FUNDAMENTA
MATHEMATICAE
159 (1999)

Suites F_σ-absorbantes en théorie de la dimension

par

ROBERT CAUTY (Paris)

1. Introduction. Si, pour $n \geq 1$, X_n (resp. Y_n) est un sous-espace d'un espace topologique X_0 (resp. Y_0), nous dirons que les suites $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ et $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme h de X_0 sur Y_0 vérifiant $h(X_n) = Y_n$ pour tout $n \geq 0$. Le *cube de Hilbert* est le produit $Q = \prod_{i=1}^\infty I_i$, où $I_i = [0,1]$ pour tout i, et son *pseudo-bord* B est le sous-ensemble formé des suites (x_i) de points de $[0,1]$ ayant au moins un terme égal à zéro ou à un. Notant $Q_i = Q$ et $B_i = B$ pour $i \geq 1$, définissons une suite $\{S_n(Q)\}_{n=0}^\infty$ par $S_0(Q) = \prod_{i=1}^\infty Q_i$ et $S_n(Q) = \prod_{i=1}^n B_i \times \prod_{j=n+1}^\infty Q_j$ pour $n \geq 1$.

Si X est un espace métrique, nous notons 2^X l'espace des compacts non vides de X avec la topologie de Vietoris, $C(X)$ le sous-espace de 2^X formé des continus et, pour $n \geq 0$, $\dim_{\geq n}(2^X)$ (resp. $\dim_{\geq n} C(X)$) le sous-espace de 2^X (resp. $C(X)$) formé des compacts de dimension $\geq n$ (pour simplifier les notations, nous convenons que $\dim_{\geq 1} C(X) = C(X)$).

Il est prouvé dans [5] que les suites $\{S_n(Q)\}_{n=0}^\infty$ et $\{\dim_{\geq n}(2^Q)\}_{n=0}^\infty$ sont homéomorphes. Ce résultat a été généralisé par Gladdines ([7], [8]) qui a prouvé que si X est un produit dénombrable de continus péaniens non dégénérés, alors les suites $\{S_n(Q)\}_{n=0}^\infty$, $\{\dim_{\geq n}(2^X)\}_{n=0}^\infty$ et $\{\dim_{\geq n+1} C(X)\}_{n=0}^\infty$ sont homéomorphes. Le théorème suivant caractérise les continus péaniens pour lesquels ce résultat est vrai.

THÉORÈME. *Pour tout continu péanien X, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tout entier $n \geq 1$, tout ouvert non vide de X contient un compact de dimension n.*

(2) *Les suites $\{S_n(Q)\}_{n=0}^\infty$ et $\{\dim_{\geq n}(2^X)\}_{n=0}^\infty$ sont homéomorphes.*

(3) *Les suites $\{S_n(Q)\}_{n=0}^\infty$ et $\{\dim_{\geq n+1} C(X)\}_{n=0}^\infty$ sont homéomorphes.*

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 57N20.

Ce théorème reste vrai si l'on y remplace la dimension par la dimension cohomologique sur n'importe quel groupe abélien, ou même par n'importe laquelle des fonctions de dimension utilisées dans [6] par Dobrowolski et Rubin. Aucune modification des arguments qui suivent n'est nécessaire pour obtenir ces généralisations.

2. Préliminaires. Tous les espaces considérés dans cet article sont supposés métrisables.

Soit X un rétracte absolu compact. Un sous-ensemble A de X est dit *localement homotopiquement négligeable* si, pour tout ouvert U de X, l'inclusion de $U \setminus A$ dans U est une équivalence homotopique faible. Il est connu [12] que cela équivaut à l'existence d'une homotopie $\psi : X \times [0,1] \to X$ telle que $\psi(x,0) = x$ pour tout x et $\psi(X \times]0,1]) \subset X \setminus A$. Un fermé A de X est appelé un *Z-ensemble* si l'identité de X est uniformément approximable par des fonctions de X dans $X \setminus A$. Il est connu qu'un fermé de X est un Z-ensemble si, et seulement si, il est localement homotopiquement négligeable. Cela entraîne que si $A \supset B$ sont des fermés de X tels que B soit un Z-ensemble et $A \setminus B$ localement homotopiquement négligeable, alors A est un Z-ensemble. Une fonction $f : C \to X$ est un *Z-plongement* si c'est un plongement et si $f(C)$ est un Z-ensemble dans X.

Désormais, par une *suite* $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *d'espaces topologiques*, nous entendons la donnée d'un espace X_0 et de sous-espaces X_n, $n \geq 1$, vérifiant $X_n \supset X_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Soit $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite d'espaces telle que X_0 soit un rétracte absolu compact. Soit $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite d'espaces avec C_0 compact. Nous dirons que $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ est *fortement* $\{C_n\}$*-universelle* si, pour tout fermé D de C_0, toute fonction continue $f : C_0 \to X_0$ telle que $f|D$ soit un Z-plongement vérifiant $(f|D)^{-1}(X_n) = D \cap C_n$ pour tout $n \geq 0$ peut être uniformément approximée par des Z-plongements $g : C_0 \to X_0$ vérifiant $g|D = f|D$ et $g^{-1}(X_n) = C_n$ pour tout n. Si $\mathcal{C}$ est une classe de suites $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ avec C_0 compact, nous dirons que $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ est *fortement* $\mathcal{C}$*-universelle* si elle est fortement $\{C_n\}$-universelle pour toute suite $\{C_n\}$ appartenant à $\mathcal{C}$. Nous noterons $(\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_\sigma^\infty)$ la classe des suites $\{C_n\}$ telles que C_0 soit compact et que C_n soit un F_σ dans C_0 pour tout $n \geq 1$. Le lemme suivant est prouvé dans [5].

