Beitrag zur Theorie der geordneten Mengen.

Von

Z. Chajoth (Jerusalem).

Im Folgenden sollen einige Sätze über geordnete Mengen bzw. über ihre Ordnungstypen bewiesen werden.

Satz 1. *Es sei* $\mathfrak{m}$ *eine unendliche Kardinalzahl. Die Menge der geordneten Mengen* M *von der Mächtigkeit* $\mathfrak{m}$, *die ihren Ordnungstypus behalten, wenn man aus ihnen auf irgend eine Weise endlich viele Glieder entfernt, ist von derselben Mächtigkeit, wie die Menge aller geordneten Mengen* M *von der Mächtigkeit* $\mathfrak{m}$.

Beweis: Es gibt Mengen, die ihren Ordnungstypus behalten, wenn man aus ihnen auf irgend eine Weise ein Glied, also auch endlich viele Glieder entfernt. Z. B. eine Menge vom Ordnungstypus ω; auch jede Menge vom Ordnungstypus $\omega\mu$ $(\mu \neq 0)$ hat diese Eigenschaft. Sind μ_1 und μ_2 zwei verschiedene Ordnungstypen von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, dann sind auch $\omega\mu_1$ und $\omega\mu_2$ zwei verschiedene[1])

[1]) Es habe M den Typus ω, M_1 den Typus μ_1, M_2 den Typus μ_2, also die geordnete Verbindungsmenge $M.M_1$ (vergl. Fränkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Auflage, S. 87), den Typus $\omega\mu_1$, und $M.M_2$ den Typus $\omega\mu_2$. Gibt es eine ähnliche Abbildung von $M.M_1$ auf $M.M_2$, dann soll gezeigt werden, dass es auch eine ähnliche Abbildung von M_1 auf M_2 gibt.

Es mögen bei der Abbildung von $M.M_1$ auf $M.M_2$ den Elementen $a_1 \lessgtr b_1$ die Elemente $a_2 \lessgtr b_2$ entsprechen. a_1 in $M.M_1$ gehört zu einem α_1 in M_1, ebenso b_1 zu einem β_1, a_2 in $M.M_2$ entspricht einem α_2 in M_2 und ebenso b_2 einem β_2. Aus $a_1 \lessgtr b_1$ folgt entweder $\alpha_1 = \beta_1$ oder $\alpha_1 \lessgtr \beta_1$, ebenso aus $a_2 \lessgtr b_2$ entweder $\alpha_2 = \beta_2$ oder $\alpha_2 \lessgtr \beta_2$. Nun folgt $\alpha_2 = \beta_2$ aus $\alpha_1 = \beta_1$ und umgekehrt. Denn ist $\alpha_1 = \beta_1$, so befinden sich zwischen a_1 und b_1 nur endlich viele Elemente; daher können sich infolge der Ähnlichkeit der Abbildung auch zwischen a_2 und b_2 nur endlich viele Glieder befinden, was wieder $\alpha_2 = \beta_2$ zur Folge hat. Man erhält eine ähnliche Abbildung von M_1 auf M_2, wenn man jedem α_1 sein α_2 zuordnet.

Ordnungstypen von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 2: *Man kann den Ordnungstypus einer jeden geordneten Menge durch Hinzufügung eines einzigen Elementes ändern.*

Beweis: Die Menge besitzt ein grösstes wohlgeordnetes Anfangsstück[1]). Dies sieht man folgendermassen ein. Es gibt unter den Ordnungszahlen eine kleinste, deren Abschnitt nicht einem wohlgeordneten Anfangsstück der gegebenen Menge zugeordnet werden kann. Diese kleinste Ordnungszahl kann keine Limeszahl sein. Denn ist μ eine Limeszahl und gibt es zu jeder Ordnungszahl $\nu < \mu$ ein wohlgeordnetes Anfangsstück der Menge von der Ordnungszahl ν, dann ist die geordnete Vereinigungsmenge aller dieser wohlgeordneten Anfangsstücke wohlgeordnet und hat die Ordnungszahl μ.

Man setze das neue Element unmittelbar hinter das größte wohlgeordnete Anfangsstück. Der Ordnungstypus der neuen Menge ist von dem der vorherigen verschieden.

Satz 3: *Die endlichen Ordnungstypen sind dadurch charakterisiert, dass sie sich nicht ändern, wenn in den ihnen entsprechenden Mengen auf irgend welche Weise ein Element seinen Platz ändert.*

Beweis: Es ist zu zeigen, dass jeder unendliche Ordnungstypus sich ändert, wenn in der ihm entsprechenden Menge ein Element auf geeignete Weise seinen Platz ändert. Ist der Ordnungstypus eine (unendliche) Ordnungszahl, dann setze man das erste Element hinter alle Elemente der Menge. Aus α wird dann $\alpha + 1$. Ist der Ordnungstypus keine Ordnungszahl, dann besitzt die entsprechende Menge ein grösstes wohlgeordnetes Anfangsstück, das nicht die ganze Menge umfasst. Aus der Restmenge wähle man nun irgend ein Element und setze es unmittelbar hinter das grösste wohlgeordnete Anfangsstück. Die Menge ändert damit ihren Ordnungstypus.

[1]) Dieses Anfangsstück kann auch die Nullmenge oder die gesamte Menge sein.

Math. Institut der Hebräischen Universität in Jerusalem, 1. 4. 1930.