Zusammenfassend: Die „Klasse" der unmessbaren Alephs enthält 1⁰: $\aleph_0$, 2⁰: mit $\aleph_\xi$ auch $\aleph_{\xi+1}$, 3⁰: mit m alle Alephs $< m$ (Bemerkung 1), 4⁰: mit m auch jede Vereinigungsmenge von m Mengen, die zu der Klasse gehören (nach dem Lemma 1), endlich 5⁰: unter Zugrundelegung der Hypothese (*1*) nach dem Satze 4, mit m auch 2^m.

Was die Produkte von Kardinalzahlen anbetrifft, so sieht man, da sich jedes Produkt durch entsprechende Summe und Potenz majorisieren lässt, (das Produkt von m Kardinalzahlen:

$$\aleph_{\xi_1} \times \aleph_{\xi_2} \times \ldots \aleph_{\xi_\alpha} \times \ldots \text{ ist } \leqslant 2^{\aleph_{\xi_1}+\aleph_{\xi_2}+\ldots\aleph_{\xi_\alpha}+\ldots})$$

und die Majorante nach unseren Bemerkungen unmessbar ist, dass zu der Klasse der unmessbaren Alephs auch solche hinzukommen, die sich als Produkte einer unmessbaren Anzahl von unmessbaren Kardinalzahlen darstellen lassen. Somit werden, freilich unter Benutzung der Hypothese (*1*), alle Kardinalzahlen, die keine im Sinne von Sierpiński u. Tarski unerreichbare[1]) Kardinalzahl majorisieren, unmessbar.

[1]) S. die Arbeit dieser Autoren, diese Fundamenta, Bd. XV, S. 292.

Sur les continus absolument indécomposables.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Je dirais qu'un continu C est *absolument indécomposable*, si tout sous-continu de C est indécomposable. Les continus absolument indécomposables ont été découverts par M. Knaster, qui en a donné en 1922[1]) le premier exemple, le continu K_3 (d'ailleurs c'est le seul qui est actuellement connu).

2. Soit Γ l'ensemble de tous les ensembles connexes et fermés, contenus dans un cercle de rayon 1 du plan euclidien. C_1, C_2 désignant deux eléments de Γ, nous poserons d'aprés M. Hausdorff, mais en modifiant sa symbolique[2]):

$$(2,0) \qquad \varrho^*(\overrightarrow{C_1, C_2}) = \text{Maximum } \varrho(C_1, p) \qquad p \in C_2$$

$$(2,1) \qquad \varrho^*(C_1, C_2) = \text{Maximum } [\varrho^*(\overrightarrow{C_1, C_2}), \varrho^*(\overrightarrow{C_2, C_1})].$$

Si l'on considére $\varrho^*(C_1, C_2)$ comme la distance entre C_1, C_2, alors Γ devient un éspace métrique et compact.

Les elements de F qui sont des continus absolument indécomposables forment un sous ensemble de F, que je vais désigner par F_K. Le but de cette Note est d'étudier la nature de cet ensemble. Je vais démontrer dans cet ordre d'idées le théorème suivant.

3 Théorème: *F_K est un G_δ de seconde categorie dans F.*

Je n'utiliserai pas le résultat de M. Knaster; de cette manière

[1]) Fund. Math. III p. 247—286.

[2]) Hausdorf. Grundzüge d. Mengenlehre p. 293 ss. Je remplace les symboles $\overline{AB}, \overrightarrow{AB}$ de M. Hausdorff resp. par $\varrho^*(A, B)$ et $\varrho^*(\overrightarrow{A, B})$. Comp. aussi Ważewski. Fund. Math. IV p. 214—245, en particulier: p. 218 ss.

nous obtiendrons une nouvelle démonstration de l'existence de continus absolument indécomposables.

