

## Quelques résultats sur la dimension de Hausdorff des ensembles de Julia des polynômes quadratiques

par

Olivier Bodart et Michel Zinsmeister (Orléans)

**Abstract.** This paper deals with the Hausdorff dimension of the Julia set of quadratic polynomials. It is divided in two parts. The first aims to compute good numerical approximations of the dimension for hyperbolic points. For such points, Ruelle's thermodynamical formalism applies, hence computing the dimension amounts to computing the zero point of a pressure function. It is this pressure function that we approximate by a Monte-Carlo process combined with a shift method that considerably decreases the computational cost. The second part is a continuity result of the dimension on the real axis at the parabolic point  $1/4$  for  $P_c(z) = z^2 + c$ .

**1. Introduction.** Si  $c$  est un nombre complexe on note  $P_c(z) = z^2 + c$ ,  $J_c$  l'ensemble de Julia de  $P_c$  et  $d(c)$  la dimension de Hausdorff de  $J_c$ . Le but de ce travail est une étude, incluant des aspects numériques, de la fonction  $c \mapsto d(c)$ .

On ne connaît exactement la valeur numérique de  $d(c)$  que pour deux valeurs de  $c$ ,  $d(0) = d(-2) = 1$ ,  $J_0$  étant le cercle unité et  $J_{-2}$  le segment  $[-2, 2]$ . Pour toutes les autres valeurs de  $c$  dans les composantes hyperboliques de l'ensemble  $M$  de Mandelbrot,  $d(c)$  est plus grande que 1. Dans le cas hyperbolique, c'est-à-dire, rappelons-le, le cas où le point critique 0 est attiré par un cycle attractif, on dispose de renseignements très précis sur la fonction  $d$ . Tout d'abord la dynamique de  $P_c$  sur  $J_c$  est expansive et le couple  $(J_c, P_c)$  est un cas particulier de *répulseur conforme* au sens de Ruelle [10]; par suite on peut construire sur  $J_c$  une partition de Markov (ici à deux éléments) et la dynamique de  $P_c$  sur  $J_c$  apparaît alors comme celle du décalage à gauche sur  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Comme l'a observé Bowen [3], on dispose alors de la machinerie du formalisme thermodynamique pour étudier la fonction  $d$ .

Si  $\{U_0, U_1\}$  désigne la partition de Markov et si  $x_1, \dots, x_n$  valent 0, 1

---

1991 *Mathematics Subject Classification*: 30C10, 30D05, 58F23.

notons  $x_1 x_2 \dots x_n$  le cylindre des mots commençant par  $x_1 \dots x_n$ , c'est-à-dire

$$x_1 \dots x_n = \{z \in U_{x_1} : P_c(z) \in U_{x_2}, \dots, P_c^{n-1}(z) \in U_{x_n}\},$$

qui n'est autre qu'une des  $2^n$  composantes de  $P_c^{-(n-1)}(U_{x_n})$ .

Pour chaque cylindre  $x_1 \dots x_n$ , appelons encore  $x_1 \dots x_n$  un de ses éléments, par exemple  $x_1 \dots x_n x_1 \dots x_n x_1 \dots x_n \dots$ . Le théorème de Koebe implique que

$$\text{diam}(x_1 \dots x_n) \sim |(P_c^n)'(x_1 \dots x_n)|^{-1}$$

(ici et dans la suite  $a_n \sim b_n$  signifie que  $b_n/C \leq a_n \leq Cb_n$  avec une constante  $C > 1$  indépendante de  $n$ ).

Si  $\psi$  est une fonction continue sur  $J_c$  et  $n \geq 1$  notons  $S_n(\psi) = \psi + \psi \circ P_c + \dots + \psi \circ P_c^{n-1}$ ; Bowen a montré que si  $\psi$  est hölderienne alors la limite suivante

$$P(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\sum_{x_1 \dots x_n} e^{S_n(\psi)(x_1 \dots x_n)})}{n},$$

appelée *pression* de  $\psi$ , existe. Il est facile alors de vérifier que  $d(c)$  est l'unique solution de l'équation (en  $t$ )  $P(-t \log |P_c'|) = 0$ .

