Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre.

Von

Stanisław Ulam (Lwów).

Herr Banach stellte folgendes Problem, das als Verallgemeinerung des bekannten Lebesgue'schen Massproblems aufgefasst werden kann:

Gibt es eine, für alle Teilmengen des Intervalles $(0, 1)$ erklärte reelle Funktion f, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

1°: Es gibt eine Menge Q, für welche $f(Q) > 0$ ist.
2°: Für einen einzelnen Punkt p ist stets $f(p) = 0$.
3°: Ist $\{A_n\}$ eine Folge von paarweise elementfremden Mengen, so gilt: $f(A_1 + A_2 + \dots A_n + \dots) = f(A_1) + f(A_2) + \dots f(A_n) + \dots$

Die Nichtexistenz einer solchen Funktion haben unter Voraussetzung der Richtigkeit der Kontinuumhypothese Banach und Kuratowski bewiesen [1]). Somit wurde das bekannte Vitali'sche Resultat verschärft, laut dessen es im Sinne von Lebesgue unmessbare Mengen gibt. [Die Lebesgueschen Bedingungen enthalten bekanntlich ausser den Bedingungen 1°...3° auch das Postulat der Massgleichheit für kongruente Mengen].

Im Anschluss daran bewies Banach, unter Zugrundelegung der Cantorschen Hypothese: $2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$, den folgenden, allgemeinen Satz [2]):

Ist f eine additive Funktion vom Typus $\aleph_\xi$, so ist $\aleph_\xi$ eine unerreichbare Kardinalzahl [3]); dabei soll eine Funktion f additiv mit der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ heissen, wenn für elementfremde Mengen A_η stets

$$f\left(\sum_\eta A_\eta\right) = \sum_\eta f(A_\eta); \quad 0 \leqq \eta < \omega_\xi$$

gilt, wo ω_ξ die erste Ordinalzahl von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ bezeichnet; die Funktion f ist vom Typus $\aleph_\xi$, wenn sie mit jeder Mächtigkeit, die kleiner als $\aleph_\xi$ ist, additiv ist, nicht aber mit der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ selbst.

In der vorliegenden Arbeit wird nun vor allem gezeigt:

(I): *In dem Satze von Banach ist die Hypothese $2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$ vollkommen entbehrlich.*

(II): *Für das Banach-Kuratowski-sche Resultat genügt es nur die Richtigkeit der folgenden, schwächeren Hypothese vorauszusetzen:*

(I) Unter der Kardinalzahlen, die $\leqq \mathfrak{c}$ sind ($\mathfrak{c}$ bezeichnet die Mächtigkeit des Kontinuums) gibt es keine unerreichbare.

Es sei dem Verfasser gestattet Herrn Prof. Kuratowski auch hier, für das Interesse, welches Er an dieser Arbeit nahm, sowohl wie für die wertvollen Ratschläge den wärmsten Dank aussprechen zu können.

§ 1.

Wir beweisen zunächst den folgenden grundlegenden

Satz (*A*): *Es sei Z eine Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, so dass es unter den Kardinalzahlen, die $\leqq \mathfrak{m}$ sind, keine unerreichbare gibt. Behauptung: $\mathfrak{m}$ ist „unmessbar", d. h. in der Menge Z lässt sich keine Funktion definieren, die die Bedingungen 1° — 3° erfüllen würde.*

(Aus diesem Satze folgt direkt die Richtigkeit der Behauptung II).

1. Beweis. Wenn die Mächtigkeit von Z $\aleph_0$ oder kleiner ist, ist die Behauptung trivial. Wir werden den Satz durch transfinite Induktion beweisen. Um die Methode deutlich hervortreten zu lassen, zeigen wir die Richtigkeit des Satzes im Falle wo die Mächtigkeit von Z $\aleph_1$ ist.

[1]) Fund. Math. T. XIV.

[2]) Fund. Math. T. XV.

[3]) Die Kardinalzahl $\aleph_\xi$ heisst unerreichbar, falls ξ eine Grenzzahl ist, $\aleph_\xi > \aleph_0$ ist und sich nicht als Summe von Kardinalzahlen die kleiner als $\aleph_\xi$ sind, so dass die Anzahl der Summanden auch kleiner als $\aleph_\xi$ ist, darstellen lässt. Es ist nicht bekannt, ob solche Kardinalzahlen überhaupt existieren. Vgl. Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 131, Leipzig 1914.

