbf{N})$, qui donne à son tour l'égalité:

$$\Pi(\mathbf{N})=(\Pi(\mathbf{N})-\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}G(Z))+\prod_{Z\epsilon\mathbf{N}}G(Z). \tag{14}$$

Ainsi nous avons acquis dans les formules (12)—(14) une représentation de l'ensemble $\Pi(\mathbf{N})$ sous la forme: $\Pi(\mathbf{N})=X+Y$, où $X\,\epsilon\,\mathbf{K}+\{0\}$ et $Y\,\epsilon\,\mathbf{L}+\{0\}$; tout comme auparavant (pour l'ensemble $\Sigma(\mathbf{N})$) nous en concluons que $\Pi(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{M}+\{0\}$, donc que $\Pi(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{M}$ ou bien $\Pi(\mathbf{N})\,\epsilon\,\{0\}$. Or, le cas de $\Pi(\mathbf{N})\,\epsilon\,\{0\}$ peut être éliminé de façon suivante: si $\mathbf{K}\neq 0$, on a en conséquence du th. 36[e] $0\,\epsilon\,\mathbf{T}(\mathbf{K})$, donc selon (1) $0\,\epsilon\,\mathbf{K}$, $\Pi(\mathbf{N})\,\epsilon\,\{0\}\subset\mathbf{K}$, d'où à fortiori $\Pi(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{M}$ ($\mathbf{K}$ étant par hypothèse une sous-classe de $\mathbf{M}$); si par contre $\mathbf{K}=0$, la classe $\mathbf{M}$ coïncide avec $\mathbf{L}$, donc en vertu de (4) $\mathbf{N}\,\epsilon\,\mathbf{U}_\beta(\mathbf{L})-\{0\}$ et, en raison du th. 53, $\Pi(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{L})$, d'où enfin selon (2) $\Pi(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{L}=\mathbf{M}$. Ainsi la formule: $\Pi(\mathbf{N})\,\epsilon\,\{0\}$ entraîne toujours: $\Pi(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{M}$; par conséquent,

$$\Pi(\mathbf{N})\,\epsilon\,\mathbf{M}. \tag{15}$$

Il est donc prouvé que la formule (4) implique constamment (10) et (15). On en obtient les inclusions: $\overline{\Sigma}(\mathbf{U}_\beta(\mathbf{M})-\{0\})\subset\mathbf{M}$ et $\overline{\Pi}(\mathbf{U}_\beta(\mathbf{M})-\{0\}\subset\mathbf{M}$, qui, d'après la déf. 20 et le th. 53, peuvent être exprimées plus court:

$$\mathbf{S}_\beta(\mathbf{M})\subset\mathbf{M} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{M})\subset\mathbf{M}. \tag{16}$$

Conformément à la définition 16, les formules (16) donnent: $\mathbf{M}\,\epsilon\,\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta)\cdot\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}^*_\beta)$; à l'aide du th. 21[b] on en conclut aussitôt que

$$\mathbf{M}\,\epsilon\,\mathcal{C}\ell(\mathbf{S}_\beta\overset{\circ}{+}\mathbf{S}^*_\beta), \quad \text{c. q. f. d.}$$

En analysant cette démonstration, il est facile d'en tirer le lemme suivant:

Soit $\mathbf{K}\overset{*}{+}\mathbf{L}=\mathbf{K}+\mathbf{L}+\underset{X+Y}{E}[X\,\epsilon\,\mathbf{K} \text{ et } Y\,\epsilon\,\mathbf{L}]$ *pour toutes deux classes* $\mathbf{K}$ *et* $\mathbf{L}$; *on a alors* $\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K}\overset{*}{+}\mathbf{L})=\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K})\overset{*}{+}\mathbf{S}_\beta(\mathbf{L})$ *et* $\mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{K}\overset{*}{+}\mathbf{L})\subset\mathbf{T}\,\mathbf{S}_\beta(\mathbf{K})\overset{*}{+}\mathbf{S}^*_\beta(\mathbf{L})$.

On peut démontrer que la classe $\boldsymbol{M}$ examinée dans le lem. 66 est la plus petite classe contenant les classes données $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{L}$ et close par rapport à l'opération $\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_\beta$ (ou — ce qui revient au même — par rapport aux deux opérations $\boldsymbol{S}_\beta$ et $\boldsymbol{S}^*_\beta$ à la fois); elle se laisse donc définir par la formule: $\boldsymbol{M} = \Pi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{L})\cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_\beta + \boldsymbol{S}^*_\beta))$. L'existence d'une classe $\boldsymbol{M}$ jouissant de ces propriétés se déduit dans le cas général du cor. 30 ou bien du th. 31; cependant, dans le cas particulier envisagé ici, à cause des fortes hypothèses faites sur les classes $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{L}$, la structure de la classe $\boldsymbol{M}$ est particulièrement simple.

Théorème 67. *Si* $\overline{\overline{I}} = \aleph_\alpha = \overline{\overline{\boldsymbol{K}}}$ (*où* $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{U}(1)$), $\beta \leqslant p(\alpha)$ *et* $\gamma \leqslant p(\alpha)$, *on a* $\overline{\overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K})\cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_\gamma)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. D'après le lem. 65 il existe une classe $\boldsymbol{L}$ vérifiant les formules:

(1) $$\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{K})\cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_{p(\alpha)})$$

et

(2) $$\overline{\overline{\boldsymbol{L}}} = \aleph_\alpha.$$

Posons pour toute classe d'ensembles $\boldsymbol{M}$:

(3) $$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{M} + \underset{X+Y}{E}[X \in \boldsymbol{L} \text{ et } Y \in \boldsymbol{M}],$$

(4) $$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M}.$$

Envisageons deux classes arbitraires $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ telles que

(5) $$\boldsymbol{M} \in \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_{p(\alpha)}) \text{ et } \boldsymbol{N} \in \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_{p(\alpha)}),$$

(6) $$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{N}) \text{ et } \boldsymbol{G}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{N}).$$

Nous allons montrer que

(7) $$\boldsymbol{M}\cdot \underset{X+Y}{E}[X \in \boldsymbol{L} \text{ et } Y \in \boldsymbol{N}] \subset \boldsymbol{N}.$$

Soit, en effet,

(8) $$Z \in \boldsymbol{M}$$

et

(9) $$Z = X + Y, \text{ où } X \in \boldsymbol{L} \text{ et } Y \in \boldsymbol{N}.$$

En vertu de (9) $X \subset Z$, d'où selon (8) et d'après la déf. 17 $X \in \boldsymbol{T}(\boldsymbol{M})$. Comme, en raison du th. 21[b] et de la déf. 16, (5) donne: $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{M}) \subset \boldsymbol{M}$, on a ensuite $X \in \boldsymbol{M}$, d'où suivant (9) $X \in \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M}$; en tenant compte de (4) et (6), on en obtient: $X \in \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{N}$. Y appartenant à $\boldsymbol{N}$ en vertu de (9), on a par conséquent $\{X, Y\} \subset \boldsymbol{N}$; comme en outre $\overline{\overline{\{X, Y\}}} < \aleph_{p(\alpha)}$ et $\{X, Y\} \neq 0$, on en conclut que $\{X, Y\} \in \boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(\boldsymbol{N}) - \{0\}$, d'où, conformément à la déf. 20 (pour $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{N}$), $Z = \boldsymbol{\Sigma}(\{X, Y\}) \in \overline{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{U}_{p(\alpha)}(\boldsymbol{N}) - \{0\}) = \boldsymbol{S}_{p(\alpha)}(\boldsymbol{N})$. Notons encore que $\boldsymbol{S}_{p(\alpha)}(\boldsymbol{N}) \subset \boldsymbol{N}$ (en conséquence de (6), du th. 21[b] et de la déf. 16). On parvient ainsi à la formule:

(10) $$Z \in \boldsymbol{N}.$$

Il est donc prouvé que les conditions (8) et (9) impliquent toujours (10); par conséquent, l'inclusion (7) se trouve établie.

Remarquons maintenant qu'en vertu de (6) et (4) l'inclusion suivante se vérifie aussi:

(11) $$\boldsymbol{M}\cdot(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{N}) \subset \boldsymbol{N}.$$

Les formules (7) et (11) donnent: $\boldsymbol{M}\cdot(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{N}+\underset{X+Y}{E}[X \in \boldsymbol{L} \text{ et } Y \in \boldsymbol{N}]) \subset \boldsymbol{N}$; si l'on remplaçe dans (3) $\boldsymbol{M}$ par $\boldsymbol{N}$, on en conclut que $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{N}) \subset \boldsymbol{N}$, d'où selon (6) $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}) \subset \boldsymbol{N}$. Comme de plus, en raison de (3), $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{F}(\boldsymbol{M})$, on a finalement

(12) $$\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}.$$

L'inclusion inverse: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{M}$ se déduit d'une façon complètement analogue; en la rapprochant de (12), on obtient donc l'égalité:

(13) $$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}.$$

Nous avons ainsi montré que les formules (5) et (6) entraînent constamment (13). Ce résultat peut être évidemment formulé de la façon suivante: *$\boldsymbol{Y}$ étant une classe quelconque, si* $\boldsymbol{M} \in \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_{p(\alpha)})\cdot \underset{\boldsymbol{X}}{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y}]$, $\boldsymbol{N} \in \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_{p(\alpha)})\cdot \underset{\boldsymbol{X}}{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y}]$ *et* $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{N})$, *on a* $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}$; autrement dit, la fonction $\boldsymbol{G}$ transforme d'une façon biunivoque la famille $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_{p(\alpha)})\cdot \underset{\boldsymbol{X}}{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y}]$ en son image suivant $\boldsymbol{G}$, c.-à-d. en famille $\overline{\boldsymbol{G}}(\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_{p(\alpha)})\cdot \underset{\boldsymbol{X}}{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y}])$. Par conséquent, ces deux familles ont la même puissance:

(14) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_{p(\alpha)})\cdot \underset{\boldsymbol{X}}{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y}]}} = \overline{\overline{\overline{\boldsymbol{G}}(\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_{p(\alpha)})\cdot \underset{\boldsymbol{X}}{E}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{Y}])}}.$$

Remarquons qu'en vertu de (4) $\overline{G}(\mathcal{H}) \subset U(L)$ pour toute famille de classes $\mathcal{H}$, d'où selon (2) et d'après le lem. 10[a] $\overline{\overline{\overline{G}(\mathcal{H})}} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$. Cette inégalité se vérifie, en particulier, pour $\mathcal{H} = \mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)}) \cdot \underset{X}{E}[F(X) = Y]$, ce qui, rapproché de (14), donne:

(15) $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)}) \cdot \underset{X}{E}[F(X) = Y]}} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$ *pour toute classe* Y.

Conformément au th. fond. X (pour $\beta = p(\alpha)$), on a

(16) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}},$$

d'où $2^{\aleph_\alpha} < \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)})}}$. En posant donc dans le lem. 11[c]: $f \doteq F$, $A = \mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)})$ et $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_\alpha}$ et en tenant compte de (15), on s'apercoit aussitôt que les hypothèses de ce lemme sont remplies. Par conséquent, $\overline{\overline{\overline{F}(\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)}))}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)})}}$, d'où suivant (16)

(17) $$\overline{\overline{\overline{F}(\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)}))}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Considérons une classe quelconque M de $\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)})$. En raison de (1) et de (3), le lem. 66, si l'on y remplace K par M, M par $F(M)$ et β par $p(\alpha)$, nous donne: $F(M) \in \mathcal{C}\ell(S_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} S^*_{p(\alpha)})$; il résulte en outre de (1), (3) et de la déf. 5[c] que $K \subset L \subset F(M)$, donc que $F(M) \in V(K)$. Or, ce raisonnement s'appliquant à toute classe M de $\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)})$, on conclut que

(18) $$\overline{F}(\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)})) \subset V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(S_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} S^*_{p(\alpha)}).$$

Conformément au th. 52[b], les inégalités: $\beta \leqslant p(\alpha)$ et $\gamma \leqslant p(\alpha)$, données par l'hypothèse, impliquent que $S_\beta \mathring{\subset} S_{p(\alpha)}$ et $S_\gamma \mathring{\subset} S_{p(\alpha)}$, d'où $S^*_\gamma \mathring{\subset} S^*_{p(\alpha)}$ (lem. 19[c]) et ensuite $S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma \mathring{\subset} S_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} S^*_{p(\alpha)}$ (lem. 13). A l'aide du th. 21[a] (pour $F \doteq S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma$ et $G \doteq S_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} S^*_{p(\alpha)}$) on en obtient: $\mathcal{C}\ell(S_{p(\alpha)} \overset{\circ}{+} S^*_{p(\alpha)}) \subset \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma)$, d'où selon (18)

(19) $$\overline{F}(\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_{p(\alpha)})) \subset V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma).$$

Or, les formules (17) et (19) entraînent tout de suite:

$$\overline{\overline{V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma)}} \geqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Comme l'inégalité inverse: $\overline{\overline{V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ résulte immédiatement du th. fond. XI[b] (ou bien du th. 32), on a finalement:

$$\overline{\overline{V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On peut montrer par un exemple convenablement choisi que les deux inégalités: $\beta \leqslant p(\alpha)$ et $\gamma \leqslant p(\alpha)$, qui figurent dans l'hypothèse de ce dernier théorème, sont essentielles; il s'en suit à plus forte raison que l'opération S^*_γ ne s'y laisse remplacer ni par S^* ni par T. Il semble, par contre, probable, bien que je ne sache pas le démontrer, qu'il est possible de remplacer l'opération S^*_γ dans le th. 67 par C et de renforcer ainsi le th. fond. IX.