Cette formule donnant la valeur de  $d(c)$  est encore appelée *formule de Bowen*. Voici quelques-unes de ses conséquences :

1) La terminologie de "pression" vient naturellement de la thermodynamique. On montre en fait que cette quantité est aussi égale à

$$\sup_{\mu \in M(J_c)} \left( h_\mu + \int_{J_c} \psi d\mu \right)$$

qui représente physiquement une énergie libre. Dans cette expression,  $M(J_c)$  est l'ensemble des mesures de probabilité sur  $J_c$  telles que  $\mu \circ P_c^{-1} = \mu$  et  $h_\mu$  est l'entropie de  $\mu$ , c'est-à-dire la quantité

$$h_\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sum_{x_1 \dots x_n} \mu(x_1 \dots x_n) \log \mu(x_1 \dots x_n)}{n}.$$

De plus, ce sup est atteint par une unique mesure invariante appelée *mesure d'équilibre* et cette mesure est équivalente à la mesure de Hausdorff  $d(c)$ -dimensionnelle dans le cas où  $\psi = -d(c) \log(|P_c'|)$ .

De cette interprétation de la pression il découle que dans une composante hyperbolique

$$\frac{1}{d(c)} = \inf_{M(J_c)} \frac{\int_{J_c} \log |P_c'| d\mu}{h_\mu}$$

est un inf de fonctions harmoniques, ce qui implique en particulier que la fonction  $d$  est sous-harmonique dans chaque composante hyperbolique (cette observation est due à Ransford [8]).

2) Une autre interprétation de la pression est celle de Ruelle. On considère l'opérateur de transfert défini sur  $\mathcal{C}(J_c)$  par

$$\mathcal{L}_\psi(f)(x) = \sum_{P_c(y)=x} e^{\psi(y)} f(y).$$

Le théorème de Perron–Frobenius–Ruelle [3] affirme que si  $\psi$  est hölderienne alors  $\exp(P(\psi))$  est valeur propre simple de  $\mathcal{L}_\psi$  associé à un vecteur propre  $h > 0$  hölderienne tandis que le reste du spectre est inclus dans une boule de centre 0 et de rayon  $< \exp(P(\psi))$ . Le théorème de Kato–Rellich [9] sur la perturbation du spectre permet alors d'affirmer que  $P$  est une fonction réelle-analytique de  $\psi$ . En conséquence, il en est de même de la fonction  $d$  dans toute composante hyperbolique.

Pour résumer, la fonction  $d$  est réelle-analytique et sous-harmonique dans chaque composante hyperbolique; en particulier, elle admet des limites au bord presque partout le long des lignes de Green dans chaque composante hyperbolique.

Voyons enfin le lien entre la pression et le formalisme multifractal. Pour simplifier plaçons nous dans la cardioïde principale; dans ce cas l'ensemble de Julia est un quasicercle et l'on peut trouver un choix de la représentation conforme du complémentaire du disque unité sur l'extérieur de  $J_c$ , soit  $\Phi_c$ , qui conjugue  $z^2$  à  $z^2+c$ . Les cylindres d'ordre  $n$  de  $J_c$  correspondent par cette application aux intervalles dyadiques d'ordre  $n$  du cercle unité. Soit  $I$  un tel intervalle et  $z_I = (1 + |I|)u_I$ , où  $u_I$  représente le centre de  $I$ . Les théorèmes de distorsion valables pour les applications conformes se prolongeant en des homéomorphismes du plan impliquent que  $\text{diam}(\Phi_c(I)) \sim |I| \cdot |\Phi'_c(z_I)|$ ; de plus, le théorème de Koebe implique que  $|\Phi'_c(z_I)| \sim |\Phi'_c((1 + |I|)u)|$  indépendamment de  $I$  et de  $u \in I$ . On en déduit

$$\sum_{x_1 \dots x_n} \text{diam}(x_1 \dots x_n)^t \sim 2\pi 2^{n(1-t)} \int_{\partial D} |\Phi'_c((1 + 2\pi 2^{-n})u)|^t |du|.$$

