FUNDAMENTA
MATHEMATICAE
158 (1998)

Sur les rétractes absolus P_n-valués de dimension finie

par

Robert Cauty (Paris)

Abstract. We prove that a k-dimensional hereditarily indecomposable metrisable continuum is not a P_k-valued absolute retract. We deduce from this that none of the classical characterizations of ANR (metric) extends to the class of stratifiable spaces.

1. Introduction. Pour tout compact X et tout entier $n \geq 1$, nous notons $P_n(X)$ l'espace des mesures probabilistes sur X dont le support contient au plus n points. Nous regardons les points de $P_n(X)$ comme des combinaisons linéaires formelles $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, où $m \leq n$, les x_i sont des points de X (pas nécessairement distincts) et les λ_i sont des réels vérifiant $0 \leq \lambda_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Si $\Delta_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$, il y a une surjection évidente α_n de $X^n \times \Delta_n$ sur $P_n(X)$, et $P_n(X)$ est muni de la topologie quotient associée à α_n. $P_n(X)$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $P_{n+1}(X)$, et nous munissons $P_\infty(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X)$ de la topologie limite inductive de la suite croissante de compacts $\{P_n(X)\}$. Nous identifions X à $P_1(X)$. Un compact X est appelé un *rétracte absolu* P_n*-valué* si, pour tout compact Y et tout fermé A de Y, toute fonction continue $f : A \to X$ a un prolongement $g : Y \to P_n(X)$. Il est connu que tout compact métrisable de dimension k est un rétracte absolu P_{k+2}-valué. Nous prouverons ici le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit k un entier ≥ 1. Un continu métrisable héréditairement indécomposable de dimension k n'est pas un rétracte absolu P_k-valué.*

Comme il existe des continus héréditairement indécomposables de toute dimension finie [1], cela montre que, pour tout k, il existe un compact métrisable de dimension finie qui n'est pas un rétracte absolu P_k-valué. L'intérêt de ce fait vient de ce qu'il permet de construire un contre-exemple inattendu en théorie des rétractes.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 54C55, 54E20, 54F15.
Key words and phrases: P_k-valued absolute retracts, stratifiable spaces, ANR.

Rappelons qu'un espace topologique Y est dit *stratifiable* s'il est séparé et s'il existe une fonction faisant correspondre à tout ouvert U de Y une suite $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts de Y vérifiant (a) $\overline{U}_n \subset U$ pour tout n, (b) $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ et (c) $U \subset V$ implique $U_n \subset V_n$ pour tout n. Un espace stratifiable Y est appelé un *rétracte absolu* (*de voisinage*) *pour la classe des espaces stratifiables* (noté RA(V) (stratifiable)) si, pour tout espace stratifiable Z et tout fermé A de Z, toute fonction continue de A dans Y peut se prolonger à Z (resp. à un voisinage de A dans Z). Pour les espaces métrisables, chacune des trois conditions suivantes caractérise les rétractes absolus de voisinage :

(I) Tout ouvert de Y a le type d'homotopie d'un CW-complexe.

(II) Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de Y, Y est $\mathcal{U}$-dominé par un complexe simplicial.

(III) Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de Y, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de Y tel que toute réalisation partielle d'un complexe simplicial K dans Y relativement à $\mathcal{V}$ se prolonge en une réalisation complète de K dans Y relativement à $\mathcal{U}$.

Le théorème 1 permet de construire un exemple montrant que la situation est différente pour les espaces stratifiables.

THÉORÈME 2. *Soit*, *pour tout* $k \geq 1$, X_k *un compact métrisable de dimension finie qui n'est pas un rétracte absolu* P_k*-valué*, *et soit* X *le compactifié d'Alexandroff de la somme topologique des* X_k. *Alors*, $P_\infty(X)$ *est un espace stratifiable possédant les propriétés* (I) *à* (III), *mais n'est pas un* RAV(*stratifiable*).