Lemme 1. *Une suite* $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *est homéomorphe à* $\{S_n(Q)\}_{n=0}^{\infty}$ *si, et seulement si, elle vérifie*

(I) X_0 *est homéomorphe à* Q,
(II) X_n *est un* F_σ *dans* X_0 *pour tout* $n \geq 1$,
(III) X_1 *est réunion dénombrable de* Z*-ensembles de* X_0,
(IV) $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *est fortement* $(\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_\sigma^\infty)$*-universelle.*

Dans la suite, tout continu péanien X sera supposé muni d'une distance d vérifiant

(∗) pour tout couple de points (x, y) de X et tout $\varepsilon > 0$, si $d(x, y) < \varepsilon$, alors X contient un arc de diamètre $< \varepsilon$ reliant x à y

(pour obtenir une telle distance, il suffit, partant d'une distance arbitraire d_0, de poser $d(x, y) = \inf\{d_0\text{-diamètre}\,(A) \mid A \text{ un arc reliant } x \text{ à } y\}$). Alors, toute boule ouverte B de X est connexe et localement connexe par arcs, donc 2^B et $C(B)$ sont des rétractes absolus. Nous noterons ϱ la distance de Hausdorff associée à d sur 2^X.

Pour tout continu X, nous notons $\mathcal{F}(X)$ le sous-ensemble de 2^X formé des ensembles finis. Si x est un point de X, nous notons $C(X; x) = \{A \in C(X) \mid x \in A\}$.

Nous notons I le segment $[0, 1]$. Le *cône* $\mathrm{Con}(K)$ sur un compact K est le quotient $K \times I/K \times \{0\}$. Nous identifierons naturellement K à l'image de $K \times \{1\}$ dans $\mathrm{Con}(K)$, notons $[x, t]$ l'image dans $\mathrm{Con}(K)$ du point (x, t) de $K \times I$ et w le sommet de $\mathrm{Con}(K)$.

Si N est un complexe simplicial, nous notons $N^{(k)}$ son k-squelette. Par un *simplexe*, nous entendons un simplexe fermé, et nous notons $\overline{\mathrm{St}}(\sigma)$ l'étoile fermée du simplexe σ dans N, i.e. la réunion de tous les simplexes de N contenant σ. Nous notons $\langle v_0, v_1\rangle$ le 1-simplexe de sommets v_0 et v_1; tous les 1-simplexes sont supposés orientés, le premier sommet de $\langle v_0, v_1\rangle$ étant v_0.

3. Démonstration du théorème. Supposons qu'il existe un entier n et un ouvert non vide U de X tels que U ne contienne aucun compact de dimension n. Alors, U ne contient aucun compact de dimension finie $\geq n$, donc pour $n < m < \infty$, $\dim_{\geq m}(2^X) \cap 2^U = \dim_{\geq n}(2^X) \cap 2^U$ et $\dim_{\geq m} C(X) \cap C(U) = \dim_{\geq n} C(X) \cap C(U)$. Comme 2^U (resp. $C(U)$) est ouvert dans 2^X (resp. $C(X)$), il en résulte que les suites $\{\dim_{\geq n}(2^X)\}$ et $\{\dim_{\geq n+1} C(X)\}$ ne peuvent être homéomorphes à $\{S_n(Q)\}$ car, pour tout ouvert V de $S_0(Q)$, $V \cap S_n(Q) \neq V \cap S_m(Q)$ si $n < m$. Ceci montre que (2) ou (3) entraîne (1).

Inversement, supposons (1). Pour prouver que les suites $\{\dim_{\geq n}(2^X)\}$ et $\{\dim_{\geq n+1} C(X)\}$ sont homéomorphes à $\{S_n(Q)\}$, nous allons montrer qu'elles vérifient les conditions (I)–(IV) du lemme 1.

(I) Il est connu [4] que 2^X est homéomorphe à Q. (1) entraîne que l'intérieur de tout arc contenu dans X est vide; d'après [4], $C(X)$ est donc homéomorphe à Q.

(II) Pour $n \geq 1$, $\dim_{\geq n}(2^X)$ est un F_σ dans 2^X ([10], §40 IV), donc $\dim_{\geq n+1} C(X) = C(X) \cap \dim_{\geq n+1}(2^X)$ est un F_σ dans $C(X)$.

(III) Comme $\dim_{\geq 1}(2^X)$ (resp. $\dim_{\geq 2} C(X)$) est un F_σ, pour prouver que c'est une réunion dénombrable de Z-ensembles de 2^X (resp. $C(X)$), il suffit de montrer que cet ensemble est localement homotopiquement négligeable dans 2^X (resp. $C(X)$). Pour $\dim_{\geq 1}(2^X)$, cela résulte du fait qu'il est contenu dans $2^X \setminus \mathcal{F}(X)$, qui est localement homotopiquement négligeable d'après [3]. Pour $\dim_{\geq 2} C(X)$, cela est prouvé dans [8], mais nous donnerons au lemme suivant une démonstration simplifiée de ce fait, n'utilisant pas l'existence de distances convexes sur X.

Pour tout continu X, soit $\mathcal{A}(X)$ le sous-espace de $C(X)$ formé des continus qui sont réunion d'un nombre fini d'arcs (éventuellement dégénérés). Notons qu'un sous-continu d'un continu $Y \in \mathcal{A}(X)$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{A}(X)$ (prendre $Y = A_1 \cup A_2$ où A_1 et A_2 sont des arcs tels que $A_1 \cap A_2$ soit une suite convergente).