Posons

$$\beta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \int_{\partial D} |\Phi'_c((1 + 2\pi 2^{-n})u)|^t |du|}{n};$$

c'est la fonction permettant d'étudier le formalisme multifractal de  $\Phi_c$ . Ce qui précède montre que cette fonction est reliée à la pression par la formule

$$\beta(t) = P(-t \log |P'_c|) + (t - 1) \log 2.$$

Cette dernière identité nous sera utile au paragraphe suivant : tout d'abord, elle montre que le calcul de la pression se ramène à un calcul d'intégrale, ce qui sera décisif pour la méthode numérique choisie pour le calcul de la dimension. Elle nous permet aussi de voir le danger qui nous guette, à savoir le phénomène de type "crowding" bien connu des numériciens

qui pratiquent la représentation conforme numérique. En effet, lorsque l'on s'approche du bord d'une composante hyperbolique, il peut apparaître des "cusps" sortants (voir le paragraphe 3) et par conséquent des cylindres très grands par rapport à leur image réciproque par la représentation conforme. Il apparaîtra donc des intervalles très petits du cercle sur lesquels  $|\Phi'_c|$  sera très grand et ces intervalles joueront un rôle non négligeable dans le calcul de  $\beta$  pour des valeurs "grandes" de  $t$ , ce qui rentrera en conflit avec la méthode d'intégration choisie... mais n'anticipons pas.

Nous remercions A. Douady, F. James, P. Sentenac et A. Volberg pour les discussions fructueuses que nous avons eues avec eux. Nous remercions en outre F. Bouchut pour son aide précieuse lors de la vectorisation des programmes et de leur implantation sur Cray.

## 2. Etude numérique

(a) *Description de l'algorithme.* Le paragraphe précédent nous ouvre la voie vers le calcul numérique de la dimension de Hausdorff dans le cas hyperbolique : utilisant la formule de Bowen, cela revient au calcul de la pression, qui est la limite d'une suite. Le terme général de cette suite dépend du choix dans chaque cylindre d'un élément distingué; or on remarque qu'un changement de ce choix provoque une différence de l'ordre de  $O(1/n)$  dans la valeur du terme de la suite. Par la nature même des choses, on ne peut donc espérer une vitesse de convergence supérieure à  $O(1/n)$ . Si l'on veut au bout du compte une erreur sur la dimension de l'ordre de 0,1%, il nous faut aller jusqu'à  $n = 1000$ ; cela nous fait alors calculer une somme de  $2^{1000}$ , ce qui est gigantesque.

Pour contourner cette difficulté, on regarde comme au paragraphe précédent le terme d'ordre  $n$  comme une intégrale que l'on calcule par la méthode de Monte-Carlo. Mais soyons plus précis : tout d'abord on observe que

$$\log |P'_c(z)| = \log 2 + \log |z|.$$

On en déduit que

$$\exp(-tS_n(\log |P'_c|)(x_1 \dots x_n)) = 2^{-nt} \exp(-tS_n(\log |z|)(x_1 \dots x_n)),$$

puis que

$$\begin{aligned} & \frac{\log(\sum_{x_1 \dots x_n} \exp(-tS_n(\log |P'_c|)(x_1 \dots x_n)))}{n} \\ &= (1-t) \log 2 + \frac{\log(2^{-n} \sum \exp(-tS_n(\log |z|)))}{n}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme dans le membre de droite n'est autre que l'approximation à l'ordre  $n$  de  $\beta(t)$  du paragraphe précédent. La méthode consiste à remplacer la moyenne figurant à l'intérieur du log par une moyenne sur un

certain nombre de termes pris au hasard. Choisir un terme au hasard, c'est choisir au hasard un cylindre : pour procéder à un tel choix on fixe au départ un élément de l'ensemble de Julia, soit par exemple  $z_0$  où  $-z_0$  est un point fixe répulsif de  $P_c$ ; on choisit alors au hasard une des deux solutions de  $P_c(z_1) = z_0$ , on fait de même avec  $z_1$  et ainsi de suite jusqu'à obtenir  $z_n$  élément de notre cylindre aléatoire. On détermine alors

$$\exp(-tS_n(\log |z|)(x_1 \dots x_n)) = \prod_{j=1}^n |z_j|^{-t}.$$

Le problème de cette méthode est encore sa lenteur; on vérifie expérimentalement que pour arriver à des résultats stables il faut faire un choix d'environ  $10^6$  cylindres aléatoires pour une taille de cylindre  $n = 100$ , ce qui est trop long.

