Lemma. *If for the completely partitionable, regular and connected sets H and N there exists a biunivalued and continuous transformation T of H into N, then the inverse T^{-1} of T is also continuous, and therefore H and N are homeomorphic.*

Proof. Let t be any simple continuous arc in N joining two points A and B of N. Now there exists [18]) in H one and only one arc t^* between the points $T^{-1}(A)$ and $T^{-1}(B)$. Since T is biunivalued and continuous, the image $T(t^*)$ of t^* under T is an arc in N from A to B. But [18]) there is only one arc in N from A to B. Therefore $T(t^*)=t$, (or $T^{-1}(t)=t^*$), and hence it follows that the inverse T^{-1} of T is continuous on every simple continuous arc t in N.

Now let p be any point of N and ε any positive number. Since H is regular, there exists a connected ε neighborhood R of the point $P=T^{-1}(p)$ in H whose boundary B in H is finite. Since [18]) N is arcwise connected im kleinen, there exists a neighborhood V of p in N such that every point x of V can be joined to p by an arc t in N which contains no point whatever of $T(B)$. But by what we have just proved, $T^{-1}(t)=t^*$ is an arc in H from $T^{-1}(x)$ to P; and since t^* contains the point P of R but contains no point whatever of the boundary B of R, it follows that t^* is a subset of R. Thus for each point x of V, $T^{-1}(x)\subset R$, and therefore T^{-1} is continuous.

[18]) See § 7 of my paper just cited above, ref. [17]).

John Simon Guggenheim Memorial Foundation.

Sur une propriété des ensembles G_δ.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Aronszajn a étudié une classe particulière des transformations continues des ensembles de points, notamment des fonctions $f(x)$, définies et continues sur un ensemble donné E qui trasforment tout ensemble ouvert relativement à E en un ensemble ouvert relativement à l'image $f(E)$ de E [1]) [2]). Il m'a posé récemment le problème si toute transformation de cette sorte d'un ensemble G_δ particulier donne un ensemble G_δ. Je donnerai ici une solution positive de ce problème, en démontrant le théorème général que voici:

Théorème: *Si E est un ensemble G_δ* (d'un espace à m dimensions) *et si $f(x)$ est une fonction définie et continue sur E qui transforme tout ensemble ouvert relativement à E en un ensemble ouvert relativement à $f(E)$, $f(E)$ est aussi un ensemble G_δ* [3]).

Démonstration. Il suffira évidemment de démontrer notre théorème pour les ensembles bornés. Nous supposerons, pour fixer les idées, que E et $f(E)$ sont des ensembles plans.

Soit donc E un ensemble G_δ plan borné, $f(x)$ — une fonction définie et continue sur E qui transforme tout ensemble ouvert dans E en un ensemble ouvert dans $f(E)$.

E étant un ensemble G_δ plan borné, nous pouvons poser

$$E=G_1\,G_2\,G_3\ldots, \tag{1}$$

[1]) Un sous-ensemble H de E est dit *ouvert relativement à E*, ou *ouvert dans E*, s'il est un produit de E par un ensemble ouvert.

[2]) Cf. S. Stoïlow: *Fund. Math.* t. XIII, p. 186.

[3]) Quant à une application de ce théorème, voir la Note de M. Aronszajn qui paraîtra dans ce volume.

où G_n $(n=1,2,3,\dots)$ sont des ensembles ouverts plans bornés, et nous pouvons supposer que

(2) $$G_{n+1}\subset G_n, \quad \text{pour} \quad n=1,2,3,\dots$$

Nous définirons maintenant un système de cercles ouverts $\{H_{n_1,n_2,\dots,n_k}\}$, et un système de sous-ensembles de E, $\{E_{n_1,n_2,\dots,n_k}\}$, jouissant des 6 propriétés suivantes (quelle que soit la suite finie de nombres naturels $n_1, n_2,\dots, n_k$ pour laquelle les ensembles correspondants existent):