Lemme 2. *Pour tout continu péanien X, $C(X) \setminus \mathcal{A}(X)$ est localement homotopiquement négligeable dans $C(X)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, toute fonction continue $f : I^k \to C(X)$ telle que $f(\partial I^k) \subset \mathcal{A}(X)$ peut être approximée uniformément par des fonctions $g : I^k \to \mathcal{A}(X)$ telles que $g|\partial I^k = f|\partial I^k$. Soit $\varepsilon > 0$. Fixant une distance d_1 sur I^k, prenons une triangulation suffisamment fine de l'ensemble $N = I^k \setminus \partial I^k$ de façon que, posant, pour tout simplexe σ de N, $\varepsilon_\sigma = \min(\varepsilon, \inf\{d_1(x, \partial I^k) \mid x \in \overline{\mathrm{St}}(\sigma)\})$, on ait

$$\operatorname{diam} f(\sigma) < \tfrac{1}{6}\varepsilon_\sigma. \tag{1}$$

Il est facile de voir que $\mathcal{A}(X)$ est dense dans $C(X)$. Nous pouvons donc trouver, pour tout sommet v de N, un élément $F_v \in \mathcal{A}(X)$ tel que

$$\varrho(f(v), F_v) < \tfrac{1}{6}\varepsilon_v. \tag{2}$$

Soit $\sigma = \langle v_0, v_1 \rangle$ un 1-simplexe de N. D'après (1) et (2), nous avons

$$\begin{aligned} \varrho(F_{v_0}, F_{v_1}) &\leq \varrho(F_{v_0}, f(v_0)) + \varrho(f(v_0), f(v_1)) + \varrho(f(v_1), F_{v_1}) \\ &< \tfrac{1}{6}\varepsilon_{v_0} + \tfrac{1}{6}\varepsilon_\sigma + \tfrac{1}{6}\varepsilon_{v_1} \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon_\sigma. \end{aligned} \tag{3}$$

Nous pouvons donc trouver un arc A_σ reliant un point de F_{v_0} à un point de F_{v_1} et de diamètre $< \frac{1}{2}\varepsilon_\sigma$. Alors, $G_\sigma = F_{v_0} \cup F_{v_1} \cup A_\sigma$ appartient à $\mathcal{A}(X)$. Soit $\alpha_\sigma : I \to \mathcal{A}(G_\sigma)$ un chemin vérifiant $\alpha_\sigma(0) = F_{v_0}$, $\alpha_\sigma(1/2) = G_\sigma$, $\alpha_\sigma(1) = F_{v_1}$, $\alpha_\sigma(t) \subset \alpha_\sigma(t')$ si $0 \leq t \leq t' \leq 1/2$ et $\alpha_\sigma(t) \supset \alpha_\sigma(t')$ si $1/2 \leq t \leq t'$. (L'existence d'un tel chemin résulte du fait que si $Y_0 \subset Y$ appartiennent à $\mathcal{A}(X)$, il existe un chemin $\beta : I \to \mathcal{A}(Y)$ tel que $\beta(0) = Y_0$, $\beta(1) = Y$ et $\beta(t) \subset \beta(t')$ si $t \leq t'$. Pour construire β, écrivons $Y = Y_0 \cup \bigcup_{i=1}^k B_i$, où les B_i sont des arcs tels que $B_i \cap (Y_0 \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j) \neq \emptyset$ pour $1 \leq i \leq k$, et prenons $x_i \in B_i \cap (Y_0 \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j)$. Nous pouvons alors trouver des chemins $\gamma_i : [(i-1)/k, i/k] \to C(B_i)$ tels que $\gamma_i((i-1)/k) = \{x_i\}$, $\gamma_i(i/k) = B_i$ et $\gamma_i(t) \subset \gamma_i(t')$ si $t \leq t'$, et il suffit de définir β par $\beta(t) =$

$Y_0 \cup (\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j) \cup \gamma_i(t)$ pour $(i-1)/k \le t \le i/k$.) Le choix de α_σ garantit que, pour tout compact K de I, nous pouvons trouver un sous-ensemble K' de K contenant au plus deux points et tel que $\bigcup \alpha_\sigma(K) = \bigcup \alpha_\sigma(K')$.

Puisque, pour tout $t \in I$, $\alpha_\sigma(t)$ contient l'un des ensembles F_{v_0} ou F_{v_1} et est contenu dans G_σ, il résulte de (3), du choix de A_σ et de la définition de la distance de Hausdorff que

$$\operatorname{diam}(\alpha_\sigma(I)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon_\sigma. \tag{4}$$

Définissons $\alpha : N^{(1)} \to \mathcal{A}(X)$ en posant, pour tout 1-simplexe $\sigma = \langle v_0, v_1\rangle$ et $y = (1-t)v_0 + tv_1$, $\alpha(y) = \alpha_\sigma(t)$. Alors, si $\sigma = \langle v_0, v_1\rangle$ est face d'un simplexe τ de N, il résulte de (1), (2) et (4) que, pour tout $x \in \tau$ et tout $y \in \sigma$, nous avons

$$\begin{aligned}\varrho(f(x), \alpha(y)) &\le \varrho(f(x), f(v_0)) + \varrho(f(v_0), F_{v_0}) + \varrho(F_{v_0}, \alpha(y)) \\ &< \tfrac{1}{6}\varepsilon_\tau + \tfrac{1}{6}\varepsilon_{v_0} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_\sigma < \varepsilon_\tau.\end{aligned} \tag{5}$$

Soit $r : N \to C(N^{(1)})$ une fonction continue vérifiant $r(x) = \{x\}$ si $x \in N^{(1)}$ et $r(\tau) \subset C(\tau^{(1)})$ pour tout simplexe τ de N. Pour $x \in N$, posons $g(x) = \bigcup\{\alpha(y) \mid y \in r(x)\}$. Puisque $r(x)$ et les $\alpha(y)$ sont des continus, $g(x)$ est un continu. Il résulte d'une remarque précédente qu'il y a un sous-ensemble fini K de $r(x)$ (contenant au plus deux points de chaque arête de τ si $x \in \tau$) tel que $g(x) = \bigcup\{\alpha(y) \mid y \in K\}$; puisque les $\alpha(y)$ appartiennent à $\mathcal{A}(X)$, $g(x)$ aussi. La continuité de g résulte de la continuité de la réunion. D'après (5) et la définition de la distance de Hausdorff, nous avons $\varrho(f(x), g(x)) < \varepsilon_\tau \le \min(\varepsilon, d_1(x, \partial I^k))$ pour $x \in \tau$, ce qui permet de prolonger g en une ε-approximation continue de f en posant $g|\partial I^k = f|\partial I^k$.