Quant à l'opération R_β, un résultat analogue ne se laisse établir pour elle que sous des restrictions supplémentaires, notamment dans la forme du théorème

A. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha = \overline{\overline{K}}$ (*où* $K \subset U(1)$), $\beta \leqslant p(\alpha)$ *et* $2^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha$, *on a* $\overline{\overline{V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(R_\beta)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

La démonstration s'appuie sur le th. 55[g] et sur deux lemmes suivants, qui se déduisent d'une façon analogue aux lem. 65 et 66:

B. *Si* $\overline{\overline{K}} = \aleph_\alpha$, $\beta \leqslant p(\alpha)$ *et* $2^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha$, *il existe une classe* L *telle que* $L \in V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(R_\beta)$ *et* $\overline{\overline{L}} = \aleph_\alpha$.

C. *Si* $K \in \mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_\beta)$, $L \in \mathcal{C}\ell(R_\beta)$ *et* $M = K + L + \underset{X+Y}{E}[X \in K$ *et* $Y \in L]$, *on a* $M \in \mathcal{C}\ell(R_\beta)$.

Notons que la formule: $\beta \leqslant p(\alpha)$, resp. $\gamma \leqslant p(\alpha)$, est en tout cas remplie, lorsque $\beta = 0$, resp. $\gamma = 0$; cette remarque permet de déduire du th. fond. X et du th. 67 quelques corollaires que je ne formulerai pas ici explicitement. Le cas plus intéressant est celui où β, resp. $max(\beta, \gamma)$, est un nombre de 1[re] espèce et $\aleph = a^{\aleph_{\beta-1}}$, resp. $= a^{\aleph_{max(\beta,\gamma)-1}}$; à cause du lem. 4[c], les inégalités en question sont vraies aussi dans ce cas. En particulier, on obtient par cette voie le suivant

Corollaire 68. [a]) *Si* 1 *est l'ensemble de tous les nombres réels (ou, d'une façon plus générale, un ensemble de la puissance* $2^{\aleph_0}$*), on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S_1)}} = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$;

[b]) *si, en outre,* K *est la classe de tous les intervalles de nombres réels (ou, plus généralement, une classe quelconque de la puissance* $2^{\aleph_0}$ *de sous-ensembles de* 1*), on a* $\overline{\overline{V(K) \cdot \mathcal{C}\ell(S_1 \overset{\circ}{+} S^*_1)}} = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$.

Démonstration. Lorsque $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$, le lem. 4[c] donne: $0 < p(\alpha)$, d'où $1 \leqslant p(\alpha)$. Si l'on pose, par conséquent, dans les th. X et 67: $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$ et $\beta = 1$, resp. $\beta = \gamma = 1$, les hypothèses de ces théorèmes se trouvent remplies, et on obtient les formules cherchées.

Ce corollaire présente la solution des problèmes qui m'ont été posés par MM. Poprougénko et Sierpiński [1]). Comme on voit facilement, la famille $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_1 \mathring{+} \boldsymbol{S}_1^*)$, considérée dans le cor. 68[b], coïncide avec celle de toutes les *classes d'ensembles inductives* au sens de M. Lusin [2]); la plus petite classe $\boldsymbol{L}$ de cette famille, $\boldsymbol{L} = \Pi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_1 \mathring{+} \boldsymbol{S}_1^*))$, est notoirement celle de tous les ensembles boreliens [2]).

Il est à noter, au sujet des remarques faites sur le th. 67 (p. 275), que même dans le cas particulier de ce théorème, à savoir dans le cor. 68[b], l'opération $\boldsymbol{S}_1^*$ ne peut être remplacée ni par $\boldsymbol{S}^*$ ni par $\boldsymbol{T}$ ni par $\boldsymbol{R}_1$ (car la famille $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_1 \mathring{+} \boldsymbol{S}^*) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_1 \mathring{+} \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{R}_1)$, où $\boldsymbol{K}$ est la classe de tous les intervalles, ne contient qu'un seul élément, notamment la classe de tous les ensembles de nombres réels). Nous ignorons cependant, si l'on ne peut remplacer $\boldsymbol{S}_1^*$ par $\boldsymbol{C}$, c.-à-d., si *les classes d'ensembles de nombres réels, contenant tous les intervalles, toutes les sommes des infinités dénombrables et tous les complémentaires de ses éléments, forment une famille de puissance* $2^{2^{\aleph_0}}$.

Or, on peut renforcer le cor. 68[b], en y remplaçant les opérations $\boldsymbol{S}_1$ et $\boldsymbol{S}_1^*$ par des opérations quelconques d'une vaste classe que M. Hausdorff appelle δs- (resp. σd-) *Funktionen*, donc p. ex. par l'opération $\boldsymbol{A}$ de M. Souslin et son opération double $\boldsymbol{A}^*$ [3]). Par une extension convenable de cette notion de M. Hausdorff on parvient même à une généralisation du th. 67 [4]).

Les résultats obtenus jusqu'ici ne nous fournissent aucun moyen d'évaluer la puissance des familles $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{S}_\beta)$, $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{T} \mathring{+} \boldsymbol{S}_\beta)$, $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_\beta \mathring{+} \boldsymbol{S}_\gamma^*)$ etc. dans le cas où le nombre β (resp. les deux nombres β et γ) est $> p(\alpha)$ $\aleph_\alpha$ désignant la puissance de l'ensemble universel 1. Ce cas offre des difficultés tout à fait essentielles. A vrai dire, nous ne pourrions aboutir ici à des conclusions défi-

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Sur les familles inductives et projectives d'ensembles*, Fund. Math. XIII, p. 228.

[2]) Cf. p. 268.

[3]) F. Hausdorff, Mengenlehre, II Aufl., Berlin und Leipzig 1927, p. 89—93.

[4]) L'extension de certains résultats obtenus dans cet ouvrage aux opérations de M. Hausdorff fera objet d'une note spéciale (à paraître dans ce Journal).

nitives que dans le cas où les nombres envisagés β et γ dépassent non seulement $p(\alpha)$, mais aussi α; en effet, à la suite du th. 52[d], les familles en question coïncident alors avec celles qui ont été examinées dans les th. fond. V—VII du § précédent, de sorte que chacune de ces familles est de la puissance $2^{\aleph_\alpha}$. Nous montrerons dans la suite que le même résultat se laisse aussi obtenir dans les hypothèses plus générales: $\beta > p(\alpha)$, resp. $\gamma > p(\alpha)$, à condition toutefois d'admettre comme base des raisonnements l'hypothèse H, c.-à-d. l'hypothèse de Cantor sur les alephs, dont il a été question dans le § 1 (p. 193). A ce but, nous allons déterminer d'abord certaines limites pour les puissances des familles examinées, sans nous servir pour le moment de l'hypothèse H.

Théorème 69. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, $\beta > cf(\alpha)$ *et* $\gamma > cf(\alpha)$, *on a*

$$2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_\beta \mathring{+} \boldsymbol{S}_\gamma^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Démonstration. En raison du th. 51[b] et du lem. 19[b,c] on a: $\boldsymbol{S}_\beta \mathring{\subset} \boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S}_\gamma^* \mathring{\subset} \boldsymbol{S}^* \mathring{\subset} \boldsymbol{T}$, d'où $\boldsymbol{S}_\beta \mathring{+} \boldsymbol{S}_\gamma^* \mathring{\subset} \boldsymbol{T} \mathring{+} \boldsymbol{S}$; par l'application du th. 49 (pour $\boldsymbol{F} \mathring{=} \boldsymbol{S}_\beta \mathring{+} \boldsymbol{S}_\gamma^*$) on en obtient:

$$(1) \qquad 2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_\beta \mathring{+} \boldsymbol{S}_\gamma^*)}}.$$

Le lemme 2[b] (pour $A = 1$) implique l'existence d'une suite d'ensembles A_ξ du type $\omega_{cf(\alpha)}$ vérifiant les formules:

$$(2) \qquad 1 = \sum_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} A_\xi,$$

$$(3) \qquad A_\xi \subset A_\eta, \text{ lorsque } \xi \leqslant \eta < \omega_{cf(\alpha)},$$

et

$$(4) \qquad \overline{\overline{A_\xi}} < \aleph_\alpha \text{ pour } \xi < \omega_{cf(\alpha)}.$$

$\boldsymbol{M}$ étant une classe quelconque d'ensembles, posons:

$$(5) \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{M}) = \underset{A_\xi \cdot X}{E}[\xi < \omega_{cf(\alpha)} \text{ et } X \in \boldsymbol{M}].$$

$$(6) \qquad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M} \cdot \sum_{\xi < \omega_{cf(\alpha)}} \boldsymbol{U}(A_\xi).$$

Soient $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ deux classes assujetties aux conditions:

$$(7) \qquad \boldsymbol{M} \in \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_\beta \mathring{+} \boldsymbol{S}_\gamma^*) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{N} \in \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_\beta \mathring{+} \boldsymbol{S}_\gamma^*),$$

$$(8)\qquad \mathbf{F}(\mathbf{M})=\mathbf{F}(\mathbf{N}) \quad et \quad \mathbf{G}(\mathbf{M})=\mathbf{G}(\mathbf{N});$$

nous montrerons que ces classes coïncident.

A ce but envisageons un ensemble arbitraire X tel que

$$(9)\qquad X \in \mathbf{M}.$$

On conclut aisément de (6), (8) et (9) que

$$(10)\qquad la\ formule\colon X \in \sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi) \ entraîne\colon X \in \mathbf{N}.$$

Or, admettons dans la suite que

$$(11)\qquad X \mathrel{\bar{\in}} \sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi).$$

On a évidemment selon (2):

$$(12)\qquad X=\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} A_\xi \cdot X.$$

Soit ξ un nombre ordinal vérifiant l'inégalité:

$$(13)\qquad \xi<\omega_{cf(\alpha)}.$$

Il existe sans doute un nombre ξ_1 tel que

$$(14)\qquad \xi \leqslant \xi_1 < \omega_{cf(\alpha)} \quad et \quad A_{\xi_1}\cdot X - \sum_{\eta<\xi_1} A_\eta \cdot X \neq 0,$$

car dans le cas contraire les formules (3), (12) et (13) donneraient: $X=A_\xi \cdot X \in \sum\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \mathbf{U}(A_\xi)$, en contradiction avec (11).

En vertu de (5), (9) et (13) on a $A_{\xi_1}\cdot X \in \mathbf{F}(\mathbf{M})$, d'où selon (8) $A_{\xi_1}\cdot X \in \mathbf{F}(\mathbf{N})$. En appliquant une fois encore la formule (5) (pour $\mathbf{M}=\mathbf{N}$), on en conclut qu'il existe un nombre ξ_2 et un ensemble Y satisfaisant aux conditions:

$$(15)\qquad \xi_2 < \omega_{cf(\alpha)} \quad et \quad A_{\xi_1}\cdot X = A_{\xi_2}\cdot Y,$$

$$(16)\qquad Y \in \mathbf{N}.$$

Il résulte aussitôt de (15) que

$$(17)\qquad A_{\xi_1}\cdot X = A_{\xi_1}\cdot A_{\xi_2}\cdot X = A_{\xi_1}\cdot A_{\xi_2}\cdot Y.$$

Si l'on avait $\xi_2<\xi_1<\omega_{cf(\alpha)}$, on obtiendrait de (3): $A_{\xi_2}\subset A_{\xi_1}$, d'où, en vertu de (17), $A_{\xi_1}\cdot X = A_{\xi_2}\cdot X$, $A_{\xi_1}\cdot X - A_{\xi_2}\cdot X = 0$, ce qui contredit évidemment à (14). On a par conséquent, en raison de (14) et (15), $\xi_1 \leqslant \xi_2 < \omega_{cf(\alpha)}$, d'où suivant (3) $A_{\xi_1}\subset A_{\xi_2}$; cette inclusion, rapprochée de (17), donne: $A_{\xi_1}\cdot X = A_{\xi_1}\cdot Y$. On en obtient ensuite: $A_\xi \cdot A_{\xi_1}\cdot X = A_\xi \cdot A_{\xi_1}\cdot Y$; comme en outre, selon (3) et (14), $A_\xi \subset A_{\xi_1}$, on a finalement

$$(18)\qquad A_\xi \cdot X = A_\xi \cdot Y.$$

Il est ainsi prouvé que pour tout nombre ξ vérifiant l'inégalité (13) il existe un ensemble Y remplissant les formules (16) et (18). A l'aide de l'axiome du choix on peut donc faire correspondre d'une façon univoque à tout $\xi<\omega_{cf(\alpha)}$ un ensemble Y assujetti à ces conditions; en d'autres termes, il existe une suite d'ensembles B_ξ (du type $\omega_{cf(\alpha)}$) vérifiant les formules suivantes:

$$(19)\qquad A_\xi \cdot X = A_\xi \cdot B_\xi \ pour \ \xi<\omega_{cf(\alpha)}$$

et

$$(20)\qquad B_\xi \in \mathbf{N}, \ lorsque \ \xi<\omega_{cf(\alpha)}.$$

Toute suite d'ensembles croissants est, comme on sait, une suite convergente dans le sens de la déf. 7[c], et sa limite est égale à l'ensemble-somme de tous ses termes. Cela concerne, en particulier, des suites A_ξ et $A_\xi \cdot B_\xi$ du type $\omega_{cf(\alpha)}$, qui en raison de (3) et (19) sont des suites d'ensembles croissants. D'après (1), (12) et (19), on a donc

$$(21)\qquad \lim_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} A_\xi = 1, \ \lim_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} (A_\xi \cdot B_\xi) = X.$$