(3) $$\delta(H_{n_1,n_2,\dots,n_k})<\frac{1}{k}\,^{1)},$$

(4) $$H_{n_1,n_2,\dots,n_k}\subset H_{n_1,n_2,\dots,n_{k-1}}, \qquad (k>1)$$

(5) $$H_{n_1,n_2,\dots,n_k}-H_{n_1,n_2,\dots,n_{i-1},n}\neq 0, \quad \text{pour} \quad n<n_i, \quad i\leqslant k,$$

(6) $$E_{n_1,n_2,\dots,n_k}\subset E_{n_1,n_2,\dots,n_{k-1}}, \qquad (k>1)$$

(7) $$\overline{E}_{n_1,n_2,\dots,n_k}\subset G_k,$$

(8) $$f(E_{n_1,n_2,\dots,n_k})=H_{n_1,n_2,\dots,n_k}\cdot f(E)\neq 0.$$

Soit

(9) $$K_1,\ K_2,\ K_3,\dots$$

une suite infinie formée de tous les cercles ouverts du plan au rayons rationnels et dont les centres ont des coordonnées rationnelles.

Nous dirons qu'un cercle Q de (9) est un cercle de 1^{er} ordre, s'il satisfait à deux conditions suivantes:

1) (10) $$\delta(Q)<1,$$

2) Il existe un ensemble $P\subset E$, ouvert dans E et tel que

(11) $$\overline{P}\subset G_1$$

et

(12) $$f(P)=Qf(E)\neq 0.$$

Ordonnons les cercles de 1^{er} ordre d'après leur rang dans la suite (10) et supprimons dans la suite ainsi obtenue tous ceux qui sont contenus dans un des précédents: ceux qui resteront seront

[1]) $\delta(H)$ désigne le diamètre de l'ensemble H.

désignés par

(13) $$H_1,\ H_2,\ H_3,\dots$$

La suite (13) peut être d'ailleurs finie.

Les sous-ensembles P de E (ouverts dans E) correspondants aux cercles H_n (c'est à-dire vérifiant les formules (11) et (12) pour $Q=H_n$) seront désignés resp. par E_n $(n=1,2,3,\dots)$.

Soit maintenant k un nombre naturel >1 et supposons que nous avons déjà défini les cercles $H_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ d'ordre k et les ensembles $E_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ correspondants, et qu'ils jouissent des propriétés (3), (4), (5), (6), (7) et (8).

Un cercle Q de (9) sera dit cercle de $k+1^{\text{ième}}$ ordre, s'il satisfait à 3 conditions suivantes:

1°. $$\delta(Q)<\frac{1}{k+1}$$

2°. Q est contenu dans un au moins des cercles de $k^{\text{ième}}$ ordre, et si $K=H_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ est celui d'entre eux pour lequel le nombre

(14) $$\frac{1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+n_2}}+\dots+\frac{1}{2^{n_1+n_2+\dots+n_k}}$$

est le plus grand, il existe un ensemble $P\subset E$, ouvert dans E, tel que

(15) $$P\subset E_{n_1,n_2,\dots,n_k},$$

(16) $$\overline{P}\subset G_{k+1}$$

et

(17) $$f(P)=Qf(E)\neq 0.$$

3°. On a

(18) $$Q-H_{n_1,n_2,\dots,n_{i-1},n}\neq 0, \quad \text{pour} \quad n<n_i, \quad i\leqslant k.$$

Ordonnons les cercles de $k+1^{\text{ième}}$ rang contenus dans le cercle $H_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ d'après leur rang dans (9) et supprimons dans la suite ainsi obtenue tous ceux qui sont contenus dans un des précédents: ceux qui resteront seront désignés par $H_{n_1,n_2,\dots,n_k,n}$ $(n=1,2,3,\dots)$, et les sous-ensembles P de E correspondants (c'est-à-dire vérifiant les formules (15), (16) et (17) pour $Q=H_{n_1,n_2,\dots,n_k,n}$) seront désignés resp. par $E_{n_1,n_2,\dots,n_k,n}$ $(n=1,2,3,\dots)$.

Les cercles d'ordre k $(k=1,2,3,\dots)$ sont ainsi définis par l'induction et on voit sans peine que les cercles $H_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ et les ensembles $E_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ vérifient les formules (3), (4), (5), (6), (7) et (8).