4. β désignant un nombre positif determiné *je dirais que C possède la propriété $V(\beta)$ s'il existe une décomposition $C = C_1 + C_2$, C_1, C_2 désignant des continus tels que*:

(4,0) $$\varrho^*(\overrightarrow{C_1, C_2}) \geqq \beta \leqq \varrho^*(\overrightarrow{C_2, C_1})$$

Je dirais que C *possède la propriété $V_1(\beta)$ si C contient un sous-continu possédant la propriété $V(\beta)$.*

5. Soit I un segment rectiligne; nous désignerons par $\lambda(I)$ sa longueur. Tout losange admettant I comme diagonale sera designé par $L(I)$.

β étant positif nous dirons que I possède la propriété $W(\beta)$ si à tout losange $L(I)$ et tout $\eta > 0$ on peut faire correspondre un arc simple M tel que:

(5,0) M est coextrémale avec I

(5,1) $$M \subset L(I)$$

(5,2) M ne posséde pas la propriété $V_1(\beta + \eta)$.

6 Lemme. *Quel que soit $\beta > 0$ tout segment rectiligne posséde la propriété $W(\beta)$.*

(6,0) La propriété $W(\beta)$ est evidement un invariant du groupe des mouvements donc elle depend seulement de la longueur $\lambda(I)$ du segment.

(6,1) Si un segment possède la propriété $W(\beta)$ il en est de même pour tout segment de longueur inférieure.

(6,2) Si $\lambda(I) \leqq 2\beta$, alors I possède la propriété $W(\beta)$ (en effet on peut prendre dans ce cas $M = I$.

D'après (6,0), (6,1), (6,2) il suffit donc de démontrer:

(6,3) Si un segment de longueur $\mu \geqq 2\beta$ possède la propriété $W(\beta)$ il en est de même pour tout segment de longueur $\mu + \frac{\beta}{4}$.

Démonstration de (6,3).

Soit I un segment de longueur $\mu + \frac{\beta}{4}$, η — un nombre positif, L_0 un losange $L(I)$. Déterminons un entier m tel que:

(6,30) $$m \geqq 2; \quad \frac{\beta}{m} < \frac{\eta}{4}$$

Designons les extrémités de I par a_1, a_{2m+2}, son centre par b. Choisissons un point a_2 intérieur au losange L_0 et tel que:

(6,31) $$\varrho(a_1, a_2) \leqq \mu - \frac{\beta}{4} \quad ; \quad \varrho(a_2, a_{2m+2}) \leqq \frac{\beta}{2}$$

ce qui est evidement possible. Soit a_{2m+1} le point symétrique de a_2 par rapport à b. Partageons les segments: $a_1 a_{2m+1}$ et $a_2 a_{2m+2}$ en m parties égales par les points consecutifs: $a_3, a_5 \dots a_{2m-1}$ et $a_4, a_6 \dots a_{2m}$ respectivement. Désignons le segment $a_k a_{k+1}$ par I_k, $k = 1, 2 \dots 2m+1$. On a d'aprés (6,30), (6,31):

$$\lambda(I_{2l-1}) = \varrho(a_1, a_2) \leqq \mu - \frac{\beta}{4}, \qquad l = 1, 2 \dots m+1$$

(6,32) $$\lambda(I_{2l}) = \varrho(a_2, a_3) \leqq \varrho(a_1, a_2) + \varrho(a_1, a_3) = \varrho(a_1, a_2) + + \frac{\varrho(a_1, a_{2m+1})}{m} \leqq \mu \qquad l = 1, 2 \dots m$$

L'ensemble $\sum_{k=1}^{2m+1} I_k$ est contenu dans L_0 et n'a avec la frontiére de L_0 que les points a_1, a_{2m+2} en commun. D'autre part: $I_k \times I_{k+1} = a_{k+1}$, $I_k \times I_{k+j} = 0$ pour $j > 1$. Donc nous pouvons determiner pour $k = 1, 2 \dots 2m+1$ un certains losange $L(I_k)$, que nous désignerons par L_k de telle manière que l'on ai:

$$\sum_{k=1}^{2m+1} L_k \subset L_0$$

(6,33) $$L_k \times L_{k+1} = a_{k+1} \quad ; \quad L_k \times L_{k+j} = 0 \quad \text{pour} \quad j > 1$$

$$\varrho^*(\overrightarrow{I_k, L_k}) \leqq \frac{\beta}{2m}.$$

D'aprés (6,32) les I_k possédent la propriété $W_2(\beta)$ donc on peut determiner un arc simple M_k aux extremités a_k, a_{k+1} contenu dans L_k et ne possedant pas la propriété $V_1\left(\beta + \frac{\eta}{2}\right)$. Posons:

(6,34) $$M^* = \sum_{k=1}^{2m+1} M_k.$$

D'aprés (6,33) on aura:

(6,35) $$M^* \subset L_0$$

(6,36) $$M_k \times M_{k+1} = a_{k+1}; \quad M_k \times M_{k+j} = 0 \quad \text{pour} \quad j > 1$$

donc M^* est un arc simple aux extrémités a_1, a_{2m+2} c. à d. coextrémale avec I. Il suffit maintenant de démontrer que M^* ne possède pas la propriété $V_1(\beta+\eta)$. Soit q un point de M^*, j un entier $\leqq 2m+1$. Determinons le point $\psi_j(q)$ de manière suivante: si $q \in M_j$, $\psi_j(q)$ est la projection orthogonale de q sur I_j, si $q \in M_k$, $k \neq j$, $-\psi_j(q)$ désignera le point d'intersection de I_j avec la droite passant par $\psi_k(q)$ et parallélle à $\overline{a_1 a_{2m+1}}$. D'aprés (6,30), (6,31), (6,33) on aura les inégalités:

$$\begin{aligned} &\varrho(q, \psi_j(q)) \leqq \frac{\beta}{2m} \leqq \text{minimum}\left(\frac{\beta}{4}, \frac{\eta}{8}\right) \quad q \in M_j \\ (6{,}37)\qquad &\varrho(q, \psi_j(q)) \leqq \frac{\beta}{m} \leqq \text{minimum}\left(\frac{\beta}{2}, \frac{\eta}{4}\right) \quad q \in M_k, \quad |j-k|=1 \\ &\varrho(q, \psi_j(q)) \leqq \frac{3}{4}\beta \qquad q \in M^*, \quad j=1,2 \ldots 2m+1. \end{aligned}$$

Considerons maintenant un sous-continu $C \subset M^*$ et une décomposition: $C = C_1 + C_2$ C_1, C_2 désignant deux continus. Nous distinguerons deux cas:

(6,38) Un des continus C_1, C_2 contient un des arcs simples M_k. Supposons d'abord que $C_1 \supset M_l$. Soit $q \in C_2$, on a, d'après (6,37):

$$(6{,}380)\qquad \varrho(q, \psi_l(q)) \leqq \tfrac{3}{4}\beta.$$

Mais M_l étant coextrémale avec I_l et $\psi_l(q)$ étant un point de I_l, il existe un point $q' \in M_l$ tel que $\psi_l(q') = \psi_l(q)$. Donc:

$$(6{,}381)\qquad \varrho(q, q') \leqq \varrho(q, \psi_l(q)) + \varrho(q', \psi_l(q')) \leqq \beta$$

et a fortiori:

$$(6{,}382)\qquad \varrho(q, C_1) \leqq \beta < \beta + \eta$$

donc, q étant un point arbitraire de C_2:

$$(6{,}383)\qquad \varrho^*(\overrightarrow{C_1, C_2}) < \beta + \eta.$$

On a de même dans le cas $M_l \subset C_2$:

$$(6{,}384)\qquad \varrho^*(\overrightarrow{C_2, C_1}) < \beta + \eta$$

(6,39) Ni C_1 ni C_2 ne contiennent aucun M_l. C, C_1, C_2 étant des arcs simples il existe alors un indice l tel que l'on a (en permutant au besoin les indices 1, 2):

$$(6{,}390)\qquad \begin{aligned} C_1 &\subset M_{l-1} + M_l \\ C_2 &\subset M_l \;\; + M_{l+1} \end{aligned}$$