En posant dans le lem. 12[b]: $F_\xi = B_\xi$ et $G_\xi = A_\xi$ (et en y remplaçant α par $\omega_{cf(\alpha)}$), on conclut de (21) que la suite d'ensembles $B_\xi \cdot \lim\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} A_\xi$ est également convergente et qu'on a $\lim\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} (B_\xi \cdot \lim\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} A_\xi) = \lim\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} (A_\xi \cdot B_\xi)$, d'où $\lim\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} B_\xi = X$. Conformément à la déf. 7[b,c], il s'en suit en particulier que $X=\overline{\lim\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}} B_\xi$, donc que

$$(22)\qquad X=\prod_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \sum_{\xi\leqslant\eta<\omega_{cf(\alpha)}} B_\eta.$$

En vertu de (20) on a $\underset{B_\eta}{E}[\xi\leqslant\eta<\omega_{cf(\alpha)}]\subset \mathbf{N}$; à cause de l'inégalité: $\beta > cf(\alpha)$, donnée par l'hypothèse, on obtient de plus sans peine: $\overline{\overline{\underset{B_\eta}{E}[\xi\leqslant\eta<\omega_{cf(\alpha)}]}}\leqslant\aleph_{cf(\alpha)}<\aleph_\beta$. A l'aide de la déf. 2^{b} on en conclut que la classe $\underset{B_\eta}{E}[\xi\leqslant\eta<\omega_{cf(\alpha)}]$ appartient à la famille $U_\beta(N)$ et même à la famille $U_\beta(N)-\{0\}$ dans le cas où $\xi<\omega_{cf(\alpha)}$. Par conséquent, $\sum_{\xi\leqslant\eta<\omega_{cf(\alpha)}} B_\eta=\Sigma\,(\underset{B_\eta}{E}[\xi\leqslant\eta<\omega_{cf(\alpha)}])\,\epsilon\,\overline{\Sigma}\,(U_\beta(N)-\{0\})$, donc en raison de la déf. 20

$$\sum_{\xi\leqslant\eta<\omega_{cf(\alpha)}} B_\eta\,\epsilon\,S_\beta(N)\ \textit{pour}\ \xi<\omega_{cf(\alpha)}. \tag{23}$$

Or, en vertu de (7) et du th. 21^{b} on a $N\,\epsilon\,\mathcal{C}\ell(S_\beta)$, d'où suivant la déf. 16 $S_\beta(N)\subset N$; en rapprochant cette inclusion de (23), on en déduit:

$$\sum_{\xi\leqslant\eta<\omega_{cf(\alpha)}} B_\eta\,\epsilon\,N\ \textit{pour}\ \xi<\omega_{cf(\alpha)}. \tag{24}$$

Par un raisonnement analogue (à cette différence près qu'au lieu de (20) et de la déf. 20 on a recours à la formule (24) et au th. 53) on parvient à la formule: $\prod_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}\sum_{\xi\leqslant\eta<\omega_{cf(\alpha)}} B_\eta\,\epsilon\,N$, qui donne selon (22):

$$X\,\epsilon\,N. \tag{26}$$

La formule (26) est ainsi établie dans l'hypothèse (11). Or, d'après (10), cette formule se présente aussi dans l'hypothèse contraire; par conséquent, elle est généralement remplie.

Il est donc prouvé que la formule (9) entraîne (26), quel que soit l'ensemble X; ce fait peut être exprimé tout court par l'inclusion: $M\subset N$. Comme l'inclusion inverse se laisse établir d'une façon complètement analogue, on a finalement

$$M=N. \tag{27}$$

Nous avons ainsi démontré que toutes deux classes M et N qui remplissent les formules (7) et (8) vérifient également l'identité (27). Ce résultat peut être évidemment resumé dans la proposition suivante: *Y étant une classe quelconque, si $M\,\epsilon\,\mathcal{C}\ell(S_\beta\mathring{+}S_\gamma^*)\cdot\underset{X}{E}[F(X)=Y]$, $N\,\epsilon\,\mathcal{C}\ell(S_\beta\mathring{+}S_\gamma^*)\cdot\underset{X}{E}[F(X)=Y]$ et $G(M)=G(N)$, on a $M=N$.*

Par conséquent, la fonction G transforme d'une façon biunivoque la famille $\mathcal{C}\ell(S_\beta\mathring{+}S_\gamma^*)\cdot\underset{X}{E}[F(X)=Y]$ en son image $\overline{G}(\mathcal{C}\ell(S_\beta\mathring{+}S_\gamma^*)\cdot\underset{X}{E}[F(X)=Y])$, de sorte que

$$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta\mathring{+}S_\gamma^*)\cdot\underset{X}{E}[F(X)=Y]}}=\overline{\overline{\overline{G}(\mathcal{C}\ell(S_\beta\mathring{+}S_\gamma^*)\cdot\underset{X}{E}[F(X)=Y])}} \tag{28}$$

Remarquons qu'en vertu de (6) on a $G(M)\subset\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}U(A_\xi)$ pour toute classe M, donc $\overline{G}(\mathscr{K})\subset U\Big(\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}U(A_\xi)\Big)$ pour toute famille de classes $\mathscr{K}$ et, en particulier,

$$\overline{G}(\mathcal{C}\ell(S_\beta\mathring{+}S_\gamma^*)\cdot\underset{X}{E}[F(X)=Y])\subset U\Big(\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}U(A_\xi)\Big). \tag{29}$$

Or, le lem. 10^{a} donne: $\overline{\overline{U(A_\xi)}}\leqslant 2^{\overline{\overline{A}}_\xi}$, d'où en raison de (4) et de la déf. 4 $\overline{\overline{U(A_\xi)}}\leqslant 2^{\aleph_\alpha}$ pour tout $\xi<\omega_{cf(\alpha)}$ et, par conséquent, $\overline{\overline{\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}U(A_\xi)}}\leqslant\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}\overline{\overline{U(A_\xi)}}\leqslant 2^{\aleph_\alpha}\cdot\aleph_{cf(\alpha)}$. Comme de plus, d'après les lem. 5^{d} et 1^{a}, $2^{\aleph_\alpha}\geqslant\aleph_\alpha\geqslant\aleph_{cf(\alpha)}$, donc $2^{\aleph_\alpha}\cdot\aleph_{cf(\alpha)}=2^{\aleph_\alpha}$, on a ensuite $\overline{\overline{\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}U(A_\xi)}}\leqslant 2^{\aleph_\alpha}$. En appliquant une fois encore le lem. 10^{a}, nous en obtenons:

$$\overline{\overline{U\Big(\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}U(A_\xi)\Big)}}\leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}. \tag{30}$$

On déduit facilement de (28)—(30) l'inégalité:

$$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta\mathring{+}S_\gamma^*)\cdot\underset{X}{E}[F(X)=Y]}}\leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}. \tag{31}$$

En posant dans le lem. 11^{b}: $f\doteq F$ et $A=\mathcal{C}\ell(S_\beta\mathring{+}S_\gamma^*)$, on conclut de (31) que

$$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta\mathring{+}S_\gamma^*)}}\leqslant\overline{\overline{\overline{F}(\mathcal{C}\ell(S_\beta\mathring{+}S_\gamma^*))}}\cdot 2^{2^{\aleph_\alpha}}. \tag{32}$$

Il résulte d'autre part de (5) que $F(M)\subset\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}U(A_\xi)$ pour toute classe M, donc que $\overline{F}(\mathscr{K}) \subset U\Big(\sum\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} U(A_\xi)\Big)$ pour toute famille $\mathscr{K}$, d'où, en particulier,

$$(33) \qquad \overline{F}(\mathit{Cl}(S_\beta \dot{+} S_\gamma^*)) \subset U\Big(\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} U(A_\xi)\Big).$$

Les formules (30) et (33) entraînent aussitôt: $\overline{\overline{F(\mathit{Cl}(S_\beta \dot{+} S_\gamma^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$, d'où selon (32) $\overline{\overline{\mathit{Cl}(S_\beta \dot{+} S_\gamma^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}} \cdot 2^{2^{\aleph_\alpha}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}\cdot 2}$. Or, $2^{\aleph_\alpha}$ étant un nombre transfini (en vertu du lem. 5[d]), on a $2^{\aleph_\alpha} \cdot 2 = 2^{\aleph_\alpha}$ et, par conséquent,

$$(34) \qquad \overline{\overline{\mathit{Cl}(S_\beta \dot{+} S_\gamma^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

En rapprochant (1) de (34), on obtient enfin la formule cherchée:

$$2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(S_\beta \dot{+} S_\gamma^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Théorème 70. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *et* $\beta > cf(\alpha)$, *on a*

a) $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(C \dot{+} S_\beta)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

b) $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(T \dot{+} S_\beta)}} = \overline{\overline{\mathit{Cl}(T^* \dot{+} S_\beta^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

c) $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(S \dot{+} S_\beta^*)}} = \overline{\overline{\mathit{Cl}(T^* \dot{+} S_\beta^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. D'après le th. 51[b] et le lem. 19[c] on a: $C \dot{+} S_\beta \subset C \dot{+} S$ et $S_\beta \dot{+} S_\beta^* \mathrel{\dot{\subset}} S \dot{+} S_\beta^* \mathrel{\dot{\subset}} T^* \dot{+} S_\beta^* \subset T^* \dot{+} S^*$, d'où en vertu du th. 21[a]:

$$(1) \qquad \mathit{Cl}(C \dot{+} S) \subset \mathit{Cl}(C \dot{+} S_\beta)$$

et

$$(2) \qquad \mathit{Cl}(T^* \dot{+} S^*) \subset \mathit{Cl}(T^* \dot{+} S_\beta^*) \subset \mathit{Cl}(S \dot{+} S_\beta^*) \subset \mathit{Cl}(S_\beta \dot{+} S_\beta^*).$$

A cause du th. 50[a] on peut appliquer le th. 28[b], en y posant: $F \doteq S_\beta$; on tire: $\mathit{Cl}(C \dot{+} S_\beta) = \mathit{Cl}(C \dot{+} S_\beta \dot{+} S_\beta^*)$, donc en raison du th. 21[b] (pour $F \doteq C$ et $G \doteq S_\beta \dot{+} S_\beta^*$): $\mathit{Cl}(C \dot{+} S_\beta) = \mathit{Cl}(C) \cdot \mathit{Cl}(S_\beta \dot{+} S_\beta^*)$. Par conséquent,

$$(3) \qquad \mathit{Cl}(C \dot{+} S_\beta) \subset \mathit{Cl}(S_\beta \dot{+} S_\beta^*).$$

A l'aide des th. fond. V et VII on déduit facilement de (1) et (2) les inégalités suivantes:

$$(4) \qquad 2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(C \dot{+} S_\beta)}} \quad et \quad 2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(T^* \dot{+} S_\beta^*)}} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(S \dot{+} S_\beta^*)}}.$$

De même, en raison du th. 69 (pour $\gamma = \beta$), les inclusions (2) et (3) donnent:

$$(5) \qquad \overline{\overline{\mathit{Cl}(C \dot{+} S_\beta)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}} \quad et \quad \overline{\overline{\mathit{Cl}(T^* \dot{+} S^*)}} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(S \dot{+} S_\beta^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Il résulte du lem. 19[d,b] que $[T \dot{+} S_\beta]^* \doteq T^* \dot{+} S_\beta^*$ et que $[S \dot{+} S_\beta^*]^* \doteq S^* \dot{+} S_\beta$; en appliquant donc à deux reprises le th. 33, on conclut enfin que

$$(6) \qquad \overline{\overline{\mathit{Cl}(T \dot{+} S_\beta)}} \doteq \overline{\overline{\mathit{Cl}(T^* \dot{+} S_\beta^*)}} \quad et \quad \overline{\overline{\mathit{Cl}(S \dot{+} S_\beta^*)}} \doteq \overline{\overline{\mathit{Cl}(S^* \dot{+} S_\beta)}}.$$

De (4)—(6) on obtient immédiatement toutes les formules cherchées.