Die Unmöglichkeit der Angabe von f, des „Masses" in Z ergibt sich aus folgender Tatsache:

Es lässt sich eine unendliche Matrix von Teilmengen von Z konstruieren:

$$\begin{array}{l} A_1^1, A_2^1, \dots A_n^1 \dots A_\alpha^1 \dots \\ A_1^2, A_2^2, \dots A_n^2 \dots A_\alpha^2 \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_1^n, A_2^n, \dots A_n^n \dots A_\alpha^n \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

für $n < \infty$, $\alpha < \Omega$, d. i. mit $\aleph_0$ Zeilen und $\aleph_1$ Spalten mit den Eigenschaften:

a) Je zwei Mengen derselben Zeile sind elementfremd, d. i. $A^n_{\alpha_1} \cdot A^n_{\alpha_2} = 0$, für jedes n, wenn nur $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

b) Die Vereinigungsmenge jeder Spalte ergibt „fast" das ganze, d. i. mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Elementen, Z. Anders gewendet: für jedes α ist $(Z - \sum\limits_{n=1}^{\infty} A^n_\alpha)$ höchstens abzählbar.

Da die Existenz des Masses (der Funktion f) eine Invariante gegenüber ein-eindeutigen Transformationen der Menge Z ist, können wir voraussetzen, dass die Menge Z, mit deren Teilmengen die Matrix konstruiert worden ist, diejenige Menge Q ist, für welche laut der Bedingung 1° $f(Q) > 0$ ist. Da weiter alle abzählbaren Mengen nach 3° und 1° nur das Mass 0 haben können, so sieht man, dass die Vereinigungsmenge jeder Spalte eine Menge von positivem Masse sein muss: für jedes α, $f(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A^n_\alpha) > 0$.

Nun aber muss in jeder Spalte eine Menge hervortreten, die eine Menge enthält, für welche $f > 0$ ist.

Die Menge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A^n_\alpha$ kann man nämlich in der Form darstellen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A^n_\alpha = A^1_\alpha + [A^2_\alpha - A^1_\alpha] + [A^3_\alpha - (A^1_\alpha + A^2_\alpha)] + \dots [A^n_\alpha - \sum_{k=1}^{n-1} A^k_\alpha] + \dots$$

wo offenbar alle Mengen elementfremd sind. Wenn die Vereinigungsmenge abzählbar vielen elementfremden Mengen eine Menge von positivem Masse ergibt, so muss nach der Bedingung 3 mindestens eine dieser Mengen ein positives Mass haben.

Da jedoch $A^n_\alpha - \sum\limits_{k=1}^{n-1} A^k_\alpha \subset A^n_\alpha$, gibt es wirklich in jeder Spalte eine Menge, die eine Menge von positiven Masse enthält.

Unsere Matrix hat unabzählbar viele Spalten und nur $\aleph_0$ Zeilen Somit gibt es mindestens eine Zeile in der unabzählbar viele solcher Mengen hervortreten. Das ist aber unmöglich, weil laut b) die Mengen derselben Zeile elementfremd sind und höchstens abzählbar viele elementfremde Mengen von positivem Masse existieren können.

Es bleibt nur die Matrix wirklich zu konstruieren. Die Menge Z hat laut der Voraussetzung die Mächtigkeit $\aleph_1$. Ihre Elemente lassen sich also in eine transfinite Reihe bringen:

$$p_1, p_2, \dots, p_\alpha, \dots \qquad \alpha < \Omega.$$

Für jede Ordinalzahl $\alpha < \Omega$ bereiten wir uns eine Reihe von lauter verschiedenen natürlichen Zahlen, vom Typus α vor:

$$n_1^\alpha, n_2^\alpha, \dots, n_\xi^\alpha, \dots, \qquad \xi < \alpha.$$

Das Element p_α wird nun zugezählt den Mengen:

$$p_\alpha \in A_\xi^{n_\xi^\alpha}, \quad \text{für jedes } \xi < \alpha.$$

(Die Mengen A^n_ξ sind auf diese Weise Urbildmengen der Funktion, die jedem Paar der Ordinalzahlen ξ, α eine natürliche Zahl n^α_ξ zuordnet, so dass man die Zuordnung der α oder vielmehr der Elemente p_α hinschreiben kann: $p_\alpha \in A^n_\xi \equiv \{n = n^\alpha_\xi\}$ bei festem ξ).