La condition (IV) sera prouvée au paragraphe 5.

4. Quelques constructions auxiliaires. Dans ce paragraphe, X est un continu péanien vérifiant la condition (1) du théorème.

Lemme 3. *Soit $\{C_n\}_{n=0}^\infty \in (\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_\sigma^\infty)$. Pour tout ouvert non vide U de X, il existe une fonction continue $\varphi : C_0 \to 2^U$ vérifiant $\varphi^{-1}(\dim_{\ge n}(2^X)) = C_n$ pour tout n.*

Démonstration. Soit $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ une suite d'ouverts non vides deux à deux disjoints de U convergeant vers un point y de U. Soit $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$ une partition de $\mathbb{N}$ en sous-ensembles infinis. Pour $n \ge 1$ et $i \in N_n$, soit B_i un compact de dimension n contenu dans U_i. Puisque $2^X \setminus \mathcal{F}(X)$ est localement homotopiquement négligeable, nous pouvons trouver une fonction continue $\alpha_i : I \to 2^{U_i}$ telle que $\alpha_i(1) = B_i$ et $\alpha_i([0,1[) \subset \mathcal{F}(X)$.

Pour tout $n \ge 1$, écrivons $C_n = \bigcup_{m=1}^\infty D_n^m$, où D_n^m est compact. Soit $\beta_n^m : C_0 \to I$ une fonction continue telle que $(\beta_n^m)^{-1}(1) = D_n^m$. Notant

$i(n,m)$ le $m$ième élément de N_n, il est facile de voir que la formule

$$\varphi(x) = \{y\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \alpha_{i(n,m)}(\beta_n^m(x))$$

définit une fonction continue de C_0 dans 2^U. Si $x \in C_n$, soit m tel que D_n^m contienne x. Alors $\beta_n^m(x) = 1$, donc $\varphi(x) \supset B_{i(n,m)}$, d'où $\dim(\varphi(x)) \geq \dim B_{i(n,m)} = n$. Si $x \notin C_n$, alors $x \notin C_k$ pour $k \geq n$, donc $\beta_k^m(x) < 1$ pour $k \geq n$ et $m \geq 1$. Par suite, $\alpha_{i(k,m)}(\beta_k^m(x))$ est fini si $k \geq n$; comme $\dim(\alpha_{i(k,m)}(\beta_k^m(x))) \leq k$ quels que soient k et m, $\varphi(x)$ est réunion dénombrable de fermés de dimension $< n$, donc $\dim(\varphi(x)) < n$, d'où la relation $\varphi^{-1}(\dim_{\geq n}(2^X)) = C_n$.

LEMME 3′. *Soient* $\{C_n\}_{n=0}^{\infty} \in (\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_\sigma^\infty)$, U *un ouvert de* X, $K \in \mathcal{A}(X)$ *et* $y \in K \cap U$. *Il existe une fonction continue* $\varphi : C_0 \to C(U; y)$ *vérifiant* $\varphi^{-1}(\dim_{\geq n+1} C(X)) = C_n$ *pour tout* n.

La démonstration de ce lemme répète celle du lemme 3 avec les modifications suivantes :

(a) Prendre un arc $A \subset U$ contenant y et pour U_i des ouverts connexes tels que $U_i \cap A$ contienne un point y_i.

(b) Pour $n \geq 1$ et $i \in N_n$, prendre pour B_i un continu de dimension $n+1$ contenu dans U_i; comme U_i est connexe, nous pouvons supposer que B_i contient y_i.

(c) Prendre α_i telle que $\alpha_i([0,1[) \subset \mathcal{A}(X; y_i) = \mathcal{A}(X) \cap C(X; y_i)$. Pour cela, utiliser le fait que $C(X; y_i) \setminus \mathcal{A}(X; y_i)$ est localement homotopiquement négligeable dans $C(X; y_i)$ (pour le voir, il suffit, dans la démonstration du lemme 2, de choisir des F_v contenant y_i).

(d) Poser $\varphi(x) = A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \alpha_{i(n,m)}(\beta_n^m(x))$.

LEMME 4. *Soient* C *un compact et* U *un ouvert non vide de* X. *Il existe une fonction continue* $\xi : C \to 2^U$ *vérifiant*

(i) $\forall x \in C$, $\dim \xi(x) = 0$,

(ii) $\forall x \in C$, $\xi(x)$ *est infini*,

(iii) *si* x, x' *sont deux points de* C *et* F, F' *deux sous-ensembles finis de* U *tels que* $\xi(x) \cup F = \xi(x') \cup F'$, *alors* $x = x'$.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $C = Q$. Soit $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite d'ouverts non vides deux à deux disjoints de U convergeant vers un point y de U. Pour tout i, soit α_i un plongement de I dans U_i. Soit D un ensemble de Cantor contenu dans I et contenant 1. Posant, pour $x = (x_i) \in Q$,

$$\xi(x) = \{y\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i\big(\tfrac{1}{2}(1 + x_i) \cdot D\big),$$

nous définissons une fonction continue $\xi : C \to 2^U$ vérifiant (i) et (ii). Il est facile de voir que, pour tout $x = (x_i) \in Q$, pour tout $i \geq 1$, et pour tout sous-ensemble fini F de U, le point $\frac{1}{2}(1 + x_i)$ est la borne supérieure des points d'accumulation de l'ensemble $\alpha_i^{-1}(\xi(x) \cup F)$, ce qui entraîne (iii).