Théorème 71. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *et* $\beta > cf(\alpha)$, *on a*

a) $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(R_\beta)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

b) $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(C \dot{+} R_\beta)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

c) $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(T \dot{+} R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathit{Cl}(T^* \dot{+} R_\beta)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

d) $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathit{Cl}(S \dot{+} R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathit{Cl}(S^* \dot{+} R_\beta)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration est en grands traits analogue à celle du théorème précédent. A l'aide des th 55[d], 51[b], 42[a,b] et des lemmes du § 2 on établit sans peine les inclusions: $S_\beta \dot{+} S_\beta^* \mathrel{\dot{\subset}} R_\beta \mathrel{\dot{\subset}} S^* \dot{+} R_\beta \mathrel{\dot{\subset}} T \dot{+} R_\beta \mathrel{\dot{\subset}} ST$ et $S_\beta \dot{+} S_\beta^* \mathrel{\dot{\subset}} C \dot{+} R_\beta \mathrel{\dot{\subset}} C \dot{+} SS^*$; par l'application du th. 21[a] on en obtient:

$$(1) \qquad \mathit{Cl}(ST) \subset \mathit{Cl}(T \dot{+} R_\beta) \subset \mathit{Cl}(S^* \dot{+} R_\beta) \subset \mathit{Cl}(R_\beta) \subset \mathit{Cl}(S_\beta \dot{+} S_\beta^*)$$

et

$$(2) \qquad \mathit{Cl}(C \dot{+} SS^*) \subset \mathit{Cl}(C \dot{+} R_\beta) \subset \mathit{Cl}(S_\beta \dot{+} S_\beta^*).$$

D'après les th. 24[d], 42[a,b], 36[b] et le lem. 19[j], on a $\mathit{Cl}(ST) = \mathit{Cl}(S \dot{+} T)$ et $\mathit{Cl}(SS^*) = \mathit{Cl}(S \dot{+} S^*)$; en raison du cor. 22 et du th. 28[b], cette dernière formule entraîne: $\mathit{Cl}(C \dot{+} SS^*) =$

$= \mathcal{C}\ell(C \dotplus S \dotplus S^*) = \mathcal{C}\ell(C \dotplus S)$. A l'aide des th. V et VII nous en concluons que

(3) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(ST)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C \dotplus SS^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

Suivant le th. 69 on a en outre:

(4) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \dotplus S_\beta^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Les formules (1)—(4) donnent tout de suite:

(5) $$2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \dotplus R_\beta)}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^* \dotplus R_\beta)}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(R_\beta)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$$

et

(6) $$2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C \dotplus R_\beta)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

Tenant compte du th. 55[e] et appliquant le th. 33 et le lem. 19[d], on parvient ensuite aux égalités:

(7) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \dotplus R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T^* \dotplus R_\beta)}} \text{ et } \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S \dotplus R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^* \dotplus R_\beta)}}.$$

En rapprochant (7) de (5) et (6), on obtient les formules cherchées.

Nous avons examiné dans les th. IX—XI et 69—71 la famille $\mathcal{C}\ell(T \dotplus S_\beta)$ et les autres familles analogues dans les deux cas suivants: $\beta \leqslant p(\alpha)$ et $\beta > cf(\alpha)$ ($\aleph_\alpha$ étant la puissance de l'ensemble 1). Par contre, ces résultats n'embrassent pas le cas où $p(\alpha) < \beta \leqslant cf(\alpha)$; dans ce dernier cas nous ne savons ni évaluer les puissances des familles considérées, ni même établir pour elles des délimitations qui soient intéressantes (si l'on néglige les délimitations assez banales qui résultent du th. 49: $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \dotplus S_\beta)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$). En particulier, il n'est pas élucidé jusqu'à présent, si l'on peut généraliser les th. 69—71, en y remplaçant partout $cf(\alpha)$ par $p(\alpha)$, bien que ce problème ne nous semble pas dépourvu des chances. Cette lacune dans les résultats acquis jusqu'à présent ne se laisse combler qu'à l'aide des raisonnements faisant appel à l'hypothèse H, étant donné que (comme nous l'avons déjà montré par le lem. 9[b]) cette hypothèse exclut le cas où $p(\alpha) < \beta \leqslant cf(\alpha)$.

Théorème fondamental XII. *L'hypothèse H entraîne les conséquences suivantes:*

Si $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *et* $\beta > p(\alpha)$, *on a*

[a]) $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C \dotplus S_\beta)}} = 2^{\aleph_\alpha}$;

[b]) $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \dotplus S_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T^* \dotplus S_\beta^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$;

[c]) $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S \dotplus S_\beta^*)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^* \dotplus S_\beta)}} = 2^{\aleph_\alpha}$;

[d]) *si en outre* $\gamma > p(\alpha)$, *alors* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \dotplus S_\gamma^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Démonstration. Il suffit de rappeler qu'en conséquence de l'hypothèse H on a les formules: $cf(\alpha) = p(\alpha)$ et $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha$ (lem. 9[a,b]), et d'appliquer ensuite les th. 69 et 70.

D'une façon analogue on déduit du th. 71 le

Théorème 72. *L'hypothèse H entraîne la conséquence suivante:*

Si $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *et* $\beta > p(\alpha)$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(C \dotplus R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \dotplus R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T^* \dotplus R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S \dotplus R_\beta)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^* \dotplus R_\beta)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Il est intéressant d'examiner les difficultés auxquelles doivent se heurter nécessairement toutes les tentatives d'éviter l'hypothèse H dans les démonstrations des th. XII et 72.

Supposons, en effet, que nous réussîmes de démontrer une de ces formules, p. ex. le th. XII[b], sans cette hypothèse. Nous obtenons comme cas particulier (pour $\alpha = \omega$ et $\beta = 1$) la proposition suivante:

A. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\omega$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \dotplus S_1)}} = 2^{\aleph_\omega}$.

Admettons ensuite que l'hypothèse ordinaire du continu: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ soit vraie. En vertu du théorème connu de M. Bernstein[1]), nous aurons alors pour tout nombre ordinal α tel que $0 < \alpha < \omega$ les égalités: $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha \cdot 2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha \cdot \aleph_1 = \aleph_\alpha$, donc, par suite du lem. 4[c], $p(\alpha) \leqslant 1$. En posant: $\beta = 1$ dans le th. X, on obtient par conséquent:

B. *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *et* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$, *où* $0 < \alpha < \omega$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(T \dotplus S_1)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

La proposition B peut être généralisée facilement comme il suit:

C. *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *et* $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ *où* $0 < \alpha < \omega$, *on a* $\overline{\overline{UU(A) \cdot \mathcal{C}\ell(T \dotplus S_1)}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ [2]).

[1]) *Untersuchungen aus der Mengenlehre* (*Inaugural-Dissertation*), Halle a. S. 1901, p. 49 (ou Math. Ann. 61).

[2]) Au fond cette „généralisation" est illusoire, car la proposition C ne constitue qu'un autre énoncé de la proposition B. J'ai eu, en effet, occasion de mentionner ici plus d'une fois (p. 183, 212) que le symbole 1 joue dans cet ouvrage

Prenant pour $\mathit{1}$ un ensemble arbitraire de la puissance $\aleph_\omega$ et considérant son sous-ensemble quelconque A de la puissance $\aleph_\alpha$ où $\alpha < \omega$, on déduit des propositions A et C la conséquence:

D. *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *et* $\alpha < \omega$, *on a* $2^{2^{\aleph_\alpha}} \leqslant 2^{\aleph_\omega}$ *et* $2^{\aleph_\alpha} < 2^{\aleph_\omega}$.

Or, toutes les tentatives d'établir à l'aide de l'hypothèse ordinaire du continu les inégalités semblables à celles qui constituent la thèse de la proposition D se sont terminées jusqu'à présent par un échec complet.

On doit donc considérer comme peu probable que la proposition A et, par conséquent, le th. XII[b] soient démontrables sans l'hypothèse du continu généralisée.

J'ai signalé dans mes notes antérieures [1]) que certains résultats acquis à l'aide de l'hypothèse H se laissent établir sans elle, à condition toutefois de restreindre le domaine des nombres cardinaux considérés à un système, d'ailleurs assez vaste, des nombres $\aleph_{\pi(\alpha)}$ définies par recurrence comme suit:

$$\aleph_{\pi(0)} = \aleph_0\,; \quad \aleph_{\pi(\alpha)} = 2^{\aleph_{\pi(\alpha-1)}} \textit{ pour } \alpha \textit{ de } 1^{re} \textit{ espèce};$$
$$\aleph_{\pi(\alpha)} = \sum_{\xi<\alpha} \aleph_{\pi(\xi)} \textit{ pour } \alpha \textit{ de } 2^{me} \textit{ espèce}, \ \alpha \neq 0.$$

Or, la situation est encore la même en ce qui concerne les th. XII et 72: toutes les formules de ces théorèmes peuvent être établies sans l'hypothèse H à condition que α soit de la forme $\alpha = \pi(\alpha_1)$, où α_1 est un nombre de 2^{me} espèce. En effet, on peut montrer alors que $p(\alpha) = cf(\alpha) = cf(\alpha_1)$ et que $2^{\aleph_{\underset{\smile}{\alpha}}} = \aleph_\alpha$ [2]); or, ce sont les seules conséquences de l'hypothèse H qui interviennent dans la démonstration du th. XII.

Observons encore que, comme nous l'avons montré dans le cor. 63, toutes les familles de la forme $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})$ où $\boldsymbol{F}$ est une opération assujettie à l'inclusion: $\boldsymbol{F} \overset{\circ}{\subset} \boldsymbol{T}\boldsymbol{S}_\beta$, donc en particulier une opération semi-additive au dégré β et intrinsèque, ont la même puissance, à savoir $2^{2^{\aleph_\alpha}}$, dans l'hypothèse que $\beta \leqslant p(\alpha)$ ($\aleph_\alpha$ étant la puissance de $\mathit{1}$). Par contre, dans le cas de $\beta > p(\alpha)$ les familles du type considéré n'ont pas les puissances égales. On peut indiquer, en effet, comme exemples des opérations $\boldsymbol{F}$ semi-additives au dégré β et intrinsèques les opérations $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}_\beta$ et $\boldsymbol{S}^*_\beta$ d'une part et les opérations $\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}_\beta$, $\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_\beta$, $\boldsymbol{R}_\beta$ et $\boldsymbol{T} \overset{\circ}{+} \boldsymbol{R}_\beta$ d'autre part; or, on aura dans le premier cas $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})}} = 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ (th. II, VIII) et dans le second $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})}} = 2^{\aleph_\alpha}$ (th. XII, 72).

Pour terminer il y a lieu de dire quelques mots sur certaines opérations qui viennent se lier à celles examinées dans ce §. C'est une généralisation de la déf. 20 qui est à mentionner avant tout. Introduisons notamment l'opération $\boldsymbol{S}_{(\mathfrak{b})}$ définie par la formule: $\boldsymbol{S}_{(\mathfrak{b})}(\boldsymbol{K}) = \underset{\Sigma(\boldsymbol{X})}{E}[\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{K}$ *et* $0 < \overline{\overline{\boldsymbol{X}}} < \mathfrak{b}]$ [1]). Si $\mathfrak{b}$ est un nombre transfini, à savoir $\mathfrak{b} = \aleph_\beta$, l'opération $\boldsymbol{S}_{(\mathfrak{b})}$ coïncide avec $\boldsymbol{S}_\beta$; par contre, dans le cas de $\mathfrak{b}$ fini nous sommes en présence d'une opération nouvelle. Cependant cette généralisation est dépourvue de valeur au point de vue de ces considérations: car pour $\mathfrak{b} \leqslant 2$ l'opération $\boldsymbol{S}_{(\mathfrak{b})}$ est banale ($\boldsymbol{S}_{(0)}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{S}_{(1)}(\boldsymbol{K}) = \mathit{0}$ pour toute classe $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{S}_{(2)} \overset{\circ}{=} \boldsymbol{I}$); si, par contre, $2 < \mathfrak{b} < \aleph_0$, on constate facilement que $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_{(\mathfrak{b})}) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_0)$.

Ensuite c'est l'operation $\boldsymbol{B}_{\beta,\gamma}$, définie par la formule: $\boldsymbol{B}_{\beta,\gamma}(\boldsymbol{K}) = \Pi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}) \cdot \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_\gamma))$, qui mérite l'attention. La classe $\boldsymbol{B}_{\beta,\gamma}(\boldsymbol{K})$ est donc la plus petite classe contenant la classe $\boldsymbol{K}$ et close par rapport aux opérations $\boldsymbol{S}_\beta$ et $\boldsymbol{S}^*_\gamma$ (cf. p. 272, 276); on pourrait l'appeler *classe d'ensembles boreliens formés de la classe* $\boldsymbol{K}$, *additive au dégré* β *et multiplicative au dégré* γ. L'opération $\boldsymbol{B}_{\beta,\gamma}$ a été étudiée jusqu'à présent surtout dans le cas où $\beta = \gamma = 1$, où elle coïncide avec l'opération borelienne habituelle, et de plus dans le cas: $\beta = \gamma = 0$ et $\beta = 2$, $\gamma = 1$ [2]). Au point de vue de ces recherches cette opération est encore sans grande importance, à cause de la formule facile à établir: $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{B}_{\beta,\gamma}) = \mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{S}^*_\gamma)$.

§ 7. Opération $\boldsymbol{D}$. Classes d'ensembles soustractives.

L'opération $\boldsymbol{D}$ consiste à ajouter à la classe d'ensembles donnée $\boldsymbol{K}$ toutes les différences des ensembles appartenant à cette classe; les classes d'ensembles closes par rapport à cette opération s'appellent *classes soustractives*.

Définition 22. $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{K} + \underset{X-Y}{E}[X \epsilon \boldsymbol{K}$ *et* $Y \epsilon \boldsymbol{K}]$.

Parmi les nombreuses propriétés élémentaires de l'opération $\boldsymbol{D}$ je ne cite ici que celles qui seront utilisées dans la suite.

---

le rôle d'un signe variable dénotant l'ensemble de tous les individus considérés dans un théorème donné.

Il est peut-être superflu d'ajouter que de la même façon qui vient d'être employée pour „généraliser" la proposition B se laissent „généraliser" tous les théorèmes de ce mémoire concernant la puissance des familles de la forme $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})$ où $\boldsymbol{F}$ est une opération intrinsèque quelconque.

[1]) *Quelques théorèmes sur les alephs*, Fund. Math. VII, p. 9—10; *Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints*, Fund. Math. XII, p. 204, et Fund. Math. XIV, p. 213.

[2]) La première de ces formules résulte du th. II, énoncé dans ma note précitée de Fund. Math. VII, p. 9; la seconde présente une conséquence facile de la définition des nombres $\aleph_{\pi(\alpha)}$.

[1]) Cf. l'article de MM. Kozniewski et Lindenbaum, cité ici p. 249, note [1]).