L'idée pour accélérer la méthode nous a été soufflée par la lecture de [2], et plus précisément la méthode dite du shift : elle consiste simplement à déterminer disons  $N$  itérées inverses de  $z_0$  et de considérer les cylindres  $z_N z_{N-1} \dots z_{N-n+1}$ ,  $z_{N-1} z_{N-2} \dots z_{N-1-n+1}$ ,  $\dots$ ,  $z_n \dots z_1$ .

Pour un nombre d'opérations de l'ordre de  $N$  on obtient de l'ordre de  $N$  cylindres contre  $N/n$  avec la méthode de Monte-Carlo. Si l'on prend  $n = 100$ , on multiplie donc par 100 la vitesse de l'algorithme; de plus, chaque cylindre est obtenu par un décalage du précédent, ce qui nous assure que les cylindres choisis se répartissent uniformément sur  $J_c$ . On peut d'ailleurs se convaincre facilement que cette méthode revient à appliquer le théorème ergodique pour calculer l'intégrale  $\beta(t)$  (le décalage étant  $z \mapsto z^2$  sur le cercle).

#### (b) Résultats numériques

(i) L'algorithme reste très lent et son défaut réside dans l'impossibilité d'estimer l'erreur commise. Une première série d'expériences a donc consisté à confronter les résultats du calcul avec ce qui était connu.

Tout d'abord Lucy Garnett [7] a déjà effectué des expériences numériques par des méthodes différentes. La figure 1 en présente l'un des calculs effectué avec notre méthode (taille cylindre 100 et 30000 itérations). La lecture de [7] convaincra le lecteur de la coïncidence des résultats. Ensuite on a déjà mentionné que  $d(0) = 1$  et que  $d$  est réelle-analytique dans la cardioïde principale : Ruelle a montré en utilisant le formalisme thermodynamique que le développement limité à l'ordre 2 de  $d(c)$  en 0 est

$$d(c) = 1 + \frac{|c|^2}{4 \log 2} + o(|c|^2).$$

Là encore, pour  $|c| < 0.02$ , la coïncidence est excellente (voir tableau 1 et figure 2).

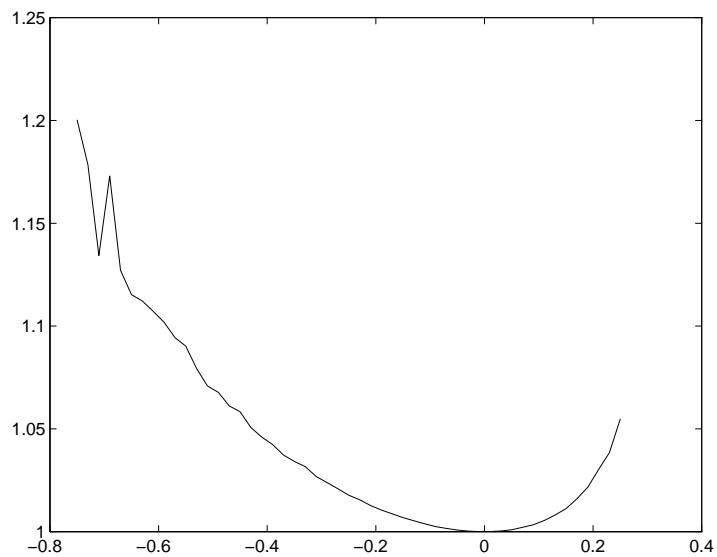


Fig. 1

Tableau 1

$c$	$d(c)$ calculé	$1 +  c ^2 / (4 \log 2)$
-0.06	1.001141	1.0013
-0.05	1.000783	1.0009
+0.02	1.000120	1.0001
+0.04	1.000639	1.0006
+0.05	1.001007	1.0009