Désignons par S_k la somme de tous les cercles de $k^{\text{ième}}$ ordre. Nous prouverons que

(19) $$f(E) \subset S_k, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Soit q un point de $f(E)$: il existe donc un point p de E, tel que $q = f(p)$. D'après (1), on a $p \in G_1$: G_1 étant un ensemble ouvert, il existe un cercle ouvert T contenant p et tel que $\overline{T} \subset G_1$. D'après la propriété de la fonction f, $f(TE)$ est un ensemble ouvert relativement à E, et, d'après $q = f(p) \in f(TE)$, il existe un cercle Q de la suite (9) contenant q et tel que $\delta(Q) < 1$ et $QE \subset f(TE)$. Soit P l'ensemble de tous les points z de TE, tels que $f(z) \in Qf(E)$: l'ensemble $Qf(E)$ étant évidemment ouvert relativement à $f(E)$ et la fonction f étant continue dans E, l'ensemble P sera ouvert dans E. Or, on a $f(P) = Qf(E) \neq 0$ (puisque $q \in Qf(E)$) et $P \subset T$, d'où $\overline{P} \subset \overline{T} \subset G_1$. On a donc les formules (10), (11) et (12) qui prouvent que Q est un cercle de 1^{er} ordre. Il existe donc un indice n_1, tel que $q \in H_{n_1}$.

Soit maintenant k un indice donné et supposons que nous avons défini les k indices $n_1, n_2, \dots, n_k$ de sorte que

(20) $$q \in H_{n_1,n_2,\dots,n_i}, \quad \text{pour} \quad i \leqslant k$$

et que

(21) $$q \text{ non} \in H_{n_1,n_2,\dots,n_{i-1},n}, \quad \text{pour} \quad n < n_i, \quad i \leqslant k.$$

On a donc, d'après (20), $q \in H_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ et, d'après (8):

$$q \in f(E_{n_1,n_2,\dots,n_k})$$

et il existe un point p de $E_{n_1,n_2,\dots,n_k}$, tel que $f(p) = q$. D'après $E_{n_1,n_2,\dots,n_k} \subset E$ et d'après (1), on a $p \in G_{k+1}$ et, l'ensemble $E_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ étant ouvert dans E, il existe un cercle ouvert T contenant p et tel que $\overline{T} \subset G_{k+1}$ et $TE \subset E_{n_1,n_2,\dots,n_k}$. D'après la propriété de la fonction f, $f(TE)$ est un ensemble ouvert dans E et, d'après $q \in f(TE) \cdot H_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ il existe un cercle Q de la suite (10) contenant q et tel que $\delta(Q) < \frac{1}{k+1}$, $Q \subset H_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ et $QE \subset f(TE)$. Soit P l'ensemble de tous les points z de TE, tels que $f(z) \in Qf(E)$: ce sera un ensemble ouvert dans E.

Or, on a $f(P) = Qf(E) \neq 0$ (puisque $q \in Qf(E)$) et $P \subset TE$, d'où $\overline{P} \subset \overline{T} \subset G_{k+1}$. On a donc les formules (15), (16), (17) et 1°. Or, de $q \in Q$ et de (21) résulte sans peine que Q vérifie les conditions 2° et la formule (18). Donc, Q satisfait aux conditions 1°, 2° et 3° et parsuite est un cercle de $k+1^{\text{ième}}$ ordre contenu dans $H_{n_1,n_2,\dots,n_k}$.

Nous avons ainsi démontré qu'il existe un cercle Q de $k+1^{\text{ième}}$ ordre contenu dans $H_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ et contenant q. Il en résulte sans peine qu'il existe un indice n_{k+1}, tel que

$$q \in H_{n_1,n_2,\dots,n_k,n_{k+1}}$$

et

$$q \text{ non} \in H_{n_1,n_2,\dots,n_k,n}, \quad \text{pour} \quad n < n_{k+1},$$

d'où résulte, d'après (21), que

$$q \text{ non} \in H_{n_1,n_2,\dots,n_{i-1},n}, \quad \text{pour} \quad n < n_i, \quad i \leqslant k+1.$$

Nous avons ainsi démontré par l'induction qu'il existe une suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \dots$, telle que

$$q \in H_{n_1,n_2,\dots,n_k}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

d'où résulte que $q \in S_k$, pour $k = 1, 2, 3, \dots$; q pouvant être un point quelconque de $f(E)$, la formule (19) est ainsi établie.