[2]) Cf. p. 254, notes [1]), [2]).

Théorème 73. [a]) $\boldsymbol{D} \epsilon \mathfrak{A}_0$, *donc* $\boldsymbol{D} \epsilon \mathfrak{A}_\beta$ *et* $\boldsymbol{D} \epsilon \mathfrak{M}$;

[b]) $\boldsymbol{I} \mathring{\subset} \boldsymbol{D}$;

[c]) $\boldsymbol{D}(0) = 0$;

[d]) $\boldsymbol{D} \mathring{\subset} \boldsymbol{T}$;

[e]) $\boldsymbol{D} \mathring{\subset} \boldsymbol{S}_0^*[\boldsymbol{I} \mathring{+} \boldsymbol{C}]$;

[f]) $\boldsymbol{S}_0^* \mathring{\subset} \mathring{\sum\limits_{1 \leqslant \nu < \omega}} \boldsymbol{D}^\nu$;

[g]) $\boldsymbol{S}^* \mathring{\subset} \boldsymbol{D}\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}$ *et, plus généralement,* $\boldsymbol{S}_\beta^* \mathring{\subset} \boldsymbol{D}\boldsymbol{S}_\beta\boldsymbol{D}$.

Démonstration. Les formules [a])—[d]) résultent presque immédiatement de la déf. 22 et des définitions précédentes.

Pour établir la formule [e]), observons que tout ensemble de la classe donnée $\boldsymbol{K}$ et, en vertu de la formule bien connue: $X - Y = X \cdot (1 - Y)$, même toute différence de deux ensembles de cette classe se laissent représenter comme produit de deux, donc de moins que $\aleph_0$, ensembles de la classe $\boldsymbol{K} + \underset{1-Y}{E}[Y \epsilon \boldsymbol{K}]$. D'après la déf. 22 et le th. 53, on a donc $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}_0^*(\boldsymbol{K} + \underset{1-Y}{E}[Y \epsilon \boldsymbol{K}])$, d'où on obtient aussitôt, à l'aide des définitions du § 2, l'inclusion cherchée: $\boldsymbol{D} \mathring{\subset} \boldsymbol{S}_0^*[\boldsymbol{I} \mathring{+} \boldsymbol{C}]$.

[f]) La formule: $X \cdot Y = X - (X - Y)$ implique que $X \cdot Y \epsilon \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{K})$, à condition que $X \epsilon \boldsymbol{K}$ et $Y \epsilon \boldsymbol{K}$. En raison de la déf. 10[b,c], on en conclut par une induction facile que $\prod\limits_{1 \leqslant \xi \leqslant \nu+1} X_\xi \epsilon \boldsymbol{D}^{2\cdot\nu}(\boldsymbol{K})$, lorsque $\nu < \omega$ et $X_\xi \epsilon \boldsymbol{K}$ pour $1 \leqslant \xi \leqslant \nu + 1$. Or, par suite du th. 53, ces ensembles $\prod\limits_{1 \leqslant \xi \leqslant \nu+1} X_\xi$ forment la classe $\boldsymbol{S}_0^*(\boldsymbol{K})$; on a donc $\boldsymbol{S}_0^*(\boldsymbol{K}) \subset \sum\limits_{1 \leqslant \nu < \omega} \boldsymbol{D}^\nu(\boldsymbol{K})$, d'où $\boldsymbol{S}_0^* \mathring{\subset} \mathring{\sum\limits_{1 \leqslant \nu < \omega}} \boldsymbol{D}^\nu$, c. q. f. d.

La formule [g]) s'obtient d'une façon analogue à la formule [e]), en s'appuyant sur la transformation connue de l'Algèbre des Ensembles: $\Pi(\boldsymbol{K}) = X - \sum\limits_{Y \epsilon \boldsymbol{K}} (X - Y)$ *pour tout* $X \epsilon \boldsymbol{K}$, et en faisant appel à la déf. 18 et au th. 44, resp. (en ce qui concerne la deuxième inclusion) à la déf. 20 et au th. 53. Il est à remarquer que dans la démonstration de cette deuxième inclusion on a en outre recours au lem. 11[a] (pour prouver que $\overline{\overline{\underset{X-Y}{E}[Y \epsilon \boldsymbol{K}]}} \leqslant \overline{\overline{\boldsymbol{K}}}$), donc, indirectement, à l'axiome du choix.

L'opération $\boldsymbol{D}^*$, double de $\boldsymbol{D}$, est caractérisée par le théorème suivant, qui résulte facilement des déf. 14, 15 et 22:

Théorème 74. $\boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{K} + \underset{(1-X)+Y}{E}[X \epsilon \boldsymbol{K}$ *et* $Y \epsilon \boldsymbol{K}]$.

Cette opération consiste donc à ajouter à une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ des quotients des éléments de cette classe, en entendant par *quotient des ensembles* Y *et* X l'ensemble $Z = Y{:}X = (1 - X) + Y$.

A cause du lem. 19 les propriétés de l'opération $\boldsymbol{D}^*$ se déduisent immédiatement de celles qui leur correspondent pour l'opération $\boldsymbol{D}$ et qui ont été formulées dans le th. 73. On a en outre le suivant

Théorème 75. $\boldsymbol{C} \mathring{\subset} \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^*$.

Démonstration. Considérons une classe quelconque $\boldsymbol{K}$. Soit $X \epsilon \boldsymbol{C}(\boldsymbol{K})$, donc $X = 1 - Y$ où $Y \epsilon \boldsymbol{K}$ (déf. 14), d'où en raison du th. 74 $Y \epsilon \boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{K})$ et $1 = (1 - Y) + Y \epsilon \boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{K})$; par conséquent, d'après la déf. 22, $X = 1 - Y \epsilon \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{K})$. Il s'en suit que $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{K})$ pour toute classe $\boldsymbol{K}$, donc que $\boldsymbol{C} \mathring{\subset} \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^*$, c. q. f. d.

Je vais indiquer ici quelques propriétés des opérations $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}^*$, omises dans les théorèmes précédents. Le th. 73[a] peut être renforcé comme il suit: $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Y}) = \sum\limits_{\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{Y} \text{ et } \overline{\overline{\boldsymbol{X}}} < 5} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$ *pour toute classe d'ensembles* $\boldsymbol{Y}$, d'où, en particulier, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}) + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z})$ *pour toutes classes* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ *et* $\boldsymbol{Z}$. On a ensuite les théorèmes: *si* $\boldsymbol{K} \neq 0$, *alors* $0 \epsilon \boldsymbol{D}(\boldsymbol{K})$ *et* $1 \epsilon \boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{K})$; *si* $1 \epsilon \boldsymbol{K}$, *on a* $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{D}(\boldsymbol{K})$; *si* $0 \epsilon \boldsymbol{K}$, *on a* $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{K})$; $\boldsymbol{D} \mathring{\subset} \boldsymbol{T}\boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{D}\boldsymbol{C} \mathring{\subset} \boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{D}^*\boldsymbol{D}$ (la formule »double« de celle du th. 75); $\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^* \mathring{\subset} \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{S}_\beta \mathring{+} \boldsymbol{S}_\beta^*] \mathring{\subset} \boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{S}_\beta^* \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}[\boldsymbol{S}_\beta \mathring{+} \boldsymbol{S}_\beta^*] \mathring{\subset} \boldsymbol{S}_\beta^* \boldsymbol{S}_\beta \boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}_\beta \mathring{\subset} \boldsymbol{R}_\beta \boldsymbol{D}$; $\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{D} \mathring{\subset} \boldsymbol{D}[\boldsymbol{S} \mathring{+} \boldsymbol{S}^*]$ et, en général, $\boldsymbol{S}_\beta^*\boldsymbol{D} \mathring{\subset} \boldsymbol{D}[\boldsymbol{S}_\beta \mathring{+} \boldsymbol{S}_\beta^*]$; $\overline{\overline{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{K})}} \leqslant \overline{\overline{\boldsymbol{K}}} + (\overline{\overline{\boldsymbol{K}}})^2$. Il est enfin à noter que $\boldsymbol{M}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{K})$ *est une classe d'ensembles disjoints, quelle que soit la classe* $\boldsymbol{K}$ (cf. déf. 19).

Au lieu de l'opération $\boldsymbol{D}$, on considére d'habitude l'opération $\boldsymbol{D}_1$, déterminée par la formule: $\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{K}) = \underset{X-Y}{E}[X \epsilon \boldsymbol{K}$ *et* $Y \epsilon \boldsymbol{K}]$, et l'on désigne la classe $\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{K})$ par $\boldsymbol{K}_\varrho$ [1]). Les opérations $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}_1$ sont liées par les relations très étroites, p. ex.: *si* $0 \in \boldsymbol{K}$, *on a* $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{K})$; $\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}_1 \doteq \boldsymbol{D}_1^2$ *et* $\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D} \doteq \boldsymbol{D}^2$; $\boldsymbol{D} \doteq \boldsymbol{D}_1 \mathring{+} \boldsymbol{I}$. Cette dernière égalité donne: $\mathcal{C}l(\boldsymbol{D}) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{D}_1)$, de sorte qu'il est indifférent au point de vue de ces recherches, laquelle des deux opérations $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}_1$ en sera choisie pour l'objet (comp. le th. 23^b et remarques qui l'accompagnent). Parmi les autres propriétés de $\boldsymbol{D}_1$ citons enfin les deux suivantes: $\boldsymbol{D}_1 \doteq \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}_1^2 \doteq \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_1^*$.

Je passe aux familles des classes closes par rapport aux opérations $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}^*$ et aux opérations de la forme $\boldsymbol{F} \mathring{+} \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{F} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*$ et $\boldsymbol{F} \mathring{+} \boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*$, où $\boldsymbol{F}$ est une des opérations examinées dans les §§ précédents. Cette étude est considérablement simplifiée par certaines identités qui existent entre ces familles et que je vais établir au préalable.

Notons que les classes de la famille $\mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_\beta \mathring{+} \boldsymbol{D})$ ont été étudiées déjà, bien qu'à un point de vue différent, par M. Hausdorff, qui les appelle *Körper* dans le cas où $\beta = 0$ et *erweiterte Körper* dans le cas général [2]).

Théorème 76. $\mathcal{C}l(\boldsymbol{D}) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_0^*)$, $\mathcal{C}l(\boldsymbol{D}^*) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_0)$.

Démonstration. Tenant compte du th. 73^f et appliquant le th. 21^a, on obtient: $\mathcal{C}l\Big(\mathring{\sum\limits_{1 \leqslant \nu < \omega}} \boldsymbol{D}^\nu\Big) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_0^*)$, d'où en raison du th. 21^b:

(1) $$\prod_{1 \leqslant \nu < \omega} \mathcal{C}l(\boldsymbol{D}^\nu) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_0^*).$$

D'autre part le th. 25 donne en vertu du th. 73^b:

(2) $$\mathcal{C}l(\boldsymbol{D}^\nu) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{D}) \textit{ pour } 1 \leqslant \nu < \omega.$$

Il résulte aussitôt de (1) et (2) que

(3) $$\mathcal{C}l(\boldsymbol{D}) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_0^*),$$

d'où $\overline{\boldsymbol{C}}(\mathcal{C}l(\boldsymbol{D})) \subset \overline{\boldsymbol{C}}(\mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_0^*))$; à l'aide du th. 26 on en conclut que $\mathcal{C}l(\boldsymbol{D}^*) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_0^{**})$, et on a donc d'après le lem. 19^b:

(4) $$\mathcal{C}l(\boldsymbol{D}^*) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_0).$$

[1]) Cf. le livre de M. Sierpiński, p. 113, cité ici p. 254, note [2]).

[2]) Cf. Hausdorff, *Mengenlehre*, II Aufl., Berlin und Leipzig 1927, p. 78—82.

Les formules (3) et (4) constituent le théorème, qui se trouve ainsi démontré.

Théorème 77. [a]) $\mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{D}) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{S}_0)$;

[b]) $\mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{H}) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{D}^* \mathring{+} \boldsymbol{H}) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^* \mathring{+} \boldsymbol{H}) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^* \mathring{+} \boldsymbol{H}) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{S}_0 \mathring{+} \boldsymbol{H})$ *pour toute opération* $\boldsymbol{H}$.