Die oberen Indizes, bei einem gegebenem Elemente lauter verschiedene natürliche Zahlen, bestimmen die Zeilen. Jedes Element tritt daher nur höchstens einmal in jeder Zeile hervor; — die Mengen derselben Zeile sind daher elementfremd.

Damit ist die erste Eigenschaft unseres Schemas: a), bewiesen.

Was nun die zweite anbetrifft, so sieht man direkt aus der Einreihung der Elemente, dass sich in der α-ten Spalte alle Elemente, deren Nummer in der Reihe $> \alpha$ ist, befinden, d. i. alle mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen.

Die Matrix is konstruiert — der Satz ist für $\aleph_1$ bewiesen.

2. Wie man leicht einsieht, lässt sich für jede Menge Z von der beliebigen Mächtigkeit $\aleph_\xi$, wenn nur ξ keine Grenzzahl ist, eine analoge Matrix definieren; die Matrix hat dann $\aleph_{\xi-1}$ Zeilen und $\aleph_\xi$ Spalten. Je zwei Mengen derselben Zeile sind elementfremd, die

Vereinigungsmenge jeder Spalte ergibt Z mit Ausnahme von höchstens $\aleph_{\xi-1}$ Elementen.

Wir können voraussetzen, dass unsere Behauptung für Mengen von den Mächtigkeiten $<\aleph_\xi$ schon bewiesen ist. Wir wollen sie für $\aleph_\xi$ beweisen. Sei zunächst ξ keine Grenzzahl.

Wir unterscheiden die zwei einzig möglichen Fälle:

α) Bei jeder Zerlegung von Z in $\aleph_{\xi-1}$ Mengen, gibt es immer deren eine, die eine Teilmenge von positivem Masse enthält.

β) Es gibt mindestens eine Zerlegung von Z in $\aleph_{\xi-1}$ Mengen die alle, samt ihren Teilmengen dass Mass 0 haben [1]).

Wenn α zutrifft, definieren wir die oben genannte Matrix. Jede Spalte repräsentiert dann eine Zerlegung von Z in $\aleph_{\xi-1}$. Mengen. Es gibt also unter ihnen eine, die eine Teilmenge von positivem Masse enthält. Da es mehr Spalten, als Zeilen gibt, führt dies, wie wir schon wissen, zum Widerspruche.

Im zweiten Falle existiert eine Zerlegung von Z in $\aleph_{\xi-1}$ Mengen, die keine Teilmenge von positivem Masse enthalten.

Die Nichtexistenz des Masses ergibt sich hier aus der Voraussetzung, dass Mengen von Mächtigkeiten, die kleiner als $\aleph_\xi$ sind, nur dass Mass 0 haben können, und dem folgenden

Lemma 1. *Sei m eine unmessbare Kardinalzahl, n eine Kardinalzahl, die sich als Summe von m unmessbaren Kardinalzahlen darstellen lässt. Dann ist n auch unmessbar* [2]).

Das Lemma kann auch so ausgesprochen werden: Ist die Menge Z, in der eine Massfunktion f erklärt is, in m Mengen A_α zerlegt, wo m eine unmessbare Kardinalzahl ist, so ist für mindestens eine dieser Mengen $f(A_\alpha) \neq 0$.

In der Tat können die Summanden nur das Mass 0 haben, wir könnten sie als Elemente einer neuen Mannigfaltigkeit auffassen, die dann die unmessbare Mächtigkeit m haben würde. Ein Mass in n wird dann automatisch auch ein Mass in m definieren [3]), was unserer Voraussetzung widerspricht.

[1]) Die Möglichkeit des negativen Masses, als vollkommen symmetrisch zu α) brauchen wir nicht gesondert zu behandeln.

[2]) Die Beweismethode ist in der zit. Arbeit von **Banach** enthalten.

[3]) Es genügt einer Teilmenge der Mannigfaltigkeit, das Mass beizulegen, das die Vereinigungsmenge der Mengen, die den Elementen dieser Teilmenge entsprechen, hat.