LEMME 4′. *Soient C un compact, U un ouvert de X, $K \in \mathcal{A}(X)$ et a un point de $U \cap K$. Il existe une fonction continue $\xi : C \to C(U; a)$ vérifiant*

(i) $\forall x \in C$, $\dim \xi(x) = 1$,

(ii) *pour tout $x \in C$ et tout continu K' tel que $a \in K' \cap U \subset K \cap U$, $K' \cup \xi(x) \notin \mathcal{A}(X)$,*

(iii) *si x, x' sont deux points de C et L, L' deux continus tels que $(L \cup L') \cap U \subset K \cap U$ et $\xi(x) \cup (L \cap U) = \xi(x') \cup (L' \cap U)$, alors $x = x'$.*

Nous modifions la démonstration précédente comme suit : la condition (1) entraîne que K ne contient aucun ouvert, donc nous pouvons trouver un arc A contenant a, contenu dans U et tel que $A \setminus K \neq \emptyset$. Nous prenons les U_i tels que $U_i \subset U \setminus K$ et $U_i \cap A \neq \emptyset$; alors $y \in A$. Nous choisissons α_i de façon que $\alpha_i(0) \in A$ et $\alpha_i(]0, 1]) \subset U_i \setminus A$. Nous pouvons alors prendre

$$\xi(x) = A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i\big([0, \tfrac{1}{2}(1 + x_i)]\big).$$

5. Vérification de la condition (IV). La démonstration de l'universalité forte des suites $\{\dim_{\geq n}(2^X)\}$ et $\{\dim_{\geq n+1} C(X)\}$ utilise une technique déjà employée dans [1] et [2]. Pour la commodité du lecteur, nous en redonnons les détails.

Cas de $\{\dim_{\geq n}(2^X)\}$. Soient $\{C_n\}_{n=0}^{\infty} \in (\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_\sigma^\infty)$, D un fermé de C_0 et $f : C_0 \to 2^X$ une fonction continue telle que $f|D$ soit un Z-plongement vérifiant $(f|D)^{-1}(\dim_{\geq n}(2^X)) = C_n \cap D$ pour tout n. Etant donné $\varepsilon > 0$, il nous faut construire un Z-plongement $g : C_0 \to 2^X$, ε-proche de f et vérifiant $g|D = f|D$ et $g^{-1}(\dim_{\geq n}(2^X)) = C_n$ pour tout n. Les lemmes 3 et 4 permettent de construire, pour tout ouvert U de X, un plongement h de C_0 dans 2^U tel que $h^{-1}(\dim_{\geq n}(2^X)) = C_n$ pour tout n. Etant donné un $x \in C_0 \setminus D$, nous pouvons utiliser un tel plongement pour construire la restriction de g à un voisinage de X, mais il nous faut alors recoller ces plongements par une sorte de "partition de l'unité".

Quitte à remplacer f par une première approximation, nous pouvons supposer que $f(C_0 \setminus D) \cap f(D) = \emptyset$ et qu'il existe un complexe simplicial localement fini N et des fonctions continues $\mu : N \to 2^X$ et $\pi : C_0 \setminus D \to N$ telles que $f|C_0 \setminus D = \mu \circ \pi$. En outre, nous pouvons supposer π surjective [11]. Posant, pour tout simplexe σ de N,

$$\varepsilon_\sigma = \min\big(\varepsilon, \tfrac{1}{3}\inf\{\varrho(\mu(y), f(D)) \mid y \in \mathrm{St}(\sigma)\}\big), \tag{1}$$

nous supposerons la triangulation de N suffisamment fine pour que

(2) $$\operatorname{diam} \mu(\sigma) < \tfrac{1}{6}\varepsilon_\sigma \quad \text{pour tout simplexe } \sigma \text{ de } N.$$

Pour tout $\eta > 0$, $\{y \in N \mid \varrho(\mu(y), f(D)) \ge \eta\}$ est compact. En effet, dans le cas contraire, il contiendrait un sous-ensemble discret infini $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ fermé dans N, et la surjectivité de π permettrait de trouver $x_i \in C_0 \setminus D$ tel que $\pi(x_i) = y_i$. Puisque C_0 est compact, nous pouvons supposer que la suite $\{x_i\}$ converge vers un point x_0 de C_0. Ce point ne peut appartenir à $C_0 \setminus D$, sans quoi $\{y_i\}$ convergerait vers $\pi(x_0)$. Mais alors $\{f(x_i)\}$ tend vers $f(x_0) \in f(D)$ et, comme $f(x_i) = \mu(y_i)$, nous avons $\varrho(\mu(y_i), f(D)) < \eta$ pour i assez grand, ce qui est absurde.

La compacité des ensembles $\{y \in N \mid \varrho(\mu(y), f(D)) \ge \eta\}$ permet de trouver une suite $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ de sous-complexes finis de N recouvrant N et vérifiant

(3) $$\text{pour tout simplexe } \sigma \text{ de } N_k, \quad \overline{\mathrm{St}}(\sigma) \subset \operatorname{Int} N_{k+1},$$

(4) $$\sup\{\varrho(\mu(y), f(D)) \mid y \notin N_{k+1}\} < \tfrac{1}{3}\inf\{\varrho(\mu(y), f(D)) \mid y \in N_k\}.$$

Posons $N_k = \emptyset$ pour $k \le 0$. Pour tout sommet v de N, prenons un sous-ensemble fini F_v de X vérifiant

(5) $$\varrho(\mu(v), F_v) < \tfrac{1}{6}\varepsilon_v.$$

Puisque X n'est pas dégénéré, les F_v peuvent être choisis contenant plus d'un point et deux à deux disjoints. Dans chaque F_v, fixons deux points distincts a_v et b_v. Pour tout sommet v de N, il y a un unique entier k tel que $v \in N_k \setminus N_{k-1}$; posons

(6) $$U_v = \bigl\{y \in X \mid d(y, a_v) < \min\bigl(\tfrac{1}{6}\varepsilon_v, \{d(a_v, b_{v'}) \mid v' \in N_{k-2}^{(0)}\}\bigr)\bigr\}.$$

Soit $\varphi_v : C_0 \to 2^{U_n}$ une fonction vérifiant la condition du lemme 3. Puisque 2^{U_v} est un rétracte absolu et que $2^X \setminus \mathcal{F}(X)$ est localement homotopiquement négligeable, nous pouvons prolonger φ_v en une fonction, encore notée φ_v, de $\mathrm{Con}(C_0)$ dans 2^{U_v} vérifiant $\varphi_v(\mathrm{Con}(C_0) \setminus C_0) \subset \mathcal{F}(X)$ et $\varphi_v(w) = \{a_v\}$.

