# Sur l'uniformisation des ensembles mesurables $(B)$.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On dit, d'après M. Lusin, qu'un ensemble plan $E$ est *uniformisé* au moyen de l'ensemble $H \subset E$, si toute parallèle à l'axe $OY$ qui rencontre $E$, rencontre $H$ en un et un seul point.

Dans un mémoire récemment paru [1]) M. N. Lusin a démontré que

*Tout ensemble plan mesurable (B) peut être uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique.*

La démonstration de M. Lusin est basée sur la méthode des ceintures. Le but de cette note est de donner une démonstration du théorème de M. Lusin basée sur des principes différents.

**Lemme 1.** Il existe une fonction $f(t)$ définie et continue dans l'ensemble $T(0 < t \leqslant 1)$ partout du côté gauche, admettant des valeurs distinctes pour $t$ différents, dont l'ensemble de valeurs $f(T)$ est l'ensemble de tous les nombres irrationnels.

Dém. Soit $t$ un nombre réel donné, tel que $0 < t \leqslant 1$: il existe, comme on sait, une suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$ bien déterminée par le nombre $t$, telle que

$$t = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2+n_3}} + \ldots$$

Posons:

$$f(t) = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \frac{1|}{|n_3} + \ldots$$

[1]) *Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles*, Mathematica, vol. IV (Cluj 1930) p. 59. Voir aussi la note de M. Lusin sous le même titre dans les *C. R.*, séance du 10 février 1930.



On vérifie sans difficulté que la fonction $f(t)$ ainsi définie satisfait aux conditions de notre lemme [1]).

**Lemme 2.** Si $E$ est un ensemble plan mesurable $(B)$ non dénombrable, il existe un ensemble $D$ au plus dénombrable et une fonction $F(t)$ définie et continue dans $T(0 < t \leqslant 1)$ partout du côté gauche, dont les valeurs sont des points du plan, distincts pour $t$ différents, et dont l'ensemble de valeurs $F(T)$ est l'ensemble $E - D$.

Dém. Soit $E$ un ensemble plan mesurable $(B)$ non dénombrable. D'après un théorème de M. Lusin [2]), il existe un ensemble au plus dénombrable $D$, tel que l'ensemble $E - D$ est une image continue et biunivoque de l'ensemble $N$ de tous les nombres irrationnels. Soit donc $g(t)$ la fonction à valeurs distinctes, définie et continue dans $N$, telle que $g(N) = E - D$. Or, soit $f(t)$ la fonction satisfaisant au lemme 1. On voit sans peine que la fonction $F(t) = g(f(t))$ remplit les conditions du lemme 2 qui est ainsi démontré.

Désignons maintenant par $\varphi(t)$ l'abscisse du point $F(t)$: la fonction $\varphi(t)$ est évidemment (de même que $F(t)$) continue du côté gauche en chaque point $t$ de l'ensemble $T$. Il en résulte tout de suite que pour tout nombre $a$ de l'ensemble $\varphi(T)$ il existe un nombre $t_0$ de $T$, tel que $\varphi(t_0) = a$ et $\varphi(t) \neq a$ pour $t > t_0$. La fonction $\varphi(t)$ étant une fonction de Baire, l'ensemble $T_0$ de tous les nombres $t_0$ de $T$, tels que $\varphi(t) \neq \varphi(t_0)$ pour $t > t_0$, est, comme j'ai démontré [3]), un ensemble $C(A)$. L'ensemble $T - T_0$ est donc un ensemble $(A)$, ainsi que son image de Baire $F(T - T_0)$. Or, de $F(t) \neq F(t')$ pour $t \neq t'$ et de $T_0 \subset T$ résulte que

$$F(T_0) = F(T) - F(T - T_0) \tag{1}$$

D'après la propriété de la fonction $F$, nous avons $F(T) = E - D$. L'ensemble $E$ étant mesurable $(B)$, l'ensemble $D$ étant au plus dé-

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. X, p. 170.