Le théorème 2 est démontré dans [4] (où l'on peut aussi trouver la définition des termes employés dans (II) et (III)), mais avec $P_\infty(X)$ et $P_k(X)$ remplacés respectivement par l'espace vectoriel topologique libre $E(X)$ engendré par X et par le sous-espace $G_k(X)$ de $E(X)$ formé des combinaisons linéaires d'au plus k points de X. Comme $P_\infty(X)$ est un sous-espace fermé de $E(X)$, les techniques de [3] lui sont aussi applicables, et la démonstration de [4] se transpose sans modification au cas de $P_\infty(X)$; nous ne la répéterons donc pas. Remarquons d'ailleurs que la démonstration du théorème 1 s'applique aussi à $G_k(X)$, ce qui fournit une réponse affirmative aux problèmes 6 et 5 de [4].

REMARQUE. L'exemple du théorème 2 montre aussi que le résultat de Haver [5] selon lequel un espace métrique localement contractile qui est réunion dénombrable de compacts de dimension finie est un rétracte absolu de voisinage ne s'étend pas aux espaces stratifiables.

La démonstration du théorème 1 repose sur une représentation des cubes comme limites de systèmes projectifs particuliers, que nous construirons à la section 2.

2. Une représentation des cubes comme limites de suites projectives. Soit $I = [0,1]$. Fixons un entier $r \geq 1$. A toute suite $\{p_n\}$ de fonctions continues du cube I^r dans lui-même, nous associons une suite projective (I_n, p_n^m) comme suit : $I_n = I^r$ pour tout $n \geq 0$, $p_n^m = p_{n+1} \circ \ldots \circ p_m$ si $n < m$, et $p_n^n = \mathrm{id}$; nous notons π_n la projection de $\varprojlim(I_n, p_n^m)$ dans I_n.

LEMME 1. *Il existe une suite $\{p_n\}$ de fonctions continues de I^r dans I^r telle que le système projectif (I_n, p_n^m) ait les propriétés suivantes* :

(i) $\varprojlim(I_n, p_n^m)$ *est homéomorphe à* I^r,

(ii) *pour tout $n \geq 1$, tout sous-continu non vide F de $\varprojlim(I_n, p_n^m)$ contient un sous-ensemble non vide V, ouvert dans F, tel que $\pi_n|V$ soit constante.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G}_r$ l'ensemble des fonctions continues g de I^r dans I^r telles que tout sous-continu non vide H de I^r contienne un sous-ensemble non vide V, ouvert dans H, tel que $g|V$ soit constante.

AFFIRMATION 1. *$\mathcal{G}_r$ contient des fonctions arbitrairement proches de l'identité.*

Avant de prouver cette affirmation, montrons qu'elle entraîne le lemme. Il est clair que, pour toute suite $\{p_n\}$ de fonctions de $\mathcal{G}_r$, le système projectif (I_n, p_n^m) vérifie (ii). L'affirmation 1, combinée avec un résultat de M. Brown ([2], théorème 3), appliqué au système projectif (I_n, q_n^m) où $I_n = I^r$ et $q_n^m = \mathrm{id}$ quels que soient n et m, permet de choisir les $p_n \in \mathcal{G}_r$ de façon que $\varprojlim(I_n, p_n^m)$ soit homéomorphe à I^r, d'où le lemme.

L'affirmation 1 sera prouvée par récurrence sur r. Nous commencerons par construire une famille $\mathcal{F}$ de fonctions de I sur I comme suit. Fixons un sous-ensemble dénombrable partout dense D de $]0,1[$. Etant donné un nombre fini de points $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_s = 1$ de $I \setminus D$, prenons, dans chaque intervalle $[a_q, a_{q+1}]$, $0 \leq q < s$, un ensemble de Cantor disjoint de D et contenant a_q et a_{q+1}; la réunion de ces ensembles est un ensemble de Cantor K. Soient $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ les composantes de $I \setminus K$; d'après le choix de K, les a_q, $0 \leq q \leq s$, n'appartiennent pas à $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{U}_i$, ce qui permet de trouver une fonction continue monotone $f : I \to I$ telle que $f(a_q) = a_q$ pour $q = 0, \ldots, s$, et que

(1) les ensembles $f^{-1}f(x)$ contenant plus d'un point sont les $\overline{U}_i$, $i = 1, 2, \ldots,$

(2) $$f\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{U}_i\Big) \subset D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

$\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes les fonctions ainsi construites, pour tous les choix possibles des points a_q et des ensembles de Cantor contenant a_q et a_{q+1} dans $[a_q, a_{q+1}] \setminus D$. Evidemment, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}_1$ et, comme f peut être rendue arbitrairement proche de l'identité en prenant des intervalles $[a_q, a_{q+1}]$ suffisamment petits, l'affirmation 1 est vraie pour $r = 1$.