Soit maintenant q un point, tel que

(22) $$q \in S_k, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

De (22) résulte que $q \in S_1$ et il s'en suit sans peine qu'il existe un cercle H_{m_1}, tel que

(23) $$q \in H_{m_1}$$

et

(24) $$q \text{ non} \in H_n, \quad \text{pour} \quad n < m_1.$$

L'ensemble H_{m_1} étant ouvert, il existe, d'après (23), un nombre naturel $k > 1$, tel que le cercle au centre q et au rayon $1/k$ est contenu dans H_{m_1}. Or, d'après (22) il existe un cercle $H_{n_1,n_2,\dots,n_k}$, tel que

(25) $$q \in H_{n_1,n_2,\dots,n_k},$$

et nous pouvons supposer que le système de k nombres $n_1, n_2, .., n_k$ est celui (d'entre ceux qui vérifient la formule (25)) pour lequel le nombre (14) est le plus grand.

De (25), (3) et de la définition du nombre k résulte que

$$(26) \qquad H_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset H_{m_1}.$$

De (26) et (5) (pour $i=1$) résulte que $n_1 \leqslant m_1$. Or, s'il était $n_1 < m_1$, on aurait d'après (25) et (4): $q \in H_{n_1}$, contrairement à (24): On a donc $n_1 = m_1$.

L'ensemble $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ étant ouvert, il existe, d'après (25), un indice $s > k$, tel que le cercle au centre q et au rayon $1/s$ est contenu dans $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Or, d'après (22) il existe un cercle $H_{r_1, r_2, \ldots, r_s}$, tel que

$$(27) \qquad q \in H_{r_1, r_2, \ldots, r_s}$$

et nous pouvons supposer que $r_1, r_2, \ldots, r_s$ est celui des systèmes de s indices vérifiant la formule (27), pour lequel le nombre $2^{-r_1} + 2^{-r_1-r_2} + \ldots + 2^{-r_1-r_2-\ldots-r_s}$ est le plus grand.

De (27), (3) et de la définition du nombre s résulte que

$$(28) \qquad H_{r_1, r_2, \ldots, r_s} \subset H_{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$

d'où, d'après (4):

$$H_{r_1, r_2, \ldots, r_s} \subset H_{n_1},$$

ce qui donne, d'après (5): $r_1 \leqslant n_1$. Or, d'après (27) et (4), on a

$$q \in H_{r_1, r_2, \ldots, r_k}$$

et, s'il était $r_1 < n_1$, le nombre

$$(29) \qquad \frac{1}{2^{r_1}} + \frac{1}{2^{r_1+r_2}} + \frac{1}{2^{r_1+r_2+\ldots+r_k}}$$

serait plus grand que le nombre (14), contrairement à la définition du système $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Nous avons donc $r_1 = n_1$ et la formule (28) donne, d'après (4):

$$H_{n_1, r_2, \ldots, r_k} \subset H_{n_1, n_2},$$

ce qui prouve, d'après (5) (pour $i=2$) que $r_2 \leqslant n_2$. Or, s'il était $r_2 < n_2$, le nombre (29) serait plus grand que le nombre (14),

ce qui est impossible. On a donc $r_2 = n_2$. Pareillement on trouve $r_3 = n_3, \ldots, r_k = n_k$.

En répétant notre raisonnement on obtient une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$, et une suite croissante de nombres naturels $k_1, k_2, k_3, \ldots$, tels que

$$(30) \qquad q \in H_{m_1, m_2, \ldots, m_{k_i}}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

D'après (6) nous avons

$$(31) \qquad E_{m_1, m_2, \ldots, m_{k_{i+1}}} \subset E_{m_1, m_2, \ldots, m_{k_i}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

et, d'après (7):

$$(32) \qquad \overline{E}_{m_1, m_2, \ldots, m_{k_i}} \subset G_{k_i}.$$

D'après (31) on a

$$\overline{E}_{m_1, m_2, \ldots, m_{k_{i+1}}} \subset \overline{E}_{m_1, m_2, \ldots, m_{k_i}}:$$

