

## Préimages d'espaces héréditairement de Baire

par

Ahmed Bouziad (Rouen)

**Abstract.** The main result is slightly more general than the following statement: Let  $f : X \rightarrow Y$  be a quasi-perfect mapping, where  $X$  is a regular space and  $Y$  a Hausdorff totally non-meagre space; if  $X$  or  $Y$  is  $\chi$ -scattered, or if  $Y$  is a Lasnev space, then  $X$  is totally non-meagre. In particular, the product of a compact space  $X$  and a Hausdorff regular totally non-meagre space  $Y$  which is  $\chi$ -scattered or a Lasnev space, is totally non-meagre.

**1. Introduction.** Un espace topologique séparé est dit *héréditairement de Baire* (ou *totalement non maigre*) si tous ses sous-espaces fermés sont des espaces de Baire. Il est facile de voir, en se ramenant au cas d'une application irréductible, que la propriété pour un espace d'être héréditairement de Baire est stable par l'image directe d'une application propre. Il est néanmoins non connu si cette même propriété est stable par les images inverses des applications propres. Le problème suivant, posé en 1973 par Aarts et Lutzer dans [AL], est semble-t-il encore ouvert : Soit  $X$  un espace compact et  $Y$  un espace héréditairement de Baire; l'espace produit  $X \times Y$  est-il héréditairement de Baire? Dans le cas particulier où  $X$  et  $Y$  sont métrisables, il résulte d'un théorème classique de Hurewicz [H] (i.e. un espace métrisable est héréditairement de Baire s'il ne contient pas de copie fermée des rationnels) que la réponse à ce problème est positive; voir aussi [D, Corollaire 4.2]. Signalons également qu'il est donné dans [AL] un exemple d'espace métrisable héréditairement de Baire  $X$  tel que le produit  $X \times X$  ne soit pas héréditairement de Baire.

Soit  $\mathcal{A}$  la classe des espaces  $Y$  tels que, pour tout compact  $X$ , l'espace produit  $X \times Y$  est héréditairement de Baire. On vérifie aisément que  $\mathcal{A}$  est une classe propre dans le cadre des espaces complètement réguliers. En effet, soit  $X$  et  $Y$  deux espaces complètement réguliers et soit  $f : X \rightarrow Y$  une ap-

---

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 54O11.

*Key words and phrases*: Baire space; totally non-meagre space; Lasnev space;  $\chi$ -scattered space; quasi-perfect map.

plication propre surjective. Si  $X$  est dans  $\mathcal{A}$  alors le fait que, pour tout compact  $Z$ , l'application  $(x, z) \in X \times Z \rightarrow (f(x), z) \in Y \times Z$  est propre implique que  $Y$  est dans  $\mathcal{A}$ . Inversement, le fait que l'espace  $X$  soit homéomorphe (par l'application  $x \rightarrow (x, f(x))$ , voir [E]) à un sous-espace fermé de  $\beta X \times Y$ , où  $\beta X$  désigne le compactifié de Čech–Stone de  $X$ , implique que  $X$  est dans  $\mathcal{A}$  dès que  $Y$  est dans  $\mathcal{A}$ . L'objet de cette note est de donner une réponse partielle au problème de Aarts et Lutzer en montrant que  $\mathcal{A}$  contient tous les espaces réguliers héréditairement de Baire qui sont  $\chi$ -dispersés ou espaces de Lasnev. Ce résultat est obtenu comme conséquence du Théorème 2.1 qui porte sur la question, considérée au début de l'introduction, relative à l'invariance de la propriété d'être héréditairement de Baire par les images inverses des applications quasi-propres.

**2. Les principaux résultats.** Rappelons qu'une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est dite *propre* (respectivement *quasi-propre*) si  $f$  est fermée et si pour tout  $y \in Y$ , le sous-espace  $f^{-1}(y)$  de  $X$  est compact (respectivement dénombrablement compact). Un point  $x \in X$  est dit *de caractère dénombrable* dans une partie  $A$  de  $X$  si  $x \in A$  et si  $x$  admet une base dénombrable de voisinages dans le sous-espace  $A$  de  $X$ . L'espace  $X$  est dit  $\chi$ -dispersé si tout sous-espace fermé non vide  $F$  de  $X$  admet au moins un point de caractère dénombrable dans  $F$ . Un espace est dit *de Lasnev* s'il est l'image par une application continue fermée d'un espace métrisable. Le principal résultat de cette note est le suivant.