Soit T_i l'ensemble de tous les $\psi_l(q)$ pour $q \in C_i$, $i=1,2$. T_i est un segment contenu dans I_l. Comme $C_1 \times C_2 \neq 0$, on aura:

$$(6{,}391)\qquad T_1 \times T_2 \neq 0.$$

Nous distinguerons plusieurs cas:

Soit d'abord $T_2 \subset T_1$. q étant un point de C_2 il existe un point $q' \in C_1$ tel que: $\psi_l(q) = \psi_l(q')$. En utilisant les inégalités (6,37) on obtient:

$$(6{,}392)\qquad \varrho(q, C_1) \leqq \varrho(q, q') \leqq \beta.$$

Donc on a l'inégalité (6,383).

Dans le cas $T_1 \subset T_2$ on obtient de même (6,384).

Supposons enfin $T_1 - T_2 \neq 0 \neq T_2 - T_1$.

Posons: $C_i^* = C_i \times M_l$, $C^* = C \times M_l$, $i=1,2$. Les ensembles C_i^*, C^* étant des continus et M_l ne possédant pas la propriété $V_1\left(\beta + \frac{\eta}{2}\right)$ on aura une au moins des relations:

$$(6{,}393)\qquad \begin{aligned} &\delta^*(\overrightarrow{C_1^* C_2^*}) < \beta + \frac{\eta}{2} \\ &\delta^*(\overrightarrow{C_2^* C_1^*}) < \beta + \frac{\eta}{2} \end{aligned}$$

Supposons que l'on a la première de ces inégalités et soit $q \in C_2$. Si $q \in C_2^*$, on aura:

$$(6{,}394)\qquad \varrho(q, C_1) \leqq \varrho(q, C_1^*) \leqq \varrho^*(\overrightarrow{C_1^*, C_2^*}) < \beta + \frac{\eta}{2}.$$

Si $q \in C_2 - C_2^*$, alors $q \in M_{l+1}$ et on a:

$$(6{,}395)\qquad \varrho(q, \psi_l(q)) \leqq \text{minimum}\left(\frac{\beta}{2}, \frac{\eta}{4}\right)$$

Deux cas sont possibles: si $\psi_l(q) \subset T_1$, alors C_1 contient un point q' tel que $\psi_l(q') = \psi_l(q)$ et on a, d'après (6,37), (6,390), (6,395):

$$(6{,}396)\qquad \varrho(q, C_1) \leqq \varrho(q, q') \leqq \varrho(q, \psi_l(q)) + \varrho(q', \psi_l(q')) \leqq \beta < \beta + \eta.$$

Si au contraire $\psi_l(q) \subset T_2 - T_1$, alors soit $q_1 \in C_1^* \times C_2^*$. C_2 contenant un point de M_{l+1} (savoir le point q), doit contenir d'après

(6,390) le point a_{l+1}. Donc τ_2 contient les deux segments: $\overline{a_{l+1}\psi_l(q)}$ et $\overline{a_{l+1}\psi_l(q_1)}$. D'autre part soit c un point de $\tau_1 - \tau_2$; le segment $\overline{c\psi_l(q_1)}$ est contenu dans T_1, donc ne contient pas $\psi_l(q)$; il en résulte que $\psi_l(q) \epsilon \overline{a_{l+1}\psi_l(q_1)}$, donc, il existe un point $q_2 \epsilon C_2^*$ tel que $\psi_l(q_2) = \psi_l(q)$ et on a d'après la première inégalité (6,393):

$$(6,397) \qquad \varrho(q_2, C_1^*) < \beta + \frac{\eta}{2}$$

$$(6,398) \qquad \varrho(q, C_1^*) \leqq \varrho(q, q_2) + \varrho(q_2, C_1^*) < \frac{\eta}{2} + \beta + \frac{\eta}{2} = \beta + \eta$$

donc à fortiori:

$$(6,399) \qquad \varrho(q, C_1) < \beta + \eta.$$

On voit que la prémière inégalité (6,393) entraîne (6,399) pour tout $q \epsilon C_2$ — c. à d. elle entraîne (6,383). — On montre de même, que la seconde inégalité (6,393) entraîne (6,384). —

On voit ainsi, qu'une au moins des inégalités (6,383), (6,384) doit avoir lieu, donc M^* n'a pas la propriété $V_1(\beta+\eta)$, ce qui démontre (6,3) et notre lemme.