Pour tout sommet v de N, choisissons une boule V_v de centre b_v de façon que

(7) $\operatorname{diam} V_v < \frac{1}{6}\varepsilon_v$,

(8) si $v \in N_k \setminus N_{k-1}$, alors $V_v \cap \bigcup\{\varphi_{v'}(\mathrm{Con}(C_0)) \mid v' \in N_{k+2}^{(0)} \setminus N_{k-2}^{(0)}\} = \emptyset$,

(9) si $v \in N_k \setminus N_{k-1}$ et $v \ne v' \in N_{k+2}^{(0)} \setminus N_{k-2}^{(0)}$, alors $V_v \cap V_{v'} = \emptyset$.

Soit $\xi_v : C_0 \to 2^{V_v}$ une fonction vérifiant les conditions du lemme 4. Prolongeons ξ_v en une fonction, encore notée ξ_v, de $\mathrm{Con}(C_0)$ dans 2^{V_v} vérifiant $\xi_v(\mathrm{Con}(C_0) \setminus C_0) \subset \mathcal{F}(X)$ et $\xi_v(w) = \{h_v\}$.

Si $\sigma = \langle v_0, v_1\rangle$ est un 1-simplexe de N, nous avons, comme dans la démonstration du lemme 2, $\varrho(F_{v_0}, F_{v_1}) < \frac{1}{2}\varepsilon_\sigma$. Le choix de la distance d nous permet de trouver une famille finie $\mathcal{L}_\sigma$ d'arcs de diamètres $< \frac{1}{2}\varepsilon_\sigma$, chacun reliant un point de F_{v_0} à un point de F_{v_1}, de façon que $F_{v_0} \cup F_{v_1} \subset \bigcup \mathcal{L}_\sigma$. Pour $L \in \mathcal{L}_\sigma$, soit $\alpha_L : I \to L$ un homéomorphisme tel que $\alpha_L(0) = L \cap F_{v_0}$ et $\alpha_L(1) = L \cap F_{v_1}$. Alors, la fonction $\alpha_\sigma : I \to \mathcal{F}(X)$ définie par $\alpha_0(t) = \bigcup\{\alpha_L(t) \mid L \in \mathcal{L}_\sigma\}$ est un chemin de diamètre $< \frac{1}{2}\varepsilon_\sigma$ reliant F_{v_0} à F_{v_1}.

Définissons maintenant une fonction continue Φ de $N \times C_0$ dans 2^X. Si v est un sommet de N, posons

$$\Phi(v, x) = F_v \cup \varphi_v([x, 1]) \cup \xi_v([x, 1]).$$

Si $\sigma = \langle v_0, v_1\rangle$ est un 1-simplexe de N et si $z = (1-t)v_0 + tv_1$, posons

$$\Phi(z, x) = \begin{cases} \varphi_{v_0}([x, 1]) \cup \xi_{v_0}([x, 1]) \cup F_{v_0} \cup \alpha_\sigma(4t) & \text{si } 0 \le t \le 1/4, \\ \varphi_{v_0}([x, 1]) \cup \xi_{v_0}([x, 1]) \cup F_{v_0} \cup F_{v_1} & \\ \qquad \cup\, \varphi_{v_1}([x, 4t-1]) \cup \xi_{v_1}([x, 4t-1]) & \text{si } 1/4 \le t \le 1/2, \\ \varphi_{v_0}([x, 3-4t]) \cup \xi_{v_0}([x, 3-4t]) \cup F_{v_0} \cup F_{v_1} & \\ \qquad \cup\, \varphi_{v_1}([x, 1]) \cup \xi_{v_1}([x, 1]) & \text{si } 1/2 \le t \le 3/4, \\ \alpha_\sigma(4t-3) \cup F_{v_1} \cup \varphi_{v_1}([x, 1]) \cup \xi_{v_1}([x, 1]) & \text{si } 3/4 \le t \le 1. \end{cases}$$

Soit $r : N \to \mathcal{F}(N^{(1)})$ une fonction continue vérifiant $r(x) = \{x\}$ si $x \in N^{(1)}$ et $r(\tau) \subset \mathcal{F}(\tau^{(1)})$ pour tout simplexe τ de N (voir [3]). Posons, pour z dans N,

$$\Phi(z, x) = \bigcup\{\Phi(z, y) \mid y \in r(z)\}.$$

Nous avons alors

$$\varrho(\mu(z), \Phi(z, x)) < \min\left(\varepsilon, \tfrac{1}{3}\varrho(\mu(z), f(D))\right) \quad \forall (z, x) \in N \times C_0. \tag{10}$$

Pour voir cela, remarquons d'abord que (6) et (7) entraînent que $\varrho(F_v, \Phi(v, x)) < \frac{1}{6}\varepsilon_v$ pour tout sommet v. Si $\sigma = \langle v_0, v_1\rangle$ est un 1-simplexe de N et si $y \in \sigma$, la définition de Φ entraîne que

$$\varrho(F_{v_0}, \Phi(y, x)) < \max\left(\tfrac{1}{6}\varepsilon_{v_0}, \operatorname{diam}\alpha_\sigma + \tfrac{1}{6}\varepsilon_{v_1}\right) \le \tfrac{3}{6}\varepsilon_\sigma + \tfrac{1}{6}\varepsilon_{v_1} \le \tfrac{4}{6}\varepsilon_\sigma.$$