Soit $r > 1$, et soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions continues h de I^r dans I^r vérifiant

(∗) Si H est un sous-continu non vide de I^r, alors, ou bien (a) H contient un sous-ensemble non vide V, ouvert dans H, tel que $h|V$ soit constante, ou bien (b) $h(H)$ est contenu dans une tranche $\{t\} \times I^{r-1}$ où $t \in I$.

Il est facile de voir que si $g \in \mathcal{G}_{r-1}$ et $h \in \mathcal{H}$, alors $(\mathrm{id}_I \times g) \circ h \in \mathcal{G}_r$. L'affirmation 1 pour r résulte donc de l'affirmation 1 pour $r - 1$ et de l'affirmation suivante.

Affirmation 2. *$\mathcal{H}$ contient des fonctions arbitrairement proches de l'identité.*

Nous notons $x = (x_1, \ldots, x_r)$ le point générique de I^r. Pour $1 \le s \le r$, soient μ_s et ϱ_s les projections de I^r sur I^s et I respectivement définies par $\mu_s(x) = (x_1, \ldots, x_s)$ et $\varrho_s(x) = x_s$.

Fixons un élément f de $\mathcal{F}$. Soit K l'ensemble de Cantor utilisé pour construire f, et soit $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ une énumération des composantes de $I \setminus K$. Fixons un $e \in D$. Pour $1 \le s \le r$, soit $L_s = (I \setminus K)^s$. Pour $1 \le s \le r-1$, soit $\mathcal{H}_s(f)$ la famille des fonctions h de I^r dans I^r telles que, si $h(x) = (y_1, \ldots, y_s)$, alors $y_j = x_j$ pour $j \ne s+1$, tandis que $y_{s+1} = \alpha(\mu_s(x), x_{s+1})$, où la fonction continue α vérifie

(3) $\alpha(y, t) = t$ si $y \notin L_s$ ou si $t = e$,
(4) si $y \in L_s$, alors $\alpha(y, t) > t$ si $0 \le t < e$ et $\alpha(y, t) < t$ si $e < t \le 1$,
(5) $\alpha(D^{s+1}) \subset D$.

Une telle fonction α peut s'obtenir comme suit. Fixons une énumération des composantes $U_{i_1,\ldots,i_s} = U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_s}$ de L_s et une suite $\varepsilon_n \downarrow 0$. Pour obtenir la continuité de α, il suffit de la construire de façon que si y appartient au $n^{\text{ième}}$ des ensembles $U_{i_1,\ldots,i_s}$, alors $|\alpha(y,t) - t| < \varepsilon_n$. La restriction de α à $\overline{U}_{i_1,\ldots,i_s} \times I$ peut s'obtenir comme limite d'une suite de fonctions $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty}$ telles que $\alpha_l(\{d_1, \ldots, d_l\} \times D) \subset D$ et $\alpha_{l+1}|\{d_1, \ldots, d_l\} \times I = \alpha_l|\{d_1, \ldots, d_l\} \times I$, où $\{d_l\}_{l=1}^{\infty}$ est une énumération des points de $D^s \cap U_{i_1,\ldots,i_s}$. Les détails de la construction sont laissés au lecteur. Evidemment, α peut être construite de façon que h soit arbitrairement proche de l'identité.

Soit maintenant $\mathcal{H}(f)$ la famille des fonctions h de la forme $h = h_{2s-2} \circ \ldots \circ h_1$ où, pour $1 \le s \le r-1$, $h_{2s-1} \in \mathcal{H}_s(f)$ et $h_{2s} = f \times \ldots \times f$. Puisque les h_{2s-1} peuvent être choisies arbitrairement proches de l'identité, h peut être rendue arbitrairement proche de la composée de $r-1$ copies de $f\times\ldots\times f$; comme f peut être choisie de façon que cette composée soit arbitrairement proche de l'identité, il suffit, pour prouver l'affirmation 2, de montrer que $\mathcal{H}(f)\subset\mathcal{H}$ pour tout $f\in\mathcal{F}$.