Démonstration. [a]) D'après les th. 28^b et 73^a, on a

(1) $$\mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{D}) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*).$$

Le th. 21^b (pour $\boldsymbol{F} \doteq \boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{G} \doteq \boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*$) donne: $\mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{C}) \cdot \mathcal{C}l(\boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*)$, d'où

(2) $$\mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*).$$

Comme $\boldsymbol{D}^* \mathring{\subset} \boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*$, on conclut du th. 21^a que $\mathcal{C}l(\boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{D}^*)$, donc, en raison du th. 76,

(3) $$\mathcal{C}l(\boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_0).$$

Les inclusions: $\mathcal{C}l(\boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^*)$ et $\mathcal{C}l(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^*) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{C})$, dont la première résulte des th. 24^a et 73^a et la seconde se déduit des th. 21^a et 75, donnent comme conséquence immédiate:

(4) $$\mathcal{C}l(\boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{C}).$$

Les formules (3) et (4) entraînent: $\mathcal{C}l(\boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{C}) \cdot \mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_0)$, d'où, suivant le th. 21^b,

(5) $$\mathcal{C}l(\boldsymbol{D} \mathring{+} \boldsymbol{D}^*) \subset \mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{S}_0).$$

En appliquant une fois encore le th. 28^b et en tenant compte du th. 50^a, on obtient:

(6) $$\mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{S}_0) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{S}_0^*).$$

Le th. 23^b (pour $\boldsymbol{F} \doteq \boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{S}_0^*$) implique que $\mathcal{C}l(\boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{S}_0^*) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{I} \mathring{+} \boldsymbol{C} \mathring{+} \boldsymbol{S}_0^*) = \mathcal{C}l(\boldsymbol{S}_0^* \mathring{+} [\boldsymbol{I} \mathring{+} \boldsymbol{C}])$. En vertu de l'inclusion évidente: $\boldsymbol{I} \mathring{\subset} \boldsymbol{I} \mathring{+} \boldsymbol{C}$, on conclut du th. 24^a (pour $\boldsymbol{F} \doteq \boldsymbol{S}_0^*$ et

$G \doteq I \overset{\circ}{+} C$) que $\mathcal{C}\ell(S_0^* \overset{\circ}{+} [I \overset{\circ}{+} C]) \subset \mathcal{C}\ell(S_0^*[I \overset{\circ}{+} C])$. Par conséquent,

(7) $$\mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} S_0^*) \subset \mathcal{C}\ell(S_0^*[I \overset{\circ}{+} C]).$$

A l'aide du th. 21^a on déduit du th. 73^e l'inclusion: $\mathcal{C}\ell(S_0^*[I \overset{\circ}{+} C]) \subset \mathcal{C}\ell(D)$, qui, rapprochée de (6) et (7), donne: $\mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} S_0) \subset \mathcal{C}\ell(D)$. En appliquant à deux reprises le th. 21^b, on en tire facilement: $\mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} S_0) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} [C \overset{\circ}{+} S_0]) = \mathcal{C}\ell(C) \cdot \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} S_0) \subset \mathcal{C}\ell(C) \cdot \mathcal{C}\ell(D) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} D)$, donc

(8) $$\mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} S_0) \subset \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} D).$$

Les formules (1), (2), (5) et (8) entraînent tout de suite l'identité cherchée:

$$\mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} D) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} D^*) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} D \overset{\circ}{+} D^*) = \mathcal{C}\ell(D \overset{\circ}{+} D^*) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} S_0), \quad \text{c. q. f. d.}$$

^{b}) se déduit sans peine de ^{a}) par l'application du cor. 22.

Comme cas particuliers du th. 77^b citons les identités: $\mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} S_\beta \overset{\circ}{+} D) = \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D \overset{\circ}{+} D^*) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} S_\beta)$, $\mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} S \overset{\circ}{+} D) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} S)$ etc.

Corollaire 78. ^{a}) $\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} D^*) = \mathcal{C}\ell(T^* \overset{\circ}{+} D) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} T)$;
^{b}) $\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} D^* \overset{\circ}{+} H) = \mathcal{C}\ell(T^* \overset{\circ}{+} D \overset{\circ}{+} H) = \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} T \overset{\circ}{+} H)$ *pour toute opération* H.

Démonstration. ^{a}) En posant dans le th. 77^b: $H \doteq T$, resp. $H \doteq T^*$, on obtient:

(1) $$\mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} D \overset{\circ}{+} T) = \mathcal{C}\ell(D \overset{\circ}{+} D^* \overset{\circ}{+} T) \text{ et } \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} D^* \overset{\circ}{+} T^*) = \mathcal{C}\ell(D \overset{\circ}{+} D^* \overset{\circ}{+} T^*).$$

D'après le th. 73^d et le lem. 19^e on a $D \overset{\circ}{\subset} T$ et $D^* \overset{\circ}{\subset} T^*$, donc $T \overset{\circ}{+} D \doteq T$ et $T^* \overset{\circ}{+} D^* \doteq T^*$, ce qui permet de simplifier les formules (1) comme suit:

(2) $$\mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} T) = \mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} D^*) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}\ell(C \overset{\circ}{+} T^*) = \mathcal{C}\ell(T^* \overset{\circ}{+} D).$$

Or, en rapprochant les égalités (2) du th. 41^a, on parvient aussitôt à la formule cherchée.

^{b}) résulte immédiatement de ^{a}) en raison du cor. 22.

En tenant compte du th. 41, on conclut du corollaire précédent que la famille $\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} D^*) = \mathcal{C}\ell(T^* \overset{\circ}{+} D)$, de-même que toute famille de la forme $\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} D^* \overset{\circ}{+} H) = \mathcal{C}\ell(T^* \overset{\circ}{+} D \overset{\circ}{+} H)$, où H est une opération quelconque envisagée dans cet ouvrage, ne contient que deux éléments, à savoir 0 et $U(1)$.

Théorème 79. ^{a}) *Si* $\beta \geqslant \gamma$, *on a* $\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D) = \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S_\gamma^* \overset{\circ}{+} D)$ *et* $\mathcal{C}\ell(S_\beta^* \overset{\circ}{+} D^*) = \mathcal{C}\ell(S_\gamma \overset{\circ}{+} S_\beta^* \overset{\circ}{+} D^*)$;
^{b}) $\mathcal{C}\ell(S \overset{\circ}{+} D) = \mathcal{C}\ell(S \overset{\circ}{+} S^* \overset{\circ}{+} D) = \mathcal{C}\ell(S \overset{\circ}{+} S_\gamma^* \overset{\circ}{+} D)$ *et* $\mathcal{C}\ell(S^* \overset{\circ}{+} D^*) = \mathcal{C}\ell(S \overset{\circ}{+} S^* \overset{\circ}{+} D^*) = \mathcal{C}\ell(S_\gamma \overset{\circ}{+} S^* \overset{\circ}{+} D^*)$.

Démonstration. ^{a}) En raison du th. 52^b et du lem. 19^e, on a $S_\gamma^* \subset S_\beta^*$, d'où en vertu du th. 73^g $S_\gamma^* \overset{\circ}{\subset} D S_\beta D$; à l'aide du th. 21^a on en conclut que

(1) $$\mathcal{C}\ell(D S_\beta D) \overset{\circ}{\subset} \mathcal{C}\ell(S_\gamma^*).$$

En posant dans le th. 24^a: $F \doteq D$ et $G \doteq S_\beta D$ et en tenant compte du th. 73^a, on tire: $\mathcal{C}\ell(D \overset{\circ}{+} S_\beta D) \subset \mathcal{C}\ell(D S_\beta D)$; comme, de plus, $\mathcal{C}\ell(D \overset{\circ}{+} S_\beta D) = \mathcal{C}\ell(D) \cdot \mathcal{C}\ell(S_\beta D)$ d'après le th. 21^b, on a:

(2) $$\mathcal{C}\ell(D) \cdot \mathcal{C}\ell(S_\beta D) \subset \mathcal{C}\ell(D S_\beta D).$$

Le th. 24^a donne encore en vertu du th. 73^b: $\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D) \subset \mathcal{C}\ell(S_\beta D)$; il résulte en outre du th. 21^a (ou 21^b) que $\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D) \subset \mathcal{C}\ell(D)$. Par conséquent,

(3) $$\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D) \subset \mathcal{C}\ell(D) \cdot \mathcal{C}\ell(S_\beta D).$$

Les inclusions (1)—(3) entraînent aussitôt:

(4) $$\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D) \subset \mathcal{C}\ell(S_\gamma^*).$$

Or, le th. 21^b implique que $\mathcal{C}\ell(S_\gamma^* \overset{\circ}{+} S_\beta \overset{\circ}{+} D) = \mathcal{C}\ell(S_\gamma^*) \cdot \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D)$; en le rapprochant de (4), on obtient la première formule cherchée:

$$\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D) = \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S_\gamma^* \overset{\circ}{+} D).$$

D'après le cor. 27, il s'en suit que $\mathcal{C}\ell([S_\beta \overset{\circ}{+} D]^*) =$

$=\mathcal{Cl}([S_\beta \mathring{+} S_\gamma^* \mathring{+} D]^*)$, d'où l'on déduit à l'aide du lem. 19[b,d] la seconde formule:

$$\mathcal{Cl}(S_\beta^* \mathring{+} D^*)=\mathcal{Cl}(S_\gamma \mathring{+} S_\beta^* \mathring{+} D^*), \quad \text{c. q. f. d.}$$

[b]) Soit $\aleph_\alpha$ la puissance de l'ensemble universel 1. Posons: $\beta = \max(\alpha+1, \gamma)$, d'où $\beta \geqslant \gamma$. Les formules [a]) qui viennent d'être établies donnent alors:

(5) $\mathcal{Cl}(S_\beta \mathring{+} D) = \mathcal{Cl}(S_\beta \mathring{+} S_\beta^* \mathring{+} D) = \mathcal{Cl}(S_\beta \mathring{+} S_\gamma^* \mathring{+} D)$ *et*
$\mathcal{Cl}(S_\beta^* \mathring{+} D^*) = \mathcal{Cl}(S_\beta \mathring{+} S_\beta^* \mathring{+} D^*) = \mathcal{Cl}(S_\gamma \mathring{+} S_\beta^* \mathring{+} D^*)$.

Comme, en vertu de la définition de β, on a $\overline{\overline{1}} < \aleph_\beta$, le th. 51[d] entraîne: $S_\beta \doteq S$ et, par conséquent, $S_\beta^* \doteq S^*$. En remplaçant donc dans (5) S_β par S et S_β^* par S^*, on parvient aussitôt aux identités cherchées.

Le théorème suivant nous permettra de résumer dans la suite (à la fin de ce §) d'une manière bien claire tous les résultats acquis dans cet ouvrage.

Théorème 80. *Soit $\mathfrak{K}$ la classe composée d'opérations C, T, T^*, S, S^* et de toutes les opérations S_ξ et S_η^* (ξ et η étant des nombres ordinaux arbitraires); soit $\mathfrak{L}$ la classe formée d'opérations C, T, T^*, $C \mathring{+} T$ et de toutes les opérations S_ξ, S_η^*, $C \mathring{+} S_\xi$, $T \mathring{+} S_\xi$, $T^* \mathring{+} S_\eta^*$, $S_\xi \mathring{+} S_\eta^*$, $S_\xi \mathring{+} D^*$, $S_\eta^* \mathring{+} D$, $S_\xi \mathring{+} S_\eta^* \mathring{+} D$ et $S_\xi \mathring{+} S_\eta^* \mathring{+} D^*$ (ξ et η arbitraires). On a alors:*

$$\underset{\mathcal{Cl}(F)}{E}\,[F \in \mathfrak{S}(\mathfrak{K})] = \underset{\mathcal{Cl}(G)}{E}\,[G \in \mathfrak{L}].$$

Démonstration. Considérons une famille arbitraire $\mathfrak{X}$ telle que

(1) $$\mathfrak{X} \in \underset{\mathcal{Cl}(F)}{E}\,[F \in \mathfrak{S}(\mathfrak{K})].$$

Conformément à la déf. 11[a], (1) implique l'existence d'une classe d'opérations $\mathfrak{G}_1$ vérifiant les formules:

(2) $$\mathfrak{X} = \mathcal{Cl}\Big(\mathring{\sum_{G \in \mathfrak{G}_1}} G\Big),$$

(3) $$\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{K} \quad \text{et} \quad \mathfrak{G}_1 \neq 0.$$

Or, nous allons prouver qu'ils existent une classe d'opérations $\mathfrak{G}_2$

et deux nombres ordinaux β et γ qui remplissent les conditions suivantes:

(4) $$\mathring{\sum_{G \in \mathfrak{G}_2}} G \doteq \mathring{\sum_{G \in \mathfrak{G}_1}} G,$$

(5) $$\mathfrak{G}_2 \subset \{C, T, T^*, S_\beta, S_\gamma^*, D, D^*\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{G}_2 \neq 0.$$

Il résulte, en effet, de (3) et de l'hypothèse du théorème que $\mathfrak{G}_1$ ne contient que les opérations C, T, T^*, S, S^*, D, D^* ainsi que les opérations de la forme S_ξ et S_η^*. Les opérations S et S^* peuvent être représentées sous la forme de S_ξ, resp. S_η^* (puisque, $\aleph_\alpha$ étant la puissance de l'ensemble universel 1, on a d'après le th. 51[d]: $S \doteq S_{\alpha+1}$ et $S^* \doteq S_{\alpha+1}^*$); c'est pourqui on peut les négliger ici. Soient maintenant $\mathfrak{F}_1$, resp. $\mathfrak{F}_2$, la classe de toutes les opérations de $\mathfrak{G}_1$ qui sont de la forme S_ξ, resp. S_η^*, et A_1, resp. A_2, l'ensemble de tous les indices ξ, resp. η, de ces opérations. Posons: $\beta = \sup(A_1)$ et $\gamma = \sup(A_2)$; $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_1$, lorsque $\mathfrak{F}_1 = 0 = \mathfrak{F}_2$; $\mathfrak{G}_2 = (\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{F}_1) + \{S_\beta\}$, lorsque $\mathfrak{F}_1 \neq 0$ et $\mathfrak{F}_2 = 0$; $\mathfrak{G}_2 = (\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{F}_2) + \{S_\gamma^*\}$, lorsque $\mathfrak{F}_1 = 0$ et $\mathfrak{F}_2 \neq 0$, et enfin $\mathfrak{G}_2 = (\mathfrak{G}_1 - (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2)) + \{S_\beta, S_\gamma^*\}$, lorsque $\mathfrak{F}_1 \neq 0$ et $\mathfrak{F}_2 \neq 0$. Il résulte du th. 52[a] que $S_\beta \doteq \mathring{\sum\limits_{G \in \mathfrak{F}_1}} G$ pour $\mathfrak{F}_1 \neq 0$ et de-même (en vertu du lem. 19[d]) que $S_\gamma^* \doteq \mathring{\sum\limits_{G \in \mathfrak{F}_2}} G$ pour $\mathfrak{F}_2 \neq 0$. On en déduit sans peine l'égalité (4) et on conclut tout de suite de la définition de $\mathfrak{G}_2$ que cette classe vérifie aussi les formules (5).