Im Falle β) ist offenbar die Voraussetzung des Lemmas erfüllt und somit ist die Behauptung für β) erwiesen.

Auch im Falle, wo ξ eine erreichbare Grenzzahl ist, führt das gleiche Lemma zum Ziele.

Die Erreichbarkeit besagt eben eine Möglichkeit der Zerlegung von Z in $\aleph_\eta$ Mengen mit Mächtigkeiten $<\aleph_\xi$, so dass $\aleph_\eta < \aleph_\xi$ ist. Nach der Voraussetzung bei transfiniter Induktion sind alle diese Alephs unmessbar, so dass man wieder das Lemma anwenden kann. Damit is (A) in allen Teilen bewiesen

Bemerkung 1: Wir bemerken, dass wir zugleich durch Induktion die Behauptung erwiesen haben: wenn $\aleph_\xi$ unmessbar ist, so ist es auch $\aleph_{\xi+1}$.

Es dürfte vielleicht nicht ohne Interesse sein dem Beweise eine Tatsache zu entnehmen, die gewissermassen den Charakter eines abstrakten Überdeckungssatzes hat, der für die Mächtigkeit $\aleph_1$ lautet:

(B). *Werden alle Teilmengen einer Menge Z von der Mächtigkeit $\aleph_1$ in zwei Klassen M und N eingeteilt, so dass in M höchstens abzählbar viele elementfremde Mengen existieren, so gibt es in N abzählbar viele Mengen $\{A_n\}$ so dass $(Z-\sum_{n=1}^{\infty} A_n)$ höchstens abzählbar ist.*

Das folgt aus der Existenz der Matrix für $\aleph_1$: Da es in M nur abz. viele elementfremde Mengen gibt, muss in der Matrix eine solche Spalte existieren, die nur Mengen aus N enthält. (Im anderen Falle gäbe es in jeder Spalte eine Menge aus M. Dann würden diese Mengen, wie es sich zeigte, in unabzählbarer Anzahl in einer Zeile, also elementfremd, hervortreten, was unmöglich ist). Die Spalte ergibt aber die gewünschte abz. Anzahl von Mengen, die Z, mit Ausnahme von höchstens abz. v. Elementen, überdecken.

Ein entsprechender Satz gilt für die höheren Mächtigkeiten.

Es bleibt die Frage offen, ob der Überdeckungssatz in seiner Fassung für $\aleph_1$ vielleicht für alle Mächtigkeiten gültig ist.

Die Bedingung, dass f eine reelle Funktion sein soll wurde in dem Beweise nicht vollends verwertet.

Der Beweis würde fast unverändert verlaufen, wenn f nur an die Bedingung gebunden wäre, dass die Werte von f einen Zahlkörper durchlaufen, wo höchstens abzählbare Addition von „Null" verschiedener Elemente zulässig ist.

Für $\aleph_1$ folgt dies unmittelbar aus dem „Überdeckungssatze" wenn wir M als die Klasse aller Mengen mit nichtverschwindendem Masse deuten.

Der Satz besagt nämlich, dass es abz. viele andere Mengen, also solche vom Masse 0 gibt, die zusammen eine Menge vom Masse $\neq 0$ ergeben, was mit der Bedingung 3 im Widerspruche steht.

Bemerkung 2. *Wenn eine Kardinalzahl m unmessbar ist, so ist auch jede kleinere Kardinalzahl n unmessbar.*

Beweis: Wenn ein Mass in der Menge Z existiert, können wir in jeder Menge Y, die Z umfasst, die Massfunktion f folgendermassen definieren: eine Teilmenge Y' von Y enthält immer eine (ev. leere) Teilmenge $Z' = ZY'$ von Z Wir setzen einfach: $f(Y') = f(Z')$.

Man verifiziert leicht, dass die Bedingungen 1—3. von selbst erfüllt sind. Wir zeigten: ist n messbar, so ist es auch jede Kardinalzahl $m > n$, was natürlich mit der Bemerkung 2 äquivalent ist.

Nach leichter Überlegung erhält man, dass aus (A), dem Lemma 1 und der Bemerkung 1 die am Anfang genannte Formulierung von Banach folgt.

§ 2.