Soit donc $h=h_{2s-2}\circ\ldots\circ h_1\in\mathcal{H}(f)$. Posons $\widehat{h}_0=\mathrm{id}$ et $\widehat{h}_s=h_s\circ\ldots\circ h_1$ pour $1\le s\le 2r-2$. Etant donné un sous-continu H de I^r, nous allons montrer que, pour tout entier $s\in\{1,\ldots,r-1\}$, l'une au moins des deux conditions suivantes est vérifiée :

(a$'$) $\mu_{s+1}(\widehat{h}_{2s-1}(H))\cap L_{s+1}\neq\emptyset$,
(b$'$) $\widehat{h}_{2s}(H)$ est contenu dans une tranche $\{t\}\times I^{r-1}$.

Notons que les fonctions h_{2s-1} ne changent pas la première coordonnée, tandis que les fonctions h_{2s} envoient chaque tranche $\{t\}\times I^{r-1}$ dans une autre tranche, donc si (b$'$) est vérifiée pour s, elle l'est aussi pour $s'\ge s$, et la condition $(*)$ est vérifiée pour H. Si la condition (a$'$) est vérifiée pour $s=r-1$, alors $\widehat{h}_{2r-3}(H)$ contient un point de L_r; $h_{2r-2}=f\times\ldots\times f$ est constante sur un voisinage d'un tel point, et $(*)$ est aussi vérifiée pour H.

Supposons donc que $s=1$ ou que $s>1$ et que (a$'$) soit vérifiée pour $s-1$. Si $s=1$ et si $H=\widehat{h}_0(H)$ n'est pas contenu dans une tranche $\{t\}\times I^{r-1}$, alors $\mu_1(H)\cap L_1\neq\emptyset$. Si $s>1$ et si (a$'$) est vérifiée pour $s-1$, alors, puisque $h_{2s-2}=f\times\ldots\times f$, il résulte de (2) que $\mu_s(\widehat{h}_{2s-2}(H))\cap L_s\neq\emptyset$. Il existe donc un ensemble $U=U_{i_1}\times\ldots\times U_{i_s}$ tel que $\mu_s^{-1}(U)\cap\widehat{h}_{2s-2}(H)\neq\emptyset$. Si $\mu_s(\widehat{h}_{2s-2}(H))\subset\overline{U}$, alors $h_{2s-1}(H)\subset f(\overline{U}_{i_1})\times I^{r-1}$, qui est une tranche. Si $\mu_s(\widehat{h}_{2s-2}(H))\not\subset\overline{U}$ et si x est un point de $\widehat{h}_{2s-2}(H)\cap\mu_s^{-1}(U)$, alors la fermeture de la composante C de x dans $\widehat{h}_{2s-2}(H)\cap\mu_s^{-1}(U)$ rencontre $\mu_s^{-1}(\overline{U}\setminus U)$. Si C contient un point y de $\varrho_{s+1}^{-1}(D)$, alors $h_{2s-1}(y)\in U\times D\subset L_{s+1}$ (d'après (5)), et (a$'$) est vérifiée. Si C ne contient pas de tel point, elle est contenue dans un ensemble de la forme $\varrho_{s+1}^{-1}(a)$ où $a\notin D$; d'après (3) et (4), $\varrho_{s+1}\circ h_{2s-1}|C$ ne peut être constante, donc $h_{2s-1}(C)$ contient un point de $\mu_s^{-1}(U)\cap\varrho_{s+1}^{-1}(D)\subset\mu_{s+1}^{-1}(L_{s+1})$ et (a$'$) est vérifiée pour s.

Le lemme suivant développe une conséquence de la propriété (ii) qui est la clef de la démonstration du théorème 1. Pour un continu X, nous notons $\exp X$ l'espace des sous-ensembles compacts non vides de X avec la topologie de Vietoris, et $\exp_n X$ le sous-espace de $\exp X$ formé des compacts contenant au plus n points.