Soit $z \in N$ et soit τ un simplexe contenant z. Si $y \in r(z) \subset \tau^{(1)}$ et si σ est un 1-simplexe contenant y, il y a un sommet v de σ tel que $\varrho(F_v, \Phi(y, x)) < \frac{4}{6}\varepsilon_\sigma$, d'où

$$\begin{aligned} \varrho(\mu(z), \Phi(y, x)) &\le \varrho(\mu(z), \mu(v)) + \varrho(\mu(v), F_v) + \varrho(F_v, \Phi(y, x)) \\ &< \tfrac{1}{6}\varepsilon_\tau + \tfrac{1}{6}\varepsilon_v + \tfrac{4}{6}\varepsilon_\sigma \le \varepsilon_\tau < \min\left(\varepsilon, \tfrac{1}{3}\varrho(\mu(z), f(D))\right). \end{aligned}$$

Puisque $\Phi(z, x)$ est la réunion des $\Phi(y, x)$ avec y dans $r(z)$, la définition de la distance de Hausdorff entraîne la relation (10).

Définissons $g : C_0 \to 2^X$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D, \\ \Phi(\pi(x), x) & \text{si } x \in C_0 \setminus D. \end{cases}$$

Puisque $f|C_0 \setminus D = \mu \circ \pi$, il résulte de (10) que

$$\varrho(f(x), g(x)) \leq \min\left(\varepsilon, \tfrac{1}{3}\varrho(f(x), f(D))\right),$$

ce qui entraîne que g est continue et vérifie $g(C_0 \setminus D) \cap f(D) = \emptyset$. Puisque $g|D = f|D$ et que $(f|D)^{-1}(\dim_{\geq n}(2^X)) = C_n \cap D$, il suffit pour montrer que $g^{-1}(\dim_{\geq n}(2^X)) = C_n$, de vérifier que $(g|C_0 \setminus D)^{-1}(\dim_{\geq n}(2^X)) = C_n \setminus D$. Soient $x \in C \setminus D$ et $z = \pi(x)$. Si $x \notin C_n$, $\dim \varphi_v([x,t]) < n$ pour tout sommet v de N et tout $t \in I$; comme les ensembles F_v, $\alpha_\sigma(t)$ et $\xi_v([x,t])$ sont de dimension zéro, la définition de Φ montre que $\Phi(y,x)$ est de dimension $< n$ pour tout $y \in N^{(1)}$. Puisque $g(x) = \Phi(z,x)$ est réunion finie de tels ensembles, $\dim g(x) < n$. Si $x \in C_n$, soit $y \in r(z)$. Par construction de $\Phi(y,x)$, il existe un sommet v tel que $g(x) \supset \Phi(y,x) \supset \varphi_v([x,1])$, d'où $\dim g(x) \geq \dim \varphi_v([x,1]) \geq n$.

Puisque $g|D = f|D$ est un plongement et que $g(C_0 \setminus D) \cap g(D) = \emptyset$, pour montrer que g est un plongement, il suffit de vérifier que $g|C_0 \setminus D$ est injective. Soient x_1, x_2 deux points de $C_0 \setminus D$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$. Pour $j = 1,2$, soit $z_j = \pi(x_j)$, et soit k_j l'entier tel que $z_j \in N_{k_j} \setminus N_{k_j-1}$. Alors $|k_1 - k_2| \leq 1$. En effet, supposons le contraire, par exemple $k_1 < k_2 - 1$. D'après (10), nous avons

$$\begin{aligned}\varrho(g(x_1), f(D)) &= \varrho(\Phi(z_1,x_1), f(D)) \\ &\geq \varrho(\mu(z_1), f(D)) - \varrho(\mu(z_1), \Phi(z_1,x_1)) > \tfrac{2}{3}\varrho(\mu(z_1), f(D)),\end{aligned}$$

d'où, en utilisant (4) et (10),

$$\begin{aligned}\varrho(g(x_2), f(D)) &= \varrho(\Phi(z_2,x_2), f(D)) \leq \varrho(\Phi(z_2,x_2), \mu(z_2)) + \varrho(\mu(z_2), f(D)) \\ &< \tfrac{4}{3}\varrho(\mu(z_2), f(D)) < \tfrac{4}{9}\varrho(\mu(z_1), f(D)) < \tfrac{2}{3}\varrho(g(x_1), f(D)),\end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que $g(x_1) = g(x_2)$.

Nous pouvons donc supposer que $k_2 = k_1$ ou $k_1 + 1$. Soit τ_j le plus petit simplexe de N_{k_j} contenant z_j. Puisque $k_1 \leq k_2 \leq k_1 + 1$ et $z_j \in N_{k_j} \setminus N_{k_j-1}$, la condition (3) garantit que $\tau_1 \cup \tau_2 \subset N_{k_1+2} \setminus N_{k_1-2}$. Soient $y \in r(z_1)$ et v_1 un sommet de τ_1 tel que $\Phi(y,x_1)$ contienne $\Phi(v_1,x_1) \supset \xi_{v_1}([x_1,1])$. Puisque $\tau_1 \cup \tau_2 \subset N_{k_1+2} \setminus N_{k_1-2}$, la condition (8) garantit que $V_{v_1} \cap (\bigcup \varphi_v(\mathrm{Con}(C_0)))$ $= \emptyset$ pour tout sommet v de $\tau_1 \cup \tau_2$. D'après (9), $\xi_v(\mathrm{Con}(C_0)) \cap V_{v_1} = \emptyset$ si v est un sommet de $\tau_1 \cup \tau_2$ distinct de v_1. Comme les ensembles F_v et $\alpha_\sigma(t)$ sont finis, il résulte de cela et de la définition de Φ que $g(x_1) \cap V_{v_1}$ est la réunion de $\xi_{v_1}([x,1])$ et d'un ensemble fini. Comme $\xi_{v_1}([x_1,1])$ est infini d'après (ii) du lemme 4, $g(x_2) \cap V_{v_1} = g(x_1) \cap V_{v_1}$ est infini. Mais $\xi_{v_1}([x_2,t])$ est fini si $t < 1$, et le raisonnement précédent montre que $g(x_2) \cap V_{v_1}$ ne peut être infini que si $g(x_2)$ contient $\xi_{v_1}([x_2,1])$, et qu'alors $g(x_2) \cap V_{v_1}$ est la réunion de cet ensemble et d'un ensemble fini. L'égalité $x_1 = x_2$ résulte alors de la condition (iii) du lemme 4.