Wir wollen zunächst einige Sätze über ein Mass von einer ganz speziellen Struktur beweisen. Es handelt sich um eine Funktion, die nur der Werte 0 bzw 1 fähig ist — ein „zweiwertiges" Mass. Wir beweisen den

Satz 1. *Lässt sich in einer Menge von der Mächtigkeit m kein zweiwertiges Mass definieren, so ist es auch unmöglich ein solches Mass für Mengen N mit der Mächtigkeit 2^m anzugeben* [1])

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass es keine Zerlegung der Menge N in m disjunkte Teilmengen vom Masse 0 geben darf, soll ein zweiwertiges Mass in N existieren. Nach Anwendung der de Morganschen Regeln läuft diese Bemerkung dahin, dass der Durchschnitt von m Mengen vom Masse 1 wieder eine Menge vom Masse 1. ergibt. Diese Bemerkung lässt sich nämlich durch das Lemma 1 des ersten §. nur für das zweiwertige Mass transponiert, rechtfertigen.

[1]) dieser Satz wurde unabhängig auch von A. Tarski gefunden.

Die Menge N von der Mächtigkeit 2^m können wir uns als die Menge aller transfiniter Reihen von demselben Typus der Mächtigkeit m, deren Glieder 0 oder 1 sind, vorstellen.

Wir zerlegen die Menge N in zwei disjunkte Teilmengen, indem wir für irgendeine Stelle der transfiniten Reihe, alle Reihen die an dieser Stelle 0 bzw. 1 haben, gesondert zusammenfassen. Wenn wir diese Zerlegung für alle Stellen der Reihe vornehmen, so erhalten wir m Zerlegungen in zwei disjunkte Teilmengen. Da unser Mass zweiwertig sein soll, muss eine dieser Teilmengen das Mass 1, die andere das Mass 0 haben

Wählen wir aus jeder Zerlegung die Menge vom Masse 1 und bilden den Durchschnitt der so erhaltenen m Mengen. Dieser Durchschnitt besteht, wie man leicht einsieht, aus einem einzigen Elemente — einer einzigen Reihe, muss also das Mass 0 haben. Nun sollte aber jeder Durchschnitt von m Mengen vom Masse 1, das Mass 1 haben. — Die Annahme der Existenz des zweiwertigen Masses in N führte zum Widerspruche

Satz 2. *Wenn sich in einer Menge Z eine Massfunktion f erklären lässt, dagegen kein „zweiwertiges" Mass, so kann man für jedes natürliche n die Menge Z in endlichviele Teile zerlegen, die alle ein Mass $\leqq \frac{1}{n}$ haben.*

Beweis: Wir beweisen zunächst (a): Ist im Raume Z, wo eine Massfunktion f erklärt ist, die Bedingung erfüllt:

(δ) Es gibt keine Menge von positivem Masse δ so dass jede Teilmenge dieser Menge entweder das Mass δ oder das Mass 0 besitzt,

dann gilt: für jedes $\varepsilon > 0$ kann Z in eine endliche Anzahl von Mengen zerlegt werden:

$$Z = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

so dass

$$f(E_i) \leqq \varepsilon \qquad (i = 1 \dots k)\ ^{1)}.$$

Einfachkeitshalber legen wir $f(Z) = 1$.

Es genügt den Satz für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ zu beweisen.

[1]) Den Satz kann mann auch so aussprechen: enthält Z keine Teilmenge mit „irreduziblem" positivem Masse, so kann man Z mit endlichvielen Mengen „unbegrenzt fein überdecken".

Denn wenn $Z = E_1 + E_2 + \ldots + E_k$ mit $f(E_i) \leqslant \frac{1}{2}$ ist, so kann, da in jedem E_i die Bedingung δ natürlich auch erfüllt ist, der Satz auf E_i wieder angewendet werden, so dass jedes E_i in eine endliche Anzahl von Mengen mit Massen $\leqslant \frac{1}{2^2}$ zerfällt; somit wird auch ganz Z in solche Mengen zerlegt, u. s. w.