7. Désignons par Γ_β l'ensemble de tous les continus de Γ, qui possèdent la propriété $V_1(\beta)$.

L'ensemble Γ_β est fermé.

Soit en effet $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, $A_n \epsilon \Gamma_\beta$. A_n contient un sous-continu $A_n^{(0)}$, qui admet une décomposition: $A_n^{(0)} = A_n^{(1)} + A_n^{(2)}$, $A_n^{(1)}$ et $A_n^{(2)}$ étant des continus tels que:

$$(7,1) \qquad \varrho^*(\overrightarrow{A_n^{(1)}, A_n^{(2)}}) \geqq \beta \leqq \varrho^*(\overrightarrow{A_n^{(2)}, A_n^{(1)}}).$$

Γ étant compact on peut déterminer une suite d'entiers $\{n_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ telle que les deux suites: $\{A_{n_k}^{(1)}\}$ et $\{A_{n_k}^{(2)}\}$ sont convergentes. Soient:

$$(7,2) \qquad A^{(i)} = \lim_{k\to\infty} A_{n_k}^{(i)} \qquad i = 1, 2$$

$$(7,3) \qquad A^{(0)} = A^{(1)} + A^{(2)}.$$

On a évidemment $A^{(0)} \subset A$; $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ sont des continus. Enfin une considération simple, que j'omets, montre que les relations (7,1) entraînent:

$$(7,4) \qquad \varrho^*(\overrightarrow{A^{(1)}, A^{(2)}}) \geqq \beta \leqq \varrho^*(\overrightarrow{A^{(2)}, A^{(1)}}).$$

Donc $A^{(0)}$ possède la propriété $V(\beta)$, et A la propriété $V_1(\beta)$ c. à d. $A \subset \Gamma_\beta$ c. q. f. d.

8. L'ensemble Γ_β est non dense.

D'après (7) il suffit de démontrer que $\Gamma - \Gamma_\beta$ est dense dans Γ. Soit τ un nombre positif arbitraire, B un continu de Γ. Il suffit de démontrer l'existence d'un continu $G \epsilon \Gamma$ tel que:

$$(8,1) \qquad \varrho^*(B, G) < \tau$$

(8,2) $\qquad G$ ne possède pas la propriété $V_1(\beta)$.

D'après la définition de Γ (voir **2**), B est un continu contenu dans un certain cercle S de rayon 1. Désignons S_i l'intérieur de ce cercle et supposons fixé un système de coordonnées cartésiennes x, y, ayant l'origine dans le centre de S.

La transformation:

$$(8,3) \qquad x' = \left(1 - \frac{\tau}{4}\right)x; \qquad y' = \left(1 - \frac{1}{4}\right)y$$

transforme B en un continu B_1, tel que:

$$(8,4) \qquad \varrho^*(B, B_1) \leqq \frac{\tau}{4}$$

$$(8,42) \qquad B_1 \subset S_i; \quad \varrho(B_1, S - S_i) \leqq \frac{\tau}{4}.$$

Entourons chaque point de B_1 d'un cercle de rayon $\frac{\tau}{8}$. D'après le théorème de Heine-Borel on peut trouver un nombre fini de ces cercles de telle manière que l'ensemble somme U de leurs intérieurs contient B_1.

