Sur une propriété des opérations de M. Hausdorff.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de résoudre un problème qui m'a été posé par M. Poprougénko et qui est une généralisation d'un problème de M. Tarski[1]). Je démontrerai notamment le théorème suivant qui donne la solution positive du problème de M. Poprougénko[2]):

Théorème. *$\mathcal{S}$ étant un ensemble de puissance du continu des opérations de M. Hausdorff*[3]), *il existe toujours une opération de M. Hausdorff, H_P, telle qu'on a*

$$H_P(F) \supset H_N(F), \tag{1}$$

quelle que soit l'opération H_N de l'ensemble $\mathcal{S}$ et quelle que soit la famille d'ensembles F.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{S}$ ayant la puissance du continu, nous pouvons désigner les opérations de M. Hausdorff constituant $\mathcal{S}$ par H_{N_x}, où x parcourt tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$.

Définissons l'ensemble P de suites infinies de nombres naturels comme il suit. La suite infinie de nombres naturels

$$n_1, \ n_2, \ n_3, \ldots$$

1) Voir: *Fund. Math.* t. XV, p. 206.

2) Dans le domaine des ensembles linéaires un problème connexe a été traité par M. Szpilrajn, voir sa Note „Un théorème sur les opérations de M. Hausdorff", Comptes rendus des séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, 1930, p. 13.

3) Quant à la définition des opérations de M. Hausdorff, voir *Fund. Math.* t. XV, p. 199.

appartient à P dans ce et seulement dans ce cas si elle jouit des 4 propriétés suivantes:

1) Les nombres $n_1, n_3, n_5, \dots$ sont tous impairs.
2) Les nombres $n_2, n_4, n_6, \dots$ sont tous de la forme $2^a 3^b 5^c 7^d$, où a, b, c, d sont naturels.
3) Si l'on pose (pour $n = n_2, n_4, n_6, \dots$)

(2) $$n = 2^{a_n} 3^{b_n} 5^{c_n} 7^{d_n},$$

on a, pour k et l naturels:

(3) $$a_{n_{2^k(2l-1)}} = k,$$

(4) $$b_{n_{2^k(2l-1)}} = l,$$

(5) $$c_{n_{2^k(2l-1)}} = c_{n_2},$$

(6) $$d_{n_{2^k(2l-1)}} = d_{n_{2(2l-1)}}.$$

4) En désignant

$$x = \frac{1|}{|d_{n_{2.1}}} + \frac{1|}{|d_{n_{2.3}}} + \frac{1|}{|d_{n_{2.5}}} + \dots,$$

on a

$$\left(\frac{n_1+1}{2}, \frac{n_3+1}{2}, \frac{n_5+1}{2}, \dots\right) \epsilon N_x.$$

Je dis que l'opération H_P satisfait aux conditions de notre théorème.

Soit, en effet, $H_N = H_{N_t}$ une opération appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$, et soit F une famille donnée quelconque d'ensembles. Il suffira de prouver la formule (1).

Soit M un ensemble appartenant à la famille $H_N(F)$. Il existe donc une suite infinie d'ensembles $M_1, M_2, M_3, \dots$ de la famille F, telle que

(7) $$M = \sum_N M_{n_1} M_{n_2} M_{n_3} \dots$$

Nous définirons maintenant la suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \dots$ comme il suit. Soit

(8) $$t = \frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \frac{1|}{|m_3} + \dots$$

Posons

(9) $$E_{2l-1} = M_l, \quad \text{pour} \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

Si l'on a, pour l'indice n, la formule (2), posons

(10) $$E_n = M_{c_n}, \quad \text{si} \quad m_{b_n} = d_n$$

et

(11) $$E_n = M_{a_n}, \quad \text{si} \quad m_{b_n} \neq d_n.$$

Pour tous les autres indices n posons $E_n = M_1$.