Comme nous l'avons remarqué, $g(x)$ est infini pour tout $x \in C_0 \setminus D$. Il en résulte que $g(C_0 \setminus D)$ est localement homotopiquement négligeable. Puisque $g(D)$ est un Z-ensemble, $g(C_0)$ aussi.

Cas de $\{\dim_{\geq n+1} C(X)\}$. La démonstration est la même que précédemment, avec les modifications suivantes :

(a) Nous prenons pour F_v un élément non dégénéré de $\mathcal{A}(X)$ et choisissons des points a_v, b_v dans F_v de façon que les $a_v, b_v, v \in N^{(0)}$, soient tous distincts. Nous construisons ensuite les α_σ comme dans la démonstration du lemme 2.

(b) Nous appliquons le lemme 3′ avec $U = U_v$, $K = F_v$ et $y = a_v$, et nous prolongeons la fonction φ_v ainsi obtenue en une fonction de $\mathrm{Con}(C_0)$ dans $C(U_v; a_v)$ vérifiant $\varphi(\mathrm{Con}(C_0) \setminus C_0) \subset \mathcal{A}(U_v; a_v)$ et $\varphi_v(w) = a_v$.

(c) G étant comme dans la démonstration du lemme 2, posons, pour $v \in N_k^{(0)} \setminus N_{k-1}^{(0)}$, $K_v = \bigcup\{G_\sigma \mid \sigma \in N_{k+2}^{(1)}\}$ et appliquons le lemme 4′ avec $U = V_v$, $K = K_v$ et $a = b_v$ pour obtenir ξ_v. Prolongeons ξ_v en une fonction de $\mathrm{Con}(C_0)$ dans $C(V_v; b_v)$ vérifiant $\xi_v(\mathrm{Con}(C_0) \setminus C_0) \subset \mathcal{A}(X)$ et $\xi_v(w) = \{b_v\}$.

(d) Pour $z = (1-t)v_0 + tv_1$ où $\langle v_0, v_1\rangle$ est un 1-simplexe de N, la définition de $\Phi(z,x)$ est modifiée comme suit :

$$\Phi(z,x) = \begin{cases} \varphi_{v_0}([x,1]) \cup \xi_{v_0}([x,1]) \cup F_{v_0} \cup \alpha_\sigma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/4, \\ \varphi_{v_0}([x,1]) \cup \xi_{v_0}([x,1]) \cup G_\sigma & \\ \qquad \cup\, \varphi_{v_1}([x,4t-1]) \cup \xi_{v_1}([x,4t-1]) & \text{si } 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ \varphi_{v_0}([x,3-4t]) \cup \xi_{v_0}([x,3-4t]) \cup G_\sigma & \\ \qquad \cup\, \varphi_{v_1}([x,1]) \cup \xi_{v_1}([x,1]) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ \alpha_\sigma(2t-1) \cup \varphi_{v_1}([x,1]) \cup \xi_{v_1}([x,1]) & \text{si } 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'après ces modifications, la démonstration précédente peut être répétée.

Références

[1] T. Banakh et R. Cauty, *Sur les hyperespaces des espaces nulle part topologiquement complets*, Mat. Zametki 62 (1997), no. 1, 35–51 (en russe).

[2] R. Cauty, *L'espace des continus connexes par arcs de* $\mathbb{R}^n$, prépublication.

[3] D. W. Curtis and N. T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to* $\aleph_0$*-dimensional linear metric spaces*, Topology Appl. 19 (1985), 251–260.

[4] D. W. Curtis and R. M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math. 101 (1978), 19–38.

[5] J. J. Dijkstra, J. van Mill and J. Mogilski, *The space of infinite-dimensional compacta and other topological copies of* $(l_f^2)^\omega$, Pacific J. Math. 152 (1992), 255–273.

[6] T. Dobrowolski and L. R. Rubin, *The hyperspaces of infinite-dimensional compacta for covering and cohomological dimension are homeomorphic*, ibid. 164 (1994), 15–39.

[7] H. Gladdines, *F_σ-absorbing sequences in hyperspaces of compact sets*, Bull. Polish Acad. Sci. 40 (1992), 175–184.
[8] —, *F_σ-absorbing sequences in hyperspaces of subcontinua*, Comment. Math. Univ. Carolin. 34 (1993), 729–745.
[9] H. Gladdines and J. van Mill, *Hyperspaces of infinite-dimensional compacta*, Compositio Math. 88 (1993), 143–153.
[10] C. Kuratowski, *Topologie I*, 3ème édition, PWN, Warszawa, 1961.
[11] S. Mardešić and N. Uglešić, *On irreducible mappings into polyhedra*, Topology Appl. 61 (1995), 187–203.
[12] H. Toruńczyk, *Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds*, Fund. Math. 101 (1978), 93–110.

UFR 920
Université Paris VI
Boîte Courrier 172
4, pl. Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: cauty@ccr.jussieu.fr

Received 29 April 1997;
in revised form 25 June 1998