Wir zeigen: Aus der Unrichtigkeit der Behauptung (a) folgt die Existenz einer transfiniten Folge: $P_1 \supset P_2 \supset \ldots P_\alpha \supset \ldots$ $\alpha < \Omega$ so dass 1°: $f(P_\xi) < f(P_\eta)$, für $\xi > \eta$, 2°: $f(P_\alpha) > \frac{1}{2}$ für jedes $\alpha < \Omega$.

Das ist aber offenbar unmöglich: eine absteigende Folge von reellen Zahlen kann nicht die Mächtigkeit $\aleph_1$ besitzen.

Wir definieren die Folge P_α durch transfinite Induktion:

Es sei $P_1 = Z$ und die Folge $P_1, P_2, \ldots, P_\xi, \ldots$ $\xi < \eta < \Omega$ bereits konstruiert.

Wir bilden den Durchschnitt $R = \prod_{\xi<\eta} P_\xi$. Es ist wegen der abzählbaren Additivität $f(R) \geqslant \frac{1}{2}$. Ist $f(R) = \frac{1}{2}$, dann steht $E = R + (E - R)$ $(f(E-R) = \frac{1}{2}!)$ im Widerspruch mit der Voraussetzung der Unrichtigkeit unserer Behauptung. Es ist also $f(R) > \frac{1}{2}$. Es sei $R = R_1 + R_2$, wo $f(R_1) \geqslant f(R_2) > 0$, eine Zerlegung von R (Eine solche Zerlegung gibt es immer, da (δ) erfüllt ist). Nun muss $f(R_1) > \frac{1}{2}$ sein: sonst würde die Zerlegung $E = (E-R) + R_1 + R_2$ uns wieder mit unserer Voraussetzung in Widerspruch bringen. Wir setzen $P_\eta = R_1$, Da $f(R_2)$ positiv ist, so ist

$$f(R_1) + f(P_\eta) < f(R) = f(\prod_{\xi<\eta} P_\xi) \leqslant f(P_\xi), \qquad (\xi < \eta).$$

Die Forderungen 1° und 2° sind so erfüllt. Die transfinite Folge ist konstruiert womit der Beweis der Behauptung (a) abgeschlossen ist.

Um jetzt den Beweis für den Satz 2. zu erbringen, genügt es offenbar aus der Nichtexistenz des zweiwertigen Masses das Zutreffen der Bedingung (δ) zu zeigen. Das ergibt sich aber so:

Existierte, entgegen der Bedingung (δ), eine Menge Y mit dem Masse δ, so dass jede Teilmenge dieser Menge entweder das Mass δ oder 0 hätte, so liesse sich ein zweiwertiges Mass in Z so definieren: Für eine Menge $Z' \subset Z$:

$$f(Z') = \frac{f(Z'Y)}{\delta}.$$

Wir werden jetzt einige Folgerungen aus der Hypothese (I) ziehen.

Wie gesagt, folgt aus der Richtigkeit von (I) das verschärfte Resultat von Vitali: Es lässt sich in dem Intervalle (0, 1) keine Massfunktion definieren.

Satz 3. *Wenn sich in einer Menge Z überhaupt ein Mass definieren lässt, so kann man (unter der Voraussetzung I) ein zweiwertiges Mass in Z definieren.*

Beweis: Wäre kein zweiwertiges Mass möglich, so würde sich nach dem Satze 2. dieses § für jedes n eine Zerlegung von Z in Mengen ergeben:

$$\begin{aligned} Z &= A_1^1 + A_2^1 + \ldots A_{m(1)}^1 \\ Z &= A_1^2 + A_2^2 + \ldots A_{m(2)}^2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ Z &= A_1^n + A_2^n + \ldots A_{m(n)}^n \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so dass $f(A_k^n) \leqq \frac{1}{n}$ für $k = 1, 2 \ldots m(n)$.

Bilden wir den Durchschnitt

$$Z = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m(n)} A_k^n = \sum_{k_n \leq m(n)} A_{k_1}^1 \cdot A_{k_2}^2 \cdots A_{k_n}^n \cdots$$

Zur rechten Hand haben wir Kontinuum $\mathfrak{c}$ von Mengen, die alle das Mass 0 haben-als Durchschnitte von Mengen von beliebig kleinem Masse.

Wenn wir beachten, dass $\mathfrak{c}$ nach der ersten Folgerung aus der Hypothese (I) unmessbar ist, und das Lemma 1. anwenden, so sehen wir, dass das ganze Z auch unmessbar ist, entgegen der Voraussetzung.