Je dis que nous aurons la formule

(12) $$M = \sum_P E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \dots$$

Soit p un élément de l'ensemble M. D'après (7) il existe une suite infinie $(g_1, g_2, g_3, \dots)$ de $N = N_t$, telle que

(13) $$p \epsilon M_{g_1} M_{g_2} M_{g_3} \dots$$

Définissons maintenant la suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \dots$ comme il suit:

(14) $$n_{2l-1} = 2 g_l - 1, \quad \text{pour} \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

(15) $$n_{2^k(2l-1)} = 2^k 3^l 5^{g_1} 7^{m_l}, \quad \text{pour } k \text{ et } l \text{ naturels.}$$

On vérifie sans peine que la suite $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ jouit des propriétés 1), 2) et 3). Or, d'après (15) et d'après la définition des nombres d_n, on a

(16) $$d_{n_{2^k(2l-1)}} = m_l, \quad \text{pour } k \text{ et } l \text{ naturels,}$$

ce qui donne, d'après (8):

(17) $$t = \frac{1|}{|d_{n_{2.1}}} + \frac{1|}{|d_{n_{2.3}}} + \frac{1|}{|d_{n_{2.5}}} + \dots;$$

d'autre part, d'après (14), on a

(18) $$\left(\frac{n_1+1}{2}, \frac{n_3+1}{2}, \frac{n_5+1}{2}, \dots\right) = (g_1, g_2, g_3, \dots) \epsilon N_t,$$

et les formules (17) et (18) prouvent que la suite $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ jouit de la propriété 4). La suite $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ jouit donc des propriétés 1)—4) et parsuite appartient à P.

D'après (14) et (9) on a

(19) $$E_{n_{2l-1}} = M_{g_l}, \quad \text{pour} \quad l = 1, 2, 3, \ldots$$

D'après (4) on a, pour k et l naturels:

$$m_{b_{n_{2^k(2l-1)}}} = m_l,$$

ce qui donne, d'après (16):

$$m_{b_{n_{2^k(2l-1)}}} = d_{n_{2^k(2l-1)}},$$

donc, d'après (10):

(20) $$E_{n_{2^k(2l-1)}} = M_{c_{n_{2^k(2l-1)}}};$$

or, d'après (15) et la définition des nombres c_n, nous avons

$$c_{n_{2^k(2l-1)}} = g_l:$$

la formule (20) donne donc:

(21) $$E_{n_{2^k(2l-1)}} = M_{g_l}, \quad \text{pour } k \text{ et } l \text{ naturels.}$$

Les formules (19) et (21) prouvent que

$$E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots = M_{g_1} M_{g_2} M_{g_3} \ldots,$$

ce qui donne, d'après (13): $p \in E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots$: la suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ appartenant à P, cela prouve que

(22) $$p \in \sum_P E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots$$

Soit maintenant p un élément de l'ensemble (22). Il existe donc une suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de P, telle que

(23) $$p \in E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots$$

Distinguons deux cas:

1°. On a la formule

(24) $$\left(\frac{n_1+1}{2}, \frac{n_3+1}{2}, \frac{n_5+1}{2}, \ldots\right) \in N_t.$$

En posant

(25) $$g_l = \frac{n_{2l-1}+1}{2}, \quad \text{pour} \quad l = 1, 2, 3, \ldots,$$

on aura, d'après la propriété 1), une suite infinie de nombres naturels, et, d'après (9), on trouve

$$E_{n_1} E_{n_3} E_{n_5} \ldots = M_{g_1} M_{g_2} M_{g_3} \ldots,$$

ce qui donne, d'après (23):

(26) $$p \in M_{g_1} M_{g_2} M_{g_3} \ldots$$

Or, d'après (24) et (25), on a $(g_1, g_2, g_3, \ldots) \in N_t = N$: les formules (26) et (7) prouvent donc que $p \in M$.

2°. La formule (24) n'est pas vraie.