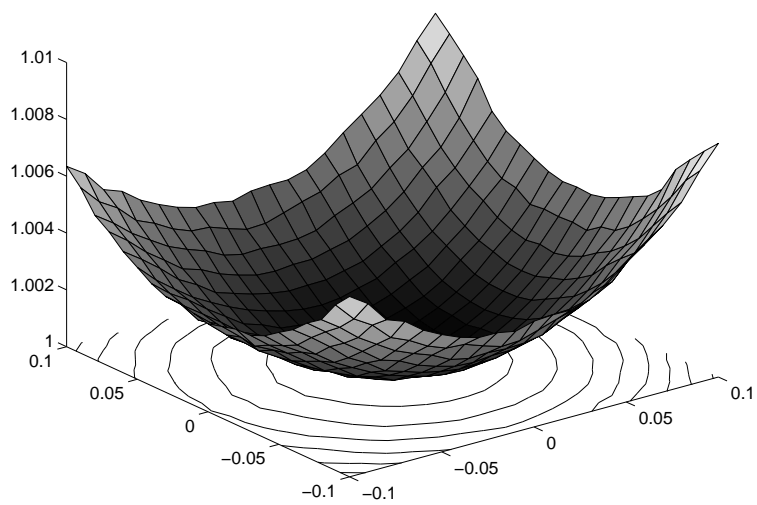


Fig. 2

De même, pour les valeurs de  $c$  réelles négatives très grandes,  $J_c$  se comporte comme un Cantor autosimilaire de rapport de similitude  $\sim (-4c)^{1/2}$ , ce qui prouve que

$$d(c) \sim \frac{\log 2}{\log 2 + \frac{\log(-c)}{2}},$$

équivalence très bien vérifiée numériquement (tableau 2).

**Tableau 2**

$c$	$d(c)$ calculé	$(\log 2)/(\log 2 + \log(-c)/2)$
-20	0.31854	0.31635
-30	0.29073	0.28956
-40	0.27392	0.27315

(ii) Notre méthode permet de faire des calculs pour toutes les valeurs de  $c$  hyperboliques (ou paraboliques, voir prochain paragraphe). La figure 3 montre un “balayage” du rectangle  $[-2, 1] \times [0, 1]$  (taille cylindre 100 et 20000 itérations), qui fait bien ressortir la forme de l’ensemble de Mandelbrot et surtout la cardioïde principale.

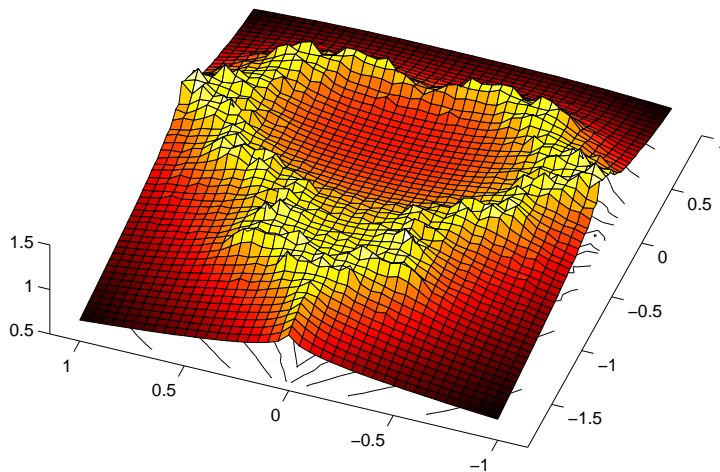


Fig. 3

Nous avons tenté d’obtenir une précision analogue pour la composante  $\{|z + 1| < 1/4\}$  avec une taille des cylindres égale à 100 et 50000 itérations; le résultat est présenté à la figure 4. Cette figure illustre les limites de notre méthode. Il est clair que pour obtenir une précision de l’ordre de quelques % sur la dimension dans cette région de l’espace du paramètre il faudrait