Notons à présent les identités suivantes qui existent entre les diverses familles de la forme $\mathcal{Cl}\Big(\mathring{\sum\limits_{G \in \mathfrak{G}}} G\Big)$, où $\mathfrak{G}$ est une sous-classe de $\{C, T, T^*, S_\beta, S_\gamma^*, D, D^*\}$:

(6) $\mathcal{Cl}(T) = \mathcal{Cl}(T \mathring{+} S_\gamma^*) = \mathcal{Cl}(T \mathring{+} D) = \mathcal{Cl}(T \mathring{+} S_\gamma^* \mathring{+} D)$;

(7) $\mathcal{Cl}(T \mathring{+} S_\beta) = \mathcal{Cl}(T \mathring{+} S_\beta \mathring{+} S_\gamma^*) = \mathcal{Cl}(T \mathring{+} S_\beta \mathring{+} D) =$
$= \mathcal{Cl}(T \mathring{+} S_\beta \mathring{+} S_\gamma^* \mathring{+} D)$;

(8) $\mathcal{Cl}(T^*) = \mathcal{Cl}(T^* \mathring{+} S_\beta) = \mathcal{Cl}(T^* \mathring{+} D^*) = \mathcal{Cl}(T^* \mathring{+} S_\beta \mathring{+} D^*)$;

(9) $\mathscr{Cl}(T^* \mathring{+} S^*_\gamma) = \mathscr{Cl}(T^* \mathring{+} S_\beta \mathring{+} S^*_\gamma) = \mathscr{Cl}(T^* \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D^*) =$
$= \mathscr{Cl}(T^* \mathring{+} S_\beta \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D^*)$;

(10) $\mathscr{Cl}(C \mathring{+} T) = \mathscr{Cl}\Big(C \mathring{+} T \mathring{+} \mathring{\sum_{G \epsilon \mathfrak{G}}} G\Big) = \mathscr{Cl}\Big(C \mathring{+} T^* \mathring{+} \mathring{\sum_{G \epsilon \mathfrak{G}}} G\Big) =$

$= \mathscr{Cl}\Big(T \mathring{+} T^* \mathring{+} \mathring{\sum_{G \epsilon \mathfrak{G}}} G\Big) = \mathscr{Cl}\Big(T \mathring{+} D^* \mathring{+} \mathring{\sum_{G \epsilon \mathfrak{G}}} G\Big) =$

$= \mathscr{Cl}\Big(T^* \mathring{+} D \mathring{+} \mathring{\sum_{G \epsilon \mathfrak{G}}} G\Big)$ *pour toute sous-classe* $\mathfrak{G}$ (*vide ou non*) *de* $\{C, T, T^*, S_\beta, S^*_\gamma, D, D^*\}$;

(11) $\mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_0) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} D) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} D^*) = \mathscr{Cl}(D \mathring{+} D^*) =$
$= \mathscr{Cl}(C \mathring{+} D \mathring{+} D^*)$;

(12) $\mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\beta) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\beta \mathring{+} D) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\beta \mathring{+} D^*) =$
$= \mathscr{Cl}(S_\beta \mathring{+} D \mathring{+} D^*) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\beta \mathring{+} D \mathring{+} D^*)$;

(13) $\mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\gamma) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S^*_\gamma) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D^*) =$
$= \mathscr{Cl}(S^*_\gamma \mathring{+} D \mathring{+} D^*) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D \mathring{+} D^*)$;

(14) $\mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_{max(\beta,\gamma)}) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\beta \mathring{+} S^*_\gamma) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\beta \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D) =$
$= \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\beta \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D^*) = \mathscr{Cl}(S_\beta \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D \mathring{+} D^*) =$
$= \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\beta \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D \mathring{+} D^*)$;

(15) $\mathscr{Cl}(D) = \mathscr{Cl}(S^*_0 \mathring{+} D)$ *et* $\mathscr{Cl}(D^*) = \mathscr{Cl}(S_0 \mathring{+} D^*)$;

(16) $\mathscr{Cl}(S_\beta \mathring{+} D) = \mathscr{Cl}(S_\beta \mathring{+} S^*_\beta \mathring{+} D)$ *et* $\mathscr{Cl}(S^*_\gamma \mathring{+} D^*) =$
$= \mathscr{Cl}(S_\gamma \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D^*)$.

On démontre ces formules comme il suit:

Les identités (6)—(9) résultent des inclusions: $S^*_\gamma \mathring{\subset} T$, $D \mathring{\subset} T$, $S_\beta \mathring{\subset} T^*$ et $D^* \mathring{\subset} T^*$ (th. 51[b], th. 73[d], lem. 19[b,c]), qui en vertu du lem. 13 entraînent les égalités: $T \doteq T \mathring{+} S^*_\gamma \doteq T \mathring{+} D$ et de-même $T^* \doteq T^* \mathring{+} S_\beta \doteq T^* \mathring{+} D^*$.

Pour démontrer la formule (10), il est à noter que pour toute opération G de la classe $\{C, T, T^*, S_\beta, S^*_\gamma, D, D^*\}$ on a $G(0) = 0$ (lem. 18[d] et 19[k], th. 36[c], 50[c] et 73[c]); il en résulte d'après la déf. 9[b] que l'on a aussi $\Big[\mathring{\sum_{G \epsilon \mathfrak{G}}} G\Big](0) = 0$ pour toute sous-classe $\mathfrak{G}$ de cette

classe. En posant donc dans le th. 41[b] et le cor. 78[b]: $H = \mathring{\sum_{G \epsilon \mathfrak{G}}} G$ et en appliquant le th. 41[a], on obtient la formule cherchée.

Les identités (11) sont établies dans le th. 77[a]. En posant dans le th. 77[b]: $H \doteq S_\beta$ et en tenant compte de l'inclusion: $S_0 \mathring{\subset} S_\beta$ (th. 52[b]), on parvient à la formule (12). Les formules (13) et (14) s'obtiennent d'une façon tout à fait analogue ($H \doteq S^*_\gamma$, resp. $H \doteq S_\beta \mathring{+} S^*_\gamma$), mais on aura soin de remarquer qu'en raison des th. 28[b] et 50[a] $\mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\gamma) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S^*_\gamma)$, d'où, en vertu du th. 52[a] et du cor. 22 (pour $F \doteq C \mathring{+} S_\gamma$, $G \doteq C \mathring{+} S^*_\gamma$ et $H \doteq S_\beta$), $\mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_{max(\beta,\gamma)}) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\gamma \mathring{+} S_\beta) = \mathscr{Cl}(C \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} S_\beta)$.

Les égalités (15) se déduisent sans peine des th. 76 et 21[b] (pour $F \doteq S^*_0$ et $G \doteq D$, resp. pour $F \doteq S_0$ et $G \doteq D^*$). Enfin, les formules (16) ne présentent que des cas particuliers du th. 79[a].

Or, on s'aperçoit sans peine qu'en conséquence de la déf. 9[a,b] et des identités (6)—(16) qui viennent d'être établies, toute famille de la forme $\mathscr{Cl}\Big(\mathring{\sum_{G \epsilon \mathfrak{G}}} G\Big)$, où $\mathfrak{G}$ est une sous-classe non-vide de $\{C, T, T^*, S_\beta, S^*_\gamma, D, D^*\}$, coïncide avec une des familles suivantes: $\mathscr{Cl}(C)$, $\mathscr{Cl}(T)$, $\mathscr{Cl}(T^*)$, $\mathscr{Cl}(S_\beta)$, $\mathscr{Cl}(S^*_\gamma)$, $\mathscr{Cl}(C \mathring{+} T)$, $\mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_0)$, $\mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\beta)$, $\mathscr{Cl}(C \mathring{+} S_\gamma)$, $\mathscr{Cl}(T^* \mathring{+} S^*_\gamma)$, $\mathscr{Cl}(S_\beta \mathring{+} S^*_\gamma)$, $\mathscr{Cl}(S_0 \mathring{+} D^*)$, $\mathscr{Cl}(S_\beta \mathring{+} D^*)$, $\mathscr{Cl}(S^*_0 \mathring{+} D)$, $\mathscr{Cl}(S^*_\gamma \mathring{+} D)$, $\mathscr{Cl}(S_\beta \mathring{+} S^*_\beta \mathring{+} D)$, $\mathscr{Cl}(S_\beta \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D)$, $\mathscr{Cl}(S_\beta \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D^*)$ et $\mathscr{Cl}(S_\gamma \mathring{+} S^*_\gamma \mathring{+} D^*)$, donc, conformément à l'hypothèse, avec une des familles $\mathscr{Cl}(G)$ où $G \epsilon \mathfrak{L}$. Cela s'applique, en particulier, à la famille $\mathscr{Cl}\Big(\mathring{\sum_{G \epsilon \mathfrak{G}_2}} G\Big)$, $\mathfrak{G}_2$ étant selon (5) une sous-classe non-vide de $\{C, T, T^*, S_\beta, S^*_\gamma, D, D^*\}$; il existe donc une opération G' qui remplit les formules:

(17) $$\mathscr{Cl}\Big(\mathring{\sum_{G \epsilon \mathfrak{G}_2}} G\Big) = \mathscr{Cl}(G')$$

et

(18) $$G' \epsilon \mathfrak{L}.$$

Les égalités (2), (4) et (17) donnent tout de suite: $\mathscr{X} = \mathscr{Cl}(G')$: en le rapprochant de (18), on obtient:

(19) $$\mathscr{X} \epsilon \underset{\mathscr{Cl}(G)}{E} [G \epsilon \mathfrak{L}].$$

Il est ainsi prouvé que la formule (1) implique toujours (19); par conséquent, on a l'inclusion: $\underset{\mathcal{Cl}(F)}{E}\,[F\in\mathfrak{S}(\mathfrak{K})]\subset\underset{\mathcal{Cl}(G)}{E}\,[G\in\mathfrak{L}]$. L'inclusion inverse résultant de l'hypothèse d'une façon immédiate, on parvient finalement à l'identité cherchée:

$$\underset{\mathcal{Cl}(F)}{E}\,[F\in\mathfrak{S}(\mathfrak{K})]=\underset{\mathcal{Cl}(G)}{E}\,[G\in\mathfrak{L}],\quad \text{c. q. f. d.}$$

Les problèmes concernant la puissance des familles de la forme $\mathcal{Cl}(F)$ ne comporteront pas dans ce § de difficultés appréciables et n'exigeront pas de nouvelles méthodes du raisonnement. On remarquera que les familles de la forme $\mathcal{Cl}(F)$, où F est une somme d'opérations qui contient parmi ses sommandes soit les deux opérations D et D^*, soit une d'elles accompagnées de C, T ou de T^*, peuvent être omises dans l'étude de ces problèmes, car en vertu du th. 77 et du cor. 78 ces familles coïncident avec celles qui ont été déjà examinées dans les §§ 4—6. Ainsi p. ex., en confrontant les th. IX et 77^{a}, on se convaint immédiatement que *dans l'hypothèse:* $\overline{\overline{1}}=\aleph_\alpha$ *la famille* $\mathcal{Cl}(C\dotplus D)=\mathcal{Cl}(C\dotplus D^*)=\mathcal{Cl}(D\dotplus D^*)$ *est de puissance* $2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Théorème fondamental XIII. *Si* $\overline{\overline{1}}=\aleph_\alpha$, *on a*

a) $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(D)}}=\overline{\overline{\mathcal{Cl}(D^*)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

b) $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S\dotplus D^*)}}=\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S^*\dotplus D)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

c) $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S_\beta\dotplus D^*)}}=\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S^*_\beta\dotplus D)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. D'après le th. 73^{d} et le lem. 19^{c}, on a $D^*\mathring{\subset}T^*$, d'où, en vertu du th. 51^{b}, $S\dotplus D^*\mathring{\subset}T^*$ et $S_\beta\dotplus D^*\mathring{\subset}T^*$. Ces inclusions établies, on raisonnera tout comme dans la démonstration du th. fond. IV.

Théorème fondamental XIV. *Si* $\overline{\overline{1}}=\aleph_\alpha$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S\dotplus D)}}=\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S^*\dotplus D^*)}}=2^{\aleph_\alpha}$.

Démonstration. En raison du th. 73^{d}, on a $S\dotplus D\mathring{\subset}T\dotplus S$, d'où, en vertu du th. 21^{a}, $\mathcal{Cl}(T\dotplus S)\subset\mathcal{Cl}(S\dotplus D)$; suivant les th. 79^{b} et 21^{b} on a de plus: $\mathcal{Cl}(S\dotplus D)=\mathcal{Cl}(S\dotplus S^*\dotplus D)=$ $=\mathcal{Cl}(S\dotplus S^*)\cdot\mathcal{Cl}(D)\subset\mathcal{Cl}(S\dotplus S^*)$. Il s'en suit aussitôt que

$$(1)\qquad \overline{\overline{\mathcal{Cl}(T\dotplus S)}}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S\dotplus D)}}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S\dotplus S^*)}}.$$

Conformément aux th. fond. V et VI, $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(T\dotplus S)}}=2^{\aleph_\alpha}=$ $=\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S\dotplus S^*)}}$, ce qui donne selon (1): $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S\dotplus D)}}=2^{\aleph_\alpha}$. Comme en outre, d'après le th. 33 et le lem. 19^{d}, $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S^*\dotplus D^*)}}=\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S\dotplus D)}}$, on déduit finalement:

$$\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S\dotplus D)}}=\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S^*\dotplus D^*)}}=2^{\aleph_\alpha},\quad \text{c. q. f. d.}$$

Dans le cas où $\overline{\overline{1}}=a<\aleph_0$ on peut établir pour les puissances des familles étudiées dans le th. XIII les mêmes délimitations qui ont été indiquées plus haut (p. 232) pour la famille $\mathcal{Cl}(T)$; quant aux familles du th. XIV, les délimitations établies pour la famille $\mathcal{Cl}(S\dotplus S^*)$ (p 245) restent valables pour elles.