Lemme 2. *Soient (I_n,p_n^m) comme dans le lemme* 1, *F un sous-continu de $\varprojlim(I_n,p_n^m)$, X un continu héréditairement indécomposable, s un entier ≥ 1 et $f:F\to\exp_s X$ une fonction continue. S'il existe un entier n et une fonction continue $g:\pi_n(F)\to\exp_s X$ tels que $f=g\circ(\pi_n|F)$, alors f est constante.*

D é m o n s t r a t i o n. Considérons d'abord le cas $s = 1$, i.e. $f : F \to X$. Quitte à remplacer X et F par des sous-continus, nous pouvons supposer que $f(F) = X$ et que $f(K) \neq X$ pour tout sous-continu propre K de F. D'après (ii), il y a un sous-ensemble ouvert U de F sur lequel π_n est constante. Puisque $f = g \circ (\pi_n|F)$, $f(\overline{U})$ contient un seul point z. Si f n'est pas constante, $X \setminus \{z\}$ contient des points x_1 et x_2 entre lesquels X est irréductible. Pour $i = 1, 2$, soit $y_i \in f^{-1}(x_i)$, et soit K_i un sous-continu de F irréductible entre x_i et $\overline{U}$. Alors K_i est un sous-continu propre de F (il ne contient aucun point de U), donc $f(K_i) \neq X$. Mais $f(K_i)$ contient z, donc $f(K_1) \cup f(K_2)$ est un sous-continu de X contenant x_1 et x_2. Puisque X est irréductible entre x_1 et x_2, $X = f(K_1) \cup f(K_2)$, ce qui contredit l'indécomposabilité de X.

Soit maintenant $s > 1$. Nous pouvons évidemment supposer que $f(F) \setminus \exp_{s-1} X \neq \emptyset$. Fixons $y \in F \setminus f^{-1}(\exp_{s-1} X)$. Puisque tout point de $\exp_s X \setminus \exp_{s-1} X$ a un voisinage homéomorphe à un sous-ensemble du produit X^s, si f n'est pas constante, nous pouvons trouver un voisinage fermé V de $f(y)$ tel que $f(F) \setminus V \neq \emptyset$ et qu'il existe un plongement φ de V dans X^s. Puisque $f^{-1}(V) \neq F$, la composante C de x dans $f^{-1}(V)$ rencontre la frontière de $f^{-1}(V)$. Comme $y \in f^{-1}(\operatorname{Int} V) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(V)$, $f|C$ n'est pas constante, donc la fonction $\widehat{f} = \varphi \circ (f|C) : C \to X^s$ n'est pas constante. Mais $\widehat{f} = \varphi \circ (g|\pi_n(C)) \circ (\pi_n|C)$ et, composant $\widehat{f}$ avec les projections sur les facteurs de X^s , nous obtenons une contradiction avec ce qui a été prouvé pour $s = 1$.

3. Démonstration du théorème 1. Soit X un continu métrisable héréditairement indécomposable de dimension k. Prenant le système projectif (I_n, p_n^m) du lemme 1 pour $r = 2k + 1$, nous pouvons supposer que X est un sous-espace du cube $\varprojlim(I_n, p_n^m)$. Posons $X_n = \pi_n(X)$, $q_n^m = p_n^m|X_m : X_m \to X_n$ et $q_n = \pi_n|X : X \to X_n$, de sorte que X est la limite projective du système (X_n, q_n^m). Regardant les ensembles X et X_n comme deux à deux disjoints, nous munissons leur réunion $X^* = X \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ d'une topologie de la façon habituelle : une base de X^* est formée des ouverts de X_n et des ensembles $q_n^{-1}(U) \cup (\bigcup_{m=n}^{\infty} (q_n^m)^{-1}(U))$, où U est ouvert dans X_n, $n \geq 1$. X est alors un sous-espace fermé de X^*, et les fonctions $q_n : X \to X^*$ convergent uniformément vers l'identité de X.

Supposons que X soit un rétracte absolu P_k-valué. Il existe alors une fonction continue $g : X^* \to P_k(X)$ telle que $g|X = \mathrm{id}$ et, posant $f_n = g \circ q_n : X \to P_k(X)$, la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge uniformément vers id_X.