D'après la propriété 5) de la suite $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$, il en résulte que

$$t = \frac{1|}{|d_{n_{2.1}}} + \frac{1|}{|d_{n_{2.3}}} + \frac{1|}{|d_{n_{2.5}}} + \ldots,$$

et, d'après (8), il existe un indice s, tel que

$$m_s = d_{n_{2(2s-1)}},$$

donc, d'après (6):

$$m_s \neq d_{n_{2^k(2s-1)}}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

et, d'après (4) (pour $l = s$):

$$m_{b_{n_{2^k(2s-1)}}} \neq d_{n_{2^k(2s-1)}}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

ce qui donne, d'après (11):

$$E_{n_{2^k(2s-1)}} = M_{a_{n_{2^k(2s-1)}}}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc, d'après (3):

$$E_{n_{2^k(2s-1)}} = M_k, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où résulte tout de suite que

$$E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots \subset M_1 M_2 M_3 \ldots,$$

donc, d'après (23), nous avons $p \in M_1 M_2 M_3 \ldots$ et, d'après (7), $p \in M$.

La formule (22) entraîne donc toujours la formule $p \in M$. Or, plus haut nous avons démontré le réciproque. La formule (12) est ainsi démontrée.

Les ensembles $M_1, M_2, M_3, \ldots$ appartenant à la famille F, les formules (9), (10) et (11) prouvent que les ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$ appartiennent aussi à F: la formule (12) prouve donc que $M \in H_P(F)$. L'ensemble M pouvant être un ensemble quelconque appartenant à la famille $H_N(F)$, la formule (1) est établie et notre théorème est démontré.

Voici une application de notre théorème.

Soit F_0 la famille de tous les intervalles aux extrémités rationnelles. Comme on sait [1]), il existe pour tout ensemble linéaire E une opération de M. Hausdorff, $H_{N(E)}$, telle que $E \varepsilon H_{N(E)}(F_0)$. Soit maintenant F une famille donnée quelconque de puissance du continu d'ensembles linéaires. D'après notre théorème, il existe une opération de M. Hausdorff, H_P, telle que $H_P(F_0) \supset H_{N(E)}(F_0)$ et parsuite $E \varepsilon H_P(F_0)$ pour tout ensemble E de la famille F. On obtient ainsi la proposition suivante, due à M. Szpilrajn [2]).

Quelle que soit la famille F de puissance du continu d'ensembles linéaires, il existe toujours une opération de M. Hausdorff, H_P, telle que $H_P(F_0) \supset F$, où F_0 désigne la famille de tous les intervalles aux extrémités rationnelles.

[1]) Fund. Math. t. XV, p. 201.

[2]) Voir la Note citée de M. Szpilrajn.

Sur la décomposition du cercle ouvert en arcs simples ouverts. II.

Par

Stanisława Nikodym (Cracovie).

Le travail présent peut être considéré comme la suite d'une note insérée sous le même titre dans le volume XV des *Fund. Math.* [1]).

Théorème I. Soit G l'intérieur d'une courbe simple fermée C du plan. Supposons qu'on ait décomposé G en des arcs simples ouverts $\{K\}$ jouissant des propriétés suivantes:

1° leurs diamètres surpassent un nombre positif fixe,

2° ils sont disjoints deux-à-deux, même si l'on les ferme,

3° les deux bouts de chaque arc K ne coïncident jamais et ils sont des points se trouvant sur la frontière C du domaine G,

4° par tout point $p \varepsilon G$ passe une courbe K.

Soit $p_0, p_1, p_2, \dots p_n, \dots$ une suite de points de G, telle que $\lim p_n = p_0$. Désignons par K_n ($n = 0, 1, \dots$) l'arc de la décomposition passant par p_n.

Dans ces conditions il existe un cercle ouvert $S(p_0, a)$ tel que l'ensemble d'accumulation de la suite d'ensembles

$$\{K_n \cdot \overline{S(p_0, a)}\}$$

est contenu dans K_0.

[1]) p. 263—270. Les problèmes que je considère dans le travail présent je dois à M. O. Nikodym.