Théorème fondamental XV. *Si* $\overline{\overline{1}}=\aleph_\alpha$ *et* $\beta\leqslant p(\alpha)$, *on a*

a) $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S_\beta\dotplus D)}}=\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S^*_\beta\dotplus D^*)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

b) $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S\dotplus S^*_\beta\dotplus D^*)}}=\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S^*\dotplus S_\beta\dotplus D)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

c) $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S_\beta\dotplus S^*_\gamma\dotplus D)}}=\overline{\overline{\mathcal{Cl}(S_\gamma\dotplus S^*_\beta\dotplus D^*)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration. A l'aide des th. 51^{b}, 73^{d} et du lem. $19^{\mathrm{b,c}}$ on se convaint sans peine, que, F étant une des six opérations suivantes: $S_\beta\dotplus D$, $S^*_\beta\dotplus D^*$, $S\dotplus S^*_\beta\dotplus D^*$, $S^*\dotplus S_\beta\dotplus D$, $S_\beta\dotplus S^*_\gamma\dotplus D$ et $S_\gamma\dotplus S^*_\beta\dotplus D^*$, on a soit $F\mathring{\subset}T\dotplus S_\beta$, soit $F\mathring{\subset}T^*\dotplus S^*_\beta$. En appliquant donc le cor. 63^{a}, on en obtient immédiatement toutes les formules cherchées.

La question, si l'on peut renforcer le th. XV^{a} dans le même sens que le th. XI^{b} (c. à-d. si l'on peut remplacer dans le th. 67 S^*_γ par D), reste ouverte; ce problème est d'ailleurs équivalent au problème analogue concernant l'opération C (cf. p. 275 et 276).

Théorème 81. *Si* $\overline{\overline{1}}=\aleph_\alpha$ *et* $\beta\leqslant p(\alpha)$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{Cl}(R_\beta\dotplus D)}}=$ $=\overline{\overline{\mathcal{Cl}(R_\beta\dotplus D^*)}}=2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration est basée sur les formules: $R_\beta \overset{\circ}{+} D \overset{\circ}{\subset} TS_\beta$, $R_\beta \overset{\circ}{+} D^* \overset{\circ}{\subset} T^*S^*_\beta$ et ne diffère pas de celle du th. 64 (resp. du théorème précédent).

Théorème 82. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *et* $\beta > cf(\alpha)$, *on a*

a) $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^*_\beta \overset{\circ}{+} D^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

b) $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S \overset{\circ}{+} S^*_\beta \overset{\circ}{+} D^*)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^* \overset{\circ}{+} S_\beta \overset{\circ}{+} D)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

c) $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma \overset{\circ}{+} D)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\gamma \overset{\circ}{+} S^*_\beta \overset{\circ}{+} D^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$;

Démonstration. En vertu des th. 51^{b}, 73^{d} et du lem. $19^{\mathrm{b,c}}$, on a les inclusions: $S_\beta \overset{\circ}{+} D \overset{\circ}{\subset} S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma \overset{\circ}{+} D \overset{\circ}{\subset} S^* \overset{\circ}{+} S_\beta \overset{\circ}{+} D \overset{\circ}{\subset} T \overset{\circ}{+} S$, qui donnent en raison du th. 21^{a}: $\mathcal{C}\ell(T \overset{\circ}{+} S) \subset \mathcal{C}\ell(S^* \overset{\circ}{+} S_\beta \overset{\circ}{+} D) \subset \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma \overset{\circ}{+} D) \subset \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D)$. Tenant compte du th. fond. V, on en obtient:

(1) $$2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^* \overset{\circ}{+} S_\beta \overset{\circ}{+} D)}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma \overset{\circ}{+} D)}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D)}}.$$

D'après les th. 79^{a} (pour $\gamma = \beta$) et 21^{b}, $\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D) = \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\beta \overset{\circ}{+} D) = \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\beta) \cdot \mathcal{C}\ell(D) \subset \mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\beta)$. Comme on a par hypothèse $\beta > cf(\alpha)$, le th. 69 (pour $\gamma = \beta$) entraîne en outre: $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\beta)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ On a, par conséquent,

(2) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}.$$

En appliquant enfin à plusieurs reprises le th. 33 et le lem. $19^{\mathrm{b,d}}$, on parvient aux égalités:

(3) $$\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^*_\beta \overset{\circ}{+} D^*)}},\ \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S \overset{\circ}{+} S^*_\beta \overset{\circ}{+} D^*)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^* \overset{\circ}{+} S_\beta \overset{\circ}{+} D)}} \text{ et } \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma \overset{\circ}{+} D)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\gamma \overset{\circ}{+} S^*_\beta \overset{\circ}{+} D^*)}}.$$

De (1)—(3) s'obtiennent immédiatement toutes les formules cherchées.

Théorème 83. *Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *et* $\beta > cf(\alpha)$, *on a* $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(R_\beta \overset{\circ}{+} D)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(R_\beta \overset{\circ}{+} D^*)}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

Démonstration est complètement analogue à celle du th. 71.

Théorème fondamental XVI. *L'hypothèse H entraîne les conséquences suivantes:*

Si $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *et* $\beta > p(\alpha)$, *on a:*

a) $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^*_\beta \overset{\circ}{+} D^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$;

b) $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S \overset{\circ}{+} S^*_\beta \overset{\circ}{+} D^*)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S^* \overset{\circ}{+} S_\beta \overset{\circ}{+} D)}} = 2^{\aleph_\alpha}$;

c) $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} S^*_\gamma \overset{\circ}{+} D)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(S_\gamma \overset{\circ}{+} S^*_\beta \overset{\circ}{+} D^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Théorème 84. *L'hypothèse H entraîne la conséquence suivante: Si* $\overline{\overline{1}} = \aleph_\alpha$ *et* $\beta > p(\alpha)$, *on a* $\overline{\overline{\mathcal{C}\ell(R_\beta \overset{\circ}{+} D)}} = \overline{\overline{\mathcal{C}\ell(R_\beta \overset{\circ}{+} D^*)}} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Démonstration des deux derniers théorèmes, basée sur les th. 82, 83 et sur le lem. $9^{\mathrm{a,b}}$, n'offre pas de difficultés (cf. le th. XII).

La comparaison des th. $\mathrm{XIII}^{\mathrm{b}}$ et XIV montre que les familles $\mathcal{C}\ell(S \overset{\circ}{+} D)$ et $\mathcal{C}\ell(S^* \overset{\circ}{+} D)$, que l'on est tenté de croire identiques, se comportent en réalité, même au point de vue de leur puissance, de façons essentiellement différentes. Pour les familles $\mathcal{C}\ell(S_\beta \overset{\circ}{+} D)$ et $\mathcal{C}\ell(S^*_\beta \overset{\circ}{+} D)$ le même effet est produit par les th. $\mathrm{XIII}^{\mathrm{c}}$ et $\mathrm{XVI}^{\mathrm{a}}$.

Résumé.

Le domaine de ces recherches comprend certaines opérations élémentaires qui font correspondre à toute classe d'ensemble des nouvelles classes d'ensembles, à savoir les operations C, T, S, S_ξ (où ξ parcourt tous les nombres ordinaux) et D, ainsi que par leurs opérations doubles; la classe de toutes ces opérations a été désignée par $\mathfrak{K}$ (th. 80). Les problèmes fondamentaux de cet ouvrage consistent à déterminer la puissance des familles de toutes les classes qui se composent de sous-ensembles d'un ensemble donné 1 et qui sont closes par rapport à une quelconque des opérations indiquées ou bien par rapport à plusieurs de ces opérations à la fois; dans la symbolique introduite ci-dessus les familles en question se présentent sous la forme de $\mathcal{C}\ell(F)$ où $F \in \mathfrak{S}(\mathfrak{K})$. Dans les théorèmes fondamentaux des §§ 3—7 nous avons examiné une série de problèmes de ce genre et réussi (ayant parfois recours à l'hypothèse de Cantor sur les alephs) à déterminer les puissances des familles envisagées d'après la puissance $\aleph_\alpha$ de l'ensemble univer-

sel *1*. Les résultats acquis montrent que la puissance d'une famille examinée est égale le plus souvent soit à $2^{2^{\aleph_\alpha}}$, soit à $2^{\aleph_\alpha}$; cependant certaines des ces familles ne contenaient que 2 éléments.

Pour se rendre compte, en quelle mesure les problèmes de ce genre sont épuisés par nos recherches, on consultera le th. 80. Ce théorème montre que toutes les familles $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})$ où $\boldsymbol{F}\in\mathfrak{S}(\mathfrak{K})$ se réduisent aux certains types, assez simples et peu nombreux. En rapprochant ce résultat des ceux qui ont été obtenus dans les th. fond. I—XVI, on constate que *les recherches présentes épuisent tous les problèmes qui concernent la puissance des familles de toutes les classes closes par rapport à une opération arbitraire de la classe* $\mathfrak{K}$ *ou bien par rapport à plusieurs opérations de cette classe à la fois*.

Il est intéressant que les résultats exposés ci-dessus se laissent étendre aux opérations d'une classe beaucoup plus vaste que $\mathfrak{S}(\mathfrak{K})$, à savoir aux opérations de la classe $\mathfrak{B}(\mathfrak{K})$ formée de toutes les opérations qui s'obtiennent de celles de la classe $\mathfrak{K}$ moyennant l'addition et la multiplication relative effectuées un nombre arbitraire (fini ou transfini) des fois (cf. la déf. 11^{c}). Les opérations mêmes de la classe $\mathfrak{B}(\mathfrak{K})$ peuvent présenter une structure bien compliquée et elles ne se laissent pas rammener à un nombre fini de types simples. Il résulte par contre des remarques générales du § 3 (cf. th. B, p. 217) que les familles de la forme $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{F})$ où $\boldsymbol{F}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{K})$ se prètent à une réduction considérable et qu'elle aboutit aux-mêmes familles qui ont apparu au cours de l'examen de la classe $\mathfrak{S}(\mathfrak{K})$ dans le th. 80 et à une seule nouvelle famille $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{I})$, dont la puissance nous est connue du th. 32.

Certains résultats (th. 61, 64, 72, 81, 84) concernaient en outre, au lieu de la classe $\mathfrak{K}$, une classe plus vaste, obtenue de $\mathfrak{K}$ par l'adjonction des opérations $\boldsymbol{R}_\xi$ (où ξ parcourt tous les nombres ordinaux). Sans chercher à épuiser dans l'exposé présent tous les problèmes de ce genre, je ne remarquerai ici que les problèmes dont je n'ai pas fait une mention explicite (p. ex. celui de la puissance de la famille $\mathcal{C}\ell(\boldsymbol{S}_\beta \overset{\circ}{+} \boldsymbol{R}_\gamma)$) se laissent résoudre sans difficulté par les méthodes appliquées dans cet ouvrage à plusieurs reprises.

Indexe des symboles.

J'énumère ici les symboles introduits pour la première fois ou non universellement admis, en indiquant le lieu où se trouve l'explication de leur sens:

Table des matières.

Sur les éléments cycliques et leurs applications.

Par

C. Kuratowski et G. T. Whyburn[1] (Lwów).

Dans l'ouvrage présent nous adoptons, comme point de départ une définition d'élément cyclique différente de celle adoptée primitivement[2]). Cela nous permet de développer la théorie d'éléments cycliques et de leurs applications sans avoir récours au théorème suivant, dont la démonstration est fort compliquée: si aucun point ne coupe l'espace Péanien[3]) entre deux points donnés a et b, ces points sont situés sur une courbe simple fermée[4]).

Première Partie: Développement de la théorie.

1. *Définitions et propriétés générales d'espaces Péaniens.*

1 désigne l'espace considéré; nous le supposons toujours *Péanien.*

Le point p (ou bien l'ensemble fermé K) *coupe* l'espace E entre deux points x et y, si x et y appartiennent à deux composantes différentes de $E-p$ (resp. $E-K$); une *composante* d'un ensemble Z est un sous-ensemble connexe de Z qui n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de Z.

[1]) Fellow of the John Simon Guggenheim Memorial Foundation.

[2]) d'après laquelle un élément cyclique est: soit un point qui coupe l'espace, soit un point d'arrêt (= point d'ordre 1), soit un continu saturé relativement à la propriété que tout couple de ses points s'y laisse unir par une courbe simple fermée. Voir Whyburn, bibliographie N1 (à la fin de l'ouvrage present).

[3]) = image continue de l'intervalle = espace compact, connexe et localement connexe. Il est à remarquer que la théorie d'éléments cycliques se laisse, en quelque sorte, étendre aux espaces non-compacts. Voir bibliogr. N22.

[4]) Théorème démontré par M. Ayres, bibliogr. N17. Pour le cas du plan, N1.