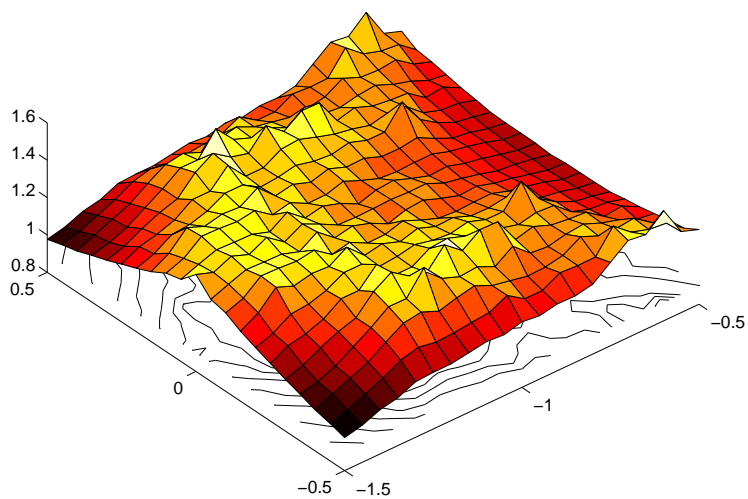


Fig. 4

augmenter la taille des cylindres de 100 à 1000. Cette augmentation demanderait d'accroître le nombre  $N$  d'itérations dans des proportions telles que les calculs deviendraient infaisables sur une machine de puissance moyenne.

(iii) L'observation des résultats numériques suggère que la fonction  $d$  est continue sur l'axe réel au point  $-3/4$  (figures 1, 5, 6). La figure 7 présente

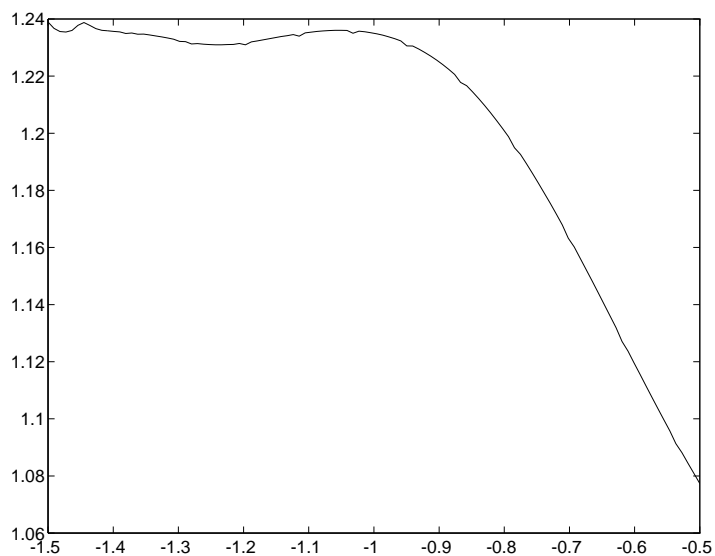


Fig. 5



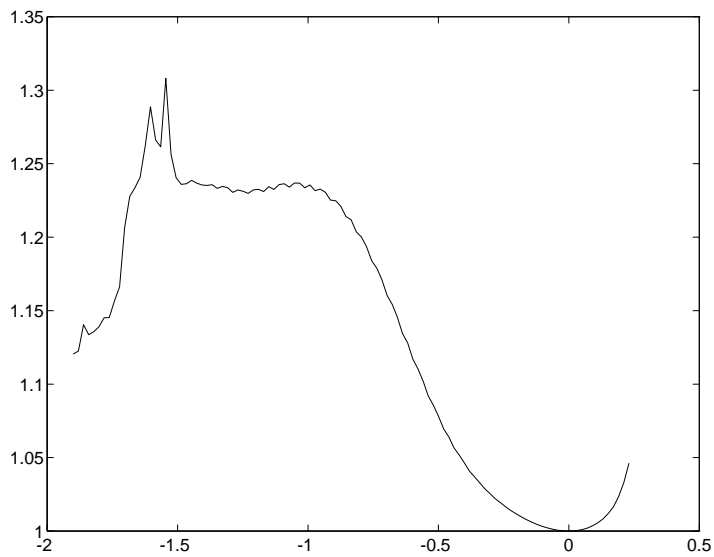


Fig. 6