Aus der Richtigkeit von (I) folgt weiter:

Satz 4. *Ist $\mathfrak{m}$ unmessbar, so ist auch $2^{\mathfrak{m}}$ unmessbar.*

Beispielweise $\mathfrak{f} = 2^{\mathfrak{c}}$, $2^{\mathfrak{f}}$, u. s. w.

Nach dem Satze 3. genügt es nur die Nichtexistenz des zweiwertigen Masses nachzuweisen. Dies ist aber der Satz 1. dieses §.

Zusammenfassend: Die „Klasse" der unmessbaren Alephs enthält 1⁰: $\aleph_0$, 2⁰: mit $\aleph_\xi$ auch $\aleph_{\xi+1}$, 3⁰: mit m alle Alephs $< m$ (Bemerkung 1), 4⁰: mit m auch jede Vereinigungsmenge von m Mengen, die zu der Klasse gehören (nach dem Lemma 1), endlich 5⁰: unter Zugrundelegung der Hypothese (1) nach dem Satze 4, mit m auch 2^m.

Was die Produkte von Kardinalzahlen anbetrifft, so sieht man, da sich jedes Produkt durch entsprechende Summe und Potenz majorisieren lässt, (das Produkt von m Kardinalzahlen:

$$\aleph_{\xi_1} \times \aleph_{\xi_2} \times \dots \aleph_{\xi_\alpha} \times \dots \text{ ist } \leqslant 2^{\aleph_{\xi_1}+\aleph_{\xi_2}+\dots\aleph_{\xi_\alpha}+\dots})$$

und die Majorante nach unseren Bemerkungen unmessbar ist, dass zu der Klasse der unmessbaren Alephs auch solche hinzukommen, die sich als Produkte einer unmessbaren Anzahl von unmessbaren Kardinalzahlen darstellen lassen. Somit werden, freilich unter Benutzung der Hypothese (1), alle Kardinalzahlen, die keine im Sinne von Sierpiński u. Tarski unerreichbare[1]) Kardinalzahl majorisieren, unmessbar.

[1]) S. die Arbeit dieser Autoren, diese Fundamenta, Bd. XV, S. 292.

Sur les continus absolument indécomposables.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Je dirais qu'un continu C est *absolument indécomposable*, si tout sous-continu de C est indécomposable. Les continus absolument indécomposables ont été découverts par M. Knaster, qui en a donné en 1922[1]) le premier exemple, le continu K_3 (d'ailleurs c'est le seul qui est actuellement connu).

2. Soit Γ l'ensemble de tous les ensembles connexes et fermés, contenus dans un cercle de rayon 1 du plan euclidien. C_1, C_2 désignant deux eléments de Γ, nous poserons d'aprés M. Hausdorff, mais en modifiant sa symbolique[2]):

$$(2,0) \qquad \varrho^*(\overrightarrow{C_1, C_2}) = \text{Maximum } \varrho(C_1, p) \qquad p \in C_2$$

$$(2,1) \qquad \varrho^*(C_1, C_2) = \text{Maximum } [\varrho^*(\overrightarrow{C_1, C_2}), \varrho^*(\overrightarrow{C_2, C_1})].$$

Si l'on considére $\varrho^*(C_1, C_2)$ comme la distance entre C_1, C_2, alors Γ devient un éspace métrique et compact.

Les elements de F qui sont des continus absolument indécomposables forment un sous ensemble de F, que je vais désigner par F_K. Le but de cette Note est d'étudier la nature de cet ensemble. Je vais démontrer dans cet ordre d'idées le théorème suivant.

3 Théorème: *F_K est un G_δ de seconde categorie dans F.*

Je n'utiliserai pas le résultat de M. Knaster; de cette manière

[1]) Fund. Math. III p. 247—286.

[2]) Hausdorf. Grundzüge d. Mengenlehre p. 293 ss. Je remplace les symboles $\overline{AB}, \overrightarrow{AB}$ de M. Hausdorff resp. par $\varrho^*(A, B)$ et $\varrho^*(\overrightarrow{A, B})$. Comp. aussi Ważewski. Fund. Math. IV p. 214—245, en particulier: p. 218 ss.