[2]) Voir *Fund. Math.* t. III p. 30 et t. X, p. 49 et 60 J'ai donné une démonstration détaillée du théorème de M. Lusin dans mon livre *„Zarys teorji mnogości*, Cz. II: Topologja ogólna" Warszawa 1928 (en polonais), p. 207, th. 86. Cf. dans le même ordre d'idées ma note *„Sur les images continues et biunivoques de l'ensemble de tous les nombres irrationnels"* puliée dans le journal *„Mathematica"* vol. I (Cluj, 1929), p. 18 ss.

[3]) *Fund. Math.* t. XV, p. 290.

nombrable, et l'ensemble $F(T-T_0)$ étant un $C(A)$, la formule (1) prouve que $F(T_0)$ est un ensemble $C(A)$.

Or, il résulte tout de suite de la définition de l'ensemble $T_0$ et de $F(T)=E-D$ que $F(T_0)\subset E-D$ et que toute droite parallèle à l'axe $Oy$ qui rencontre l'ensemble $E-D$, a un et un seul point commun avec l'ensemble $F(T_0)$. Or, l'ensemble $D$ étant au plus dénombrable, l'ensemble de toutes les droites parallèles à l'axe $Oy$ qui rencontrent $E$ sans rencontrer $E-D$ est au plus dénombrable. Choisissons sur chaque de ces droites un point de $E$: nous obtiendrons ainsi un ensemble $D_0$ au plus dénombrable. Il est évident que l'ensemble $H=F(T_0)+D_0$ (qui est encore un ensemble $C(A)$) est uniformisateur de $E$. Le théorème de M. Lusin est ainsi démontré pour les ensembles $E$ non dénombrables. Or, pour les ensembles $E$ finis ou dénombrables il est évidemment vrai.

Le théorème de M. Lusin est ainsi démontré complètement.

Or, je dis qu'*un ensemble mesurable* $(B)$ *dont la projection sur l'axe* $OX$ *n'est pas mesurable* $(B)$, *ne peut pas être uniformisé au moyen d'un ensemble analytique* [1]).

En effet, soit $E$ un tel ensemble et admettons qu'il peut être uniformisé au moyen d'un ensemble analytique $H$. $H$ étant un ensemble $(A)$, l'ensemble $Q$ de tous les points $(x,y,z)$ de l'espace, tels que $(x,y)\in H$ et $z\neq 0$, est, comme on sait, aussi un ensemble $(A)$, et parsuite l'ensemble $R$ de tous les points $(x,y+z)$ du plan, tels que $(x,y)\in H$ et $z\neq 0$, comme image continue de $Q$, est encore un ensemble $(A)$. L'ensemble $E$ étant mesurable $(B)$, on en conclut que $E-R$ est un ensemble $C(A)$. Or, on a évidemment: $H=E-R$: l'ensemble $H$ est donc à la fois un $(A)$ et un $C(A)$, d'où résulte, d'après le théorème de Souslin, qu'il est mesurable $(B)$.

La projection $P(E)$ de l'ensemble $E$ sur l'axe $OX$ serait donc une image continue et biunivoque de l'ensemble mesurable $(B)$, $H$, et parsuite, d'après un théorème de M. Lusin [2]), serait elle-même mesurable $(B)$, contrairement à l'hypothèse. Notre assertion est ainsi démontrée.

Il est à remarquer qu'en modifiant un peu notre démonstration du théorème de M. Lusin, on pourrait prouver que *tout ensemble*

[1]) Cf. N. Lusin, l. c., p. 59—60.
[2]) *Fund. Math.* t. X, p. 59.



*plan analytique peut être uniformisé au moyen d'un ensemble* $PC(A)$ (projection d'un ensemble $C(A)$) [1]).

Or, le problème suivant me semble très difficile à résoudre:

*Un ensemble* $C(A)$ *plan est-il toujours uniformisable* (même au sens idéaliste) *au moyen d'un ensemble* $CPC(A)$, *ou même au moyen d'un ensemble projectif?*

[1]) Cf. N. Lusin, *Mathematica*, vol. IV, p. 62.