Soient $g_1, g_2, \ldots, g_l$ les centres de ces cercles. Soit B_2 un arc simple contenu dans U et passant par les points: $g_1, g_2, \ldots, g_l$. D'après la construction de B_2 et les relations: (8,41), (8,42) on aura:

$$(8,51) \qquad \varrho^*(B_2, B_1) \leqq \frac{\tau}{8}$$

$$(8,52) \qquad B_2 \subset U \subset S_i; \quad \varrho(B_2, S - S_i) \leqq \frac{\tau}{8}$$

$$(8,53) \qquad \varrho^*(B_2, B) \leqq \varrho^*(B_2, B_1) + \varrho^*(B_1, B) \leqq \tfrac{3}{8}\tau,$$

Soit I un segment rectiligne arbitraire. Il existe une transformation biunivoque et bicontinue du plan en soi, qui transforme I en B_2 [1]).

(8,6) $$\Phi(I)=B_2, \quad \Phi^{-1}(B_2)=I.$$

Soit H un domaine borné du plan contenant I. La transformation Φ étant continue, on peut déterminer un $\sigma>0$ tel que les relations:

(8,7) $$\varrho(p_1, p_2)\leqq\sigma \qquad p_1 \epsilon \overline{H},\ p_2 \epsilon \overline{H}$$

entraînent

(8,71) $$\varrho(\Phi(p_1), \Phi(p_2)) < \text{minimum}\left(\frac{\tau}{8}, \beta\right).$$

Soit L^* un losange $L(I)$ tel que

(8,72) $$L^*\subset H; \quad \varrho^*(\overrightarrow{I, L^*})\leqq\frac{\sigma}{2}.$$

D'après le lemme 6 le segment I possède la propriété $W\left(\frac{\sigma}{2}\right)$. donc il existe un arcs simple N, coextrémal avec I tel que:

(8,73) $$N\subset L^*$$

(8,74) N ne possède pas la propriété $V_1(\sigma)$.

Posons:

(8,75) $$G=\Phi(N)$$

je dis que G satisfait aux conditions: $G \epsilon \Gamma$, (8,1), (8,2).

N étant coextrémal avec I, (8,72) et (8,73) entraînent:

(8,81) $$\varrho^*(I, N)\leqq\sigma$$

(8,82) $$\varrho^*(B_2, G)=\varrho^*(\Phi(I), \Phi(N))\leqq\frac{\tau}{8}$$

(8,53) et (8,82) entraînent (8,1), et d'autre part, on a d'après (8,52) $G\subset S$, c. à d.

(8,83) $$G \epsilon \Gamma.$$

Soit maintenant G_0 un sous-continu de G et considérons une décomposition $G_0=G_1+G_2$, G_1 et G_2 étant des continus. Posons $Q_i=\Phi^{-1}(G_i)$ $i=0, 1, 2$.

[1]) D'après le théorème de Schoenfliess.

On aura $Q_0=Q_1+Q_2$, Q_0 étant un sous-continu de N, Q_1, Q_2 étant des continus. D'après (8,74) on aura donc une au moins des inegalités:

(8,84) $$\varrho^*(\overrightarrow{Q_1, Q_2})<\sigma$$ $$\varrho^*(\overrightarrow{Q_2, Q_1})<\sigma$$

et par suite l'une au moins des inégalités

(8,85) $$\varrho^*(\overrightarrow{G_1, G_2})<\beta$$ $$\varrho^*(\overrightarrow{G_2, G_1})<\beta$$

(8,2) et l'enoncé 8 sont donc démontrés.

9. La démonstration du théorème III s'achéve en quelques mots. Soit Γ_0 l'ensemble de tous les éléments de Γ, qui se réduisent à un seul point. Or on a manifestement:

(9,1) $$\Gamma_K=\Gamma-\left(\Gamma_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_{\frac{1}{n}}\right)$$

Γ_0 et $\Gamma_{\frac{1}{n}}$ pour $n=1, 2,\ldots$ sont fermés et non denses (d'après 7, 8). Donc Γ_K est un G_δ dense sur Γ, donc de seconde catégorie dans Γ c. q. f. d.

Varsovie, 22. IV. 1930.