Affirmation. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que, pour $n \geq n(\varepsilon)$ et $1 \leq s \leq k$, aucun sous-continu de $f_n^{-1}(P_s(X) \setminus P_{s-1}(X))$ n'ait un diamètre $\geq \varepsilon$ $(P_0(X) = \emptyset)$.*

Supposons le contraire. Il existe alors un $s \in \{1, \ldots, k\}$, une suite croissante $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ d'entiers et, pour tout i, un continu $K_i \subset f_{n_i}^{-1}(P_s(X) \setminus P_{s-1}(X))$ de diamètre $\geq \varepsilon$. Quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite $\{K_i\}$ converge dans $\exp X$; sa limite est un continu K de diamètre $\geq \varepsilon$. Puisque $\{f_n\}$ converge uniformément vers id_X, $\{f_{n_i}(K_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge vers K dans $\exp P_k(X)$.

Chaque élément μ de $P_s(X) \setminus P_{s-1}(X)$ s'écrit de façon unique, à l'ordre près, sous la forme $\mu = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j x_j$, où les x_j sont des points distincts de X et les λ_j vérifient $0 < \lambda_j < 1$ et $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j = 1$. L'ensemble $\mathrm{supp}(\mu) = \{x_1, \ldots, x_s\}$ est le support de μ, et la fonction $\mathrm{supp} : P_s(X) \setminus P_{s-1}(X) \to \exp_s X$ est continue. D'après le lemme 2, $\mathrm{supp} \circ (f_{n_i}|K_i)$ est constante; soit $\mathrm{supp}(f_{n_i}(x)) = \{x_1^i, \ldots, x_s^i\}$ pour $x \in K_i$. Quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons supposer que chacune des suites $\{x_j^i\}_{i=1}^{\infty}$ converge; soit x_j sa limite. Alors les seuls points de X qui peuvent être limite d'une suite $\{y_i\}$ de points de la forme $y_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j^i x_j^i$ sont les points $x_1, \ldots, x_s$, mais ceci est absurde, car chaque point du continu K doit être limite d'une telle suite.

Fixons un $\varepsilon > 0$, et soit $n = n(\varepsilon)$. Comme chaque composante du compact $f_n^{-1}(P_1(X))$ a un diamètre $< \varepsilon$, nous pouvons trouver une famille $\mathcal{V}_1$ d'ouverts deux à deux disjoints de diamètres $< \varepsilon$ dont la réunion W_1 contient $f_n^{-1}(P_1(X))$. Supposons que, pour un $s < r$, nous ayons construit s familles $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_s$ d'ouverts de diamètres $< \varepsilon$ telles que les éléments de chaque $\mathcal{V}_j$, $1 \leq j \leq s$, soient deux à deux disjoints et que la réunion W_s des éléments de $\mathcal{V}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{V}_s$ recouvre $f_n^{-1}(P_s(X))$. Alors $f_n^{-1}(P_{s+1}(X)) \setminus W_s$ est un compact contenu dans $f_n^{-1}(P_{s+1}(X) \setminus P_s(X))$, donc ses composantes sont de diamètre $< \varepsilon$, et nous pouvons trouver une famille $\mathcal{V}_{s+1}$ formée d'ouverts deux à deux disjoints de diamètres $< \varepsilon$ recouvrant $f_n^{-1}(P_{s+1}(X)) \setminus W_s$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons construire un recouvrement $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{V}_k$ de X par les ouverts de diamètre $< \varepsilon$ tel que, pour $1 \leq s \leq k$, les ensembles de $\mathcal{V}_s$ soient deux à deux disjoints. L'ordre du recouvrement $\mathcal{V}$ est donc au plus k, et cela entraîne que la dimension de X est au plus $k - 1$, ce qui est absurde.

Bibliographie

[1] R. H. Bing, *Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 267–273.

[2] M. Brown, *Some applications of an approximation theorem for inverse limits*, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 478–483.

[3] R. Cauty, *Un espace métrique linéaire qui n'est pas un rétracte absolu*, Fund. Math. 146 (1994), 85–99.

[4] —, *Quelques problèmes sur les groupes contractiles et la théorie des rétractes*, Mat. Studii 3 (1994), 111–116.

[5] W. E. Haver, *Locally contractible spaces that are absolute neighborhood retracts*, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973), 280–284.

Université Paris 6
UFR 920
Boîte courrier 172
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: cauty@ccr.jussieu.fr

Received 12 November 1997