$\overline{E}_{m_1, m_2, \ldots, m_{k_i}}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ est donc une suite descendente d'ensembles fermés et bornés (d'après (32), les ensembles G_n étant bornés), non vides (d'après (8)). D'après le théorème de Cantor il existe donc un point p, tel que

$$(33) \qquad p \in \overline{E}_{m_1, m_2, \ldots, m_{k_i}}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

et d'après (33), (32), (1) et (2), on a

$$(34) \qquad p \in E.$$

D'après (8), on a

$$f(E_{m_1, m_2, \ldots, m_{k_i}}) \subset H_{m_1, m_2, \ldots, m_{k_i}}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

donc, d'après (33), et (34), la fonction f étant continue dans E:

$$f(p) \in \overline{H}_{m_1, m_2, \ldots, m_{k_i}}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ce qui prouve, d'après (30) et (3) que la distance entre q et $f(p)$ est $< 1/k_i$. L'indice i pouvant être quelconque et la suite $k_1, k_2, k_3, \ldots$ croissant indéfinement, on en conclut que $q = f(p)$, donc, d'après (34), que $q \in f(E)$.

Nous avons ainsi démontré que la formule (22) entraîne $q \in f(E)$, donc que

$$S_1 S_2 S_3 \ldots \subset f(E),$$

et comme plus haut nous avons démontré la formule (1), nous en concluons que

$$(35) \qquad f(E) = S_1 S_2 S_3 \dots$$

Les ensembles S_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ étant ouverts, la formule (35) prouve que $f(E)$ est un ensemble G_δ.

Notre théorème est ainsi démontré.

On voit sans peine que toute transformation homéomorphe f d'un ensemble donné E transforme tout sous-ensemble de E ouvert dans E en un sous-ensemble de $f(E)$ ouvert dans $f(E)$ et parsuite satisfait aux conditions de notre théorème. Il résulte donc tout de suite de notre théorème la proposition suivante, due à M. Mazurkiewicz [1]):

Un ensemble homéomorphe à un ensemble G_δ est un G_δ

Notre théorème peut donc être regardé comme une généralisation du théorème de M. Mazurkiewicz.

[1]) S. Mazurkiewicz: *Bull. Acad. Cracovie* 1916, p. 490—494. Cf. aussi: M. Lavrentieff: *Fund. Math.* t. VI, p. 151 et W. Sierpiński: *Fund. Math.* t. VIII, p. 135.

Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires.

Par

Alfred Tarski (Varsovie).

Introduction.

Les problèmes du type suivant constituent l'objet principal des recherches exposées dans cet ouvrage: *étant donné un ensemble infini A, combien y a-t-il de classes de sous-ensembles de A pourvues d'une propriété donnée P?* Les propriétés P, envisagées ici, ne sont d'ailleurs ni arbitraires, ni trop générales: elles reviennent toutes à ce que les classes considérées de sous-ensembles soient *closes par rapport à certaines opérations élémentaires.* Il s'agit notamment des opérations $\boldsymbol{F}$ qui font correspondre à toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ une nouvelle classe d'ensembles $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})$ et, en premier lieu, des opérations consistant à former les sommes, produits, différences et complémentaires des ensembles appartenant à la classe $\boldsymbol{K}$ et d'en ajouter à cette classe tous les sous-ensembles. Une classe $\boldsymbol{K}$ s'appelle close par rapport à une opération $\boldsymbol{F}$, lorsque le résultat $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})$ de cette opération, effectuée sur $\boldsymbol{K}$, est lui-même une sous-classe de $\boldsymbol{K}$ [1]).

Quelques-uns des problèmes discutés dans ce travail m'ont été posés par MM. Poprougénko et Sierpiński.

Les principaux résultats de ces recherches sont résumés après le § 7. Je n'en mentionnerai que ceci: dans tous les problèmes envisagés dans la suite je réussis d'établir une simple relation fonctionnelle entre la puissance de la famille de toutes les

[1]) Cf. M. Fréchet, *Des familles et fonctions additives d'ensembles*, Fund. Math. IV, p. 335.