**2.1. THÉORÈME.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application quasi-propre, où  $X$  est un espace régulier et  $Y$  est un espace séparé héréditairement de Baire. Si l'un des espaces  $X$  ou  $Y$  est  $\chi$ -dispersé, ou encore si  $Y$  est un espace de Lasnev, alors l'espace  $X$  est héréditairement de Baire.*

La démonstration de ce théorème est présentée dans la section 3. Le résultat suivant est établi dans [D, Corollaire 4.2] dans le cas particulier où  $X$  et  $Y$  sont métrisables.

**2.2. COROLLAIRE.** *Soit  $X$  un espace Čech-complet et  $Y$  un espace séparé, régulier et héréditairement de Baire qui est soit  $\chi$ -dispersé soit de Lasnev. Alors l'espace produit  $X \times Y$  est héréditairement de Baire.*

*Démonstration.* L'espace  $X \times Y$  est un  $G_\delta$  de l'espace produit  $\beta X \times Y$  et ce dernier espace est héréditairement de Baire d'après le Théorème 2.1. D'autre part, il est connu que tout  $G_\delta$  d'un espace héréditairement de Baire est héréditairement de Baire; voir [D, Proposition 1.2]. ■

Il résulte du Corollaire 2.2 que la classe  $\mathcal{A}$  (définie dans l'introduction) contient tous les espaces réguliers  $\chi$ -dispersés et tous les espaces de Lasnev. Le fait que  $\mathcal{A}$  soit une classe propre dans le cadre des espaces complètement

réguliers permet d'étendre l'énoncé du Corollaire 2.2 à d'autres espaces  $Y$ ; par exemple à tout  $p$ -espace paracompact héréditairement de Baire. En effet, un tel espace  $Y$  est un l'image inverse par une application propre d'un espace métrisable  $Z$  (voir [G]) que l'on peut supposer héréditairement de Baire.

Un espace  $Y$  est dit *séquentiel* si pour tout  $A \subset X$  tel que  $\bar{A} \setminus A \neq \emptyset$ , il existe une suite convergente  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  telle que  $\lim x_n \notin A$ . Rappelons que tout espace de Lasnev est Fréchet donc séquentiel.

**2.3. COROLLAIRE.** *Soit  $X$  un espace régulier dénombrablement compact et  $Y$  un espace séparé, régulier et héréditairement de Baire. Si  $Y$  est  $\chi$ -dispersé séquentiel ou espace de Lasnev, alors l'espace produit  $X \times Y$  est héréditairement de Baire.*

*Démonstration.* L'espace  $Y$  étant séquentiel dans chacun des cas, il résulte de [E, Theorem 3.10.7], puisque  $X$  est dénombrablement compact, que la projection  $\pi : X \times Y \rightarrow Y$  est fermée; comme  $X$  est dénombrablement compact, l'application  $\pi$  est quasi-propre. Le Théorème 2.1 permet donc de conclure. ■

**3. Démonstration du Théorème 2.1.** Dans le but de donner au Théorème 2.1 une seule démonstration dans les trois cas  $X$   $\chi$ -dispersé,  $Y$   $\chi$ -dispersé ou  $Y$  de Lasnev, nous allons montrer un résultat un peu plus général (Proposition 3.1), avec des hypothèses vérifiées dans tous ces cas.

Dans la suite, un espace  $X$  sera dit *pseudo-compact* si toute suite décroissante  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'ouverts non vides de  $X$  est telle que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{W}_n \neq \emptyset$ . Tout espace régulier dénombrablement compact est pseudo-compact, et tout espace régulier pseudo-compact est de Baire. Si  $X$  est complètement régulier, alors  $X$  est pseudo-compact si et seulement si  $X$  est pseudo-compact au sens usuel (voir [E, Theorem 3.10.23]). Le lemme élémentaire suivant nous sera utile dans la preuve de la Proposition 3.1.

*LEMME.* *Soit  $X$  un espace topologique et soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts denses dans  $X$ . S'il existe un sous-espace  $Y$  de  $X$  de Baire et  $\Omega \subset X$  un ouvert non vide tels que  $\Omega \cap U_0 \subset Y$ , alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega \cap U_n \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* Le sous-espace  $\Omega \cap U_0$  de  $Y$  est un ouvert de  $Y$ , donc il est de Baire. La suite  $(\Omega \cap U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'ouverts denses dans  $\Omega \cap U_0$ , donc  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega \cap U_n \neq \emptyset$ . ■

Soit  $X$  un espace topologique. On dit qu'une suite décroissante  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de parties de  $X$  converge vers  $x \in X$  si, pour tout voisinage  $V$  de  $x$  dans  $X$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $A_n \subset V$ . Une application  $f : X \rightarrow Y$  sera dite à fibres pseudo-compactes si, pour tout  $y \in Y$ , le sous-espace  $f^{-1}(y)$  de  $X$  (éventuellement vide) est pseudo-compact.

**3.1. PROPOSITION.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application à fibres pseudo-compactes, où  $X$  est un espace régulier et  $Y$  est un espace séparé. Supposons que pour tout ouvert non vide  $U$  de  $X$  il existe un triplet  $(x, V, (B_n(f(x)))_{n \in \mathbb{N}})$ , où  $V$  est un ouvert de  $X$  tel que  $\overline{V} \subset U$  et  $x \in \overline{V}$ , vérifiant les conditions suivantes :*

- (i)  $f(\overline{V})$  est un fermé de  $Y$ ,
- (ii)  $(B_n(f(x)))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de parties non vides de  $f(\overline{V})$  qui converge vers  $f(x)$  et telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $f^{-1}(B_n(f(x))) \cap \overline{V}$  est d'intérieur non vide dans  $\overline{V}$ .

Alors, si tout sous-espace fermé dénombrable de  $Y$  est de Baire, l'espace  $X$  est aussi de Baire.

*Démonstration.* Supposons que  $X$  ne soit pas un espace de Baire. Soit alors  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante d'ouverts denses de  $X$  et  $O$  un ouvert non vide de  $X$  tels que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O \cap U_n = \emptyset$ . Notons  $\Sigma$  l'ensemble des suites finies d'éléments de  $\mathbb{N}$ . Nous allons construire une famille  $(x_\sigma, V_\sigma, (B_n(f(x_\sigma)))_{n \in \mathbb{N}})_{\sigma \in \Sigma}$ , où  $V_\sigma \subset \overline{V}_\sigma \subset O$  est un ouvert de  $X$ , telle que les conditions (i) et (ii) de la proposition soient vérifiées par le triplet  $(x_\sigma, \overline{V}_\sigma, (B_n(f(x_\sigma)))_{n \in \mathbb{N}})$ ; de plus, cette famille est telle que l'on ait pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $\sigma \in \Sigma$  la propriété (\*) suivante :

$$(*) \quad x_{\sigma \cdot n} \in \overline{V}_{\sigma \cdot n} \subset V_\sigma \cap U_n \cap f^{-1}(B_n(f(x_\sigma))) \setminus f^{-1}(f(x_\sigma)),$$

où  $\sigma \cdot n$  désigne la concaténation de  $\sigma$  et de  $n$ .

Soit  $V_\emptyset$  un ouvert tel que  $\overline{V}_\emptyset \subset O$ ,  $x_\emptyset \in \overline{V}_\emptyset$  et  $(B_n(f(x_\emptyset)))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de parties non vides de  $f(\overline{V}_\emptyset)$ , tels que les conditions (i) et (ii) soient vérifiées par le triplet  $(x_\emptyset, \overline{V}_\emptyset, (B_n(f(x_\emptyset)))_{n \in \mathbb{N}})$ . Soit  $\sigma \in \Sigma$  et  $k \in \mathbb{N}$  et supposons que  $x_\sigma, V_\sigma$  et  $(B_n(f(x_\sigma)))_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les conditions (i), (ii) et (\*) soient construits. Désignons par  $\Omega$  l'intérieur de  $V_\sigma \cap f^{-1}(B_k(f(x_\sigma)))$  dans  $X$ . Le sous-espace  $f^{-1}(f(x_\sigma))$  de l'espace régulier  $X$  étant pseudo-compact donc de Baire, il résulte du Lemme ci-dessus que l'ouvert non vide  $\Omega \cap U_k$  de  $X$  n'est pas inclus dans l'espace de Baire  $f^{-1}(f(x_\sigma))$ . On peut donc, en utilisant les hypothèses de la proposition appliquées à l'ouvert  $U = \Omega \cap U_k \setminus \overline{f^{-1}(f(x_\sigma))}$ , trouver  $V_{\sigma \cdot k}, x_{\sigma \cdot k} \in \overline{V}_{\sigma \cdot k} \subset U$  et  $(B_n(f(x_{\sigma \cdot k}))_{n \in \mathbb{N}})$  tels que les conditions (i) et (ii) soient satisfaites par le triplet  $(x_{\sigma \cdot k}, V_{\sigma \cdot k}, (B_n(f(x_{\sigma \cdot k}))_{n \in \mathbb{N}}))$ ; la condition (\*) est alors vérifiée par  $\sigma \cdot k$ .

Soit  $B = \{f(x_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ . Montrons que  $B$  est un fermé de  $Y$  sans point isolé, ce qui achèvera la démonstration. Soit  $\sigma \in \Sigma$  et soit  $U$  un ouvert de  $Y$  contenant  $f(x_\sigma)$ ; comme la suite  $(B_n(f(x_\sigma)))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x_\sigma)$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $B_n(f(x_\sigma)) \subset f(\overline{V}_\sigma) \cap U$ , donc, d'après (\*), on a  $f(x_{\sigma \cdot n}) \in U \cap B \setminus \{f(x_\sigma)\}$ . Par conséquent,  $B$  est sans point isolé. Soit  $y \in \overline{B}$  et supposons que  $y \notin B$ . Soit  $\mathcal{F}$  un ultrafiltre non principal sur  $\Sigma$  tel que

$\lim_{\mathcal{F}} f(x_\sigma) = y$ . Il existe  $p_0 \in \mathbb{N}$  tel que l'ensemble  $A_0 = \{\sigma \in \Sigma : \sigma(0) = p_0\}$  soit dans  $\mathcal{F}$ . En effet, dans le cas contraire, comme  $\mathcal{F}$  est un ultrafiltre sur  $\Sigma$  on aurait  $\bigcup_{p > n} \{\sigma \in \Sigma : \sigma(0) = p\} \in \mathcal{F}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ; comme d'après (\*) on a  $f(x_\sigma) \in f(\overline{V}_\emptyset) \cap B_p(f(x_\emptyset))$  pour tout  $\sigma$  tel que  $\sigma(0) = p$ , ceci impliquerait que  $y = \lim_{\mathcal{F}} f(x_\sigma) = f(x_\emptyset) \in B$ . (Rappelons que  $Y$  est séparé et que  $(B_n(f(x_\emptyset)))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x_\emptyset)$ .) De même, puisque  $y \neq f(x_{(p_0)})$  et puisque  $f(x_\sigma) \in B_p(f(x_{(p_0)})) \cap f(\overline{V}_{(p_0)})$  pour tout  $\sigma \in A_0$  tel que  $\sigma(1) = p$ , il existe  $p_1 \in \mathbb{N}$  tel que l'ensemble  $A_1 = \{\sigma \in A_0 : \sigma_n(1) = p_1\}$  soit dans  $\mathcal{F}$ . En poursuivant ce processus, on construit par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  une suite décroissante  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  et une suite  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  telles que l'on ait  $\sigma(k) = p_k$  pour tout  $\sigma \in A_k$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  posons  $\sigma_n = (p_0, \dots, p_n)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $\overline{V}_{\sigma_n} \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ ; en effet, dans le cas contraire, comme  $f(\overline{V}_{\sigma_n})$  est un fermé de  $Y$ , il existerait un élément  $\sigma$  de  $A_m$  avec  $m > n$  tel que  $f(x_\sigma) \notin f(\overline{V}_{\sigma_n})$ , ce qui est absurde car  $x_\sigma \in \overline{V}_{\sigma_n}$ . Il résulte alors de (\*) et de la pseudo-compacité de  $f^{-1}(y)$  que  $\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V}_{\sigma_n} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O \cap U_n$ , ce qui est impossible. Par conséquent,  $y \in B$ . ■

**3.2. Preuve du Théorème 2.1.** Pour voir que le Théorème 2.1 découle de la Proposition 3.1, considérons dans un premier temps une application continue surjective  $f : X \rightarrow Y$  (où  $X$  et  $Y$  sont deux espaces quelconques) et soit  $x \in X$  tel que l'un des points  $x$  ou  $f(x)$  soit limite d'une suite décroissante d'ouverts non vides. Soit  $z \in \{x, f(x)\}$  et soit  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante d'ouverts non vides de  $X$  ou de  $Y$ , suivant que  $z = x$  ou  $z = f(x)$ , qui converge vers  $z$ . Posons  $A_n = f(V_n)$  si  $z = x$  et  $A_n = V_n$  sinon. Dans tous les cas la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x)$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intérieur de  $f^{-1}(A_n)$  dans  $X$  est non vide.

Maintenant, soit  $f : X \rightarrow Y$  une application comme dans le Théorème 2.1. Supposons que l'un des espaces  $X$  ou  $Y$  soit  $\chi$ -dispersé. Soit  $F \subset X$  un fermé. Il découle de ce qui précède que la restriction de l'application  $f$  à  $F$  vérifie toutes les hypothèses de la Proposition 3.1, d'où le résultat dans ce cas.

Dans le cas où  $Y$  est un espace de Lasnev, le fait que les hypothèses de la Proposition 3.1 soient satisfaites découle de l'observation ci-dessus, du fait que tout sous-espace (fermé) d'un espace de Lasnev est un espace de Lasnev et du lemme suivant.

**3.3. LEMME.** *Dans un espace de Lasnev tout point est limite d'une suite décroissante d'ouverts non vides.*

*Démonstration.* Soit  $f : Z \rightarrow Y$  une application surjective continue et fermée, où  $Z$  est un espace métrique. Supposons que  $f$  soit faiblement ouverte, c'est-à-dire, l'image par  $f$  de tout ouvert non vide de  $Z$  est d'intérieur

non vide dans  $Y$ . Soit  $y \in Y$  et fixons  $x \in Z$  tel que  $f(x) = y$ , ainsi qu'une suite décroissante  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'ouverts non vides de  $Z$  formant une base de voisinages de  $x$  dans  $Z$ . Il est clair que dans ce cas la suite des intérieurs des  $f(U_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge vers  $y$ .

Pour le cas général, fixons d'après [G, Lemma 5.4] un fermé  $F$  de  $Z$  tel que la restriction  $g$  de  $f$  à  $F$  soit surjective et irréductible. Pour conclure, il suffit de montrer que l'application  $g : F \rightarrow Y$  est faiblement ouverte. Soit  $U$  un ouvert non vide de  $F$ ; comme  $g$  est irréductible, il existe  $y \in Y$  tel que  $g^{-1}(y) \subset U$ , et comme  $g$  est fermée il existe un voisinage ouvert  $O$  de  $y$  dans  $Y$  tel que  $g^{-1}(O) \subset U$ , donc  $O \subset g(U)$ . Par conséquent, l'application  $g$  est faiblement ouverte. ■

**3.4. Remarques.** 1) Notons que l'on obtient également comme conséquence de la Proposition 3.1 l'énoncé suivant: Un espace séparé régulier,  $\chi$ -dispersé ou de Lasnev, est héréditairement de Baire si et seulement si tous ses sous-espaces fermés dénombrables sont des espaces de Baire.

2) La classe  $\mathcal{C}$  des espaces dans lesquels tout point est limite d'une suite décroissante d'ouverts non vides semble jouer un rôle important dans le problème considéré dans cette note. On peut montrer, en utilisant des arguments standards, qu'un espace régulier  $X$  est dans  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $X$  est l'image d'un espace métrisable par une application continue faiblement ouverte. Comme le montre la démonstration du Lemme 3.3, la classe  $\mathcal{C}$  contient en plus des espaces de Lasnev tout espace qui est image d'un espace métrisable par une application irréductible héréditairement quotient. Par contre, les espaces de Fréchet ne sont pas tous dans  $\mathcal{C}$  (rappelons que les espaces de Fréchet se caractérisent comme étant les images héréditairement quotient d'espaces métrisables, voir [E]).

Pour le voir, considérons un groupe topologique de Fréchet  $G$  non métrisable et supposons que  $G$  soit dans  $\mathcal{C}$ . Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante d'ouverts non vides de  $G$  qui converge vers l'élément neutre  $e$  de  $G$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  soit  $g_n \in U_n$ ; la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $e$ , il en résulte que la suite  $(U_n g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ , qui converge encore vers  $e$ , est une base de voisinages de  $e$  dans  $G$ ; donc, d'après le théorème de Birkhoff–Kakutani,  $G$  est métrisable. (Notons, au passage, qu'il résulte du Lemme 3.3 que tout groupe topologique de Lasnev est métrisable.)

### Bibliographie

- [AL] J. M. Aarts and D. J. Lutzer, *The product of totally nonmeagre spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 198–200.
- [D] G. Debs, *Espaces héréditairement de Baire*, Fund. Math. 129 (1988), 199–206.
- [E] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.

- [G] G. Gruenhage, *Generalized metric spaces*, dans : Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), Elsevier, Amsterdam, 1984, 961–1043.
- [H] W. Hurewicz, *Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A)*, Fund. Math. 12 (1928), 78–109.

Département de Mathématiques, CNRS UPRES-A 6085  
Université de Rouen  
76821 Mont-Saint-Aignan, France  
E-mail: ahmed.bouziad@univ-rouen.fr

*Received 26 November 1996;  
in revised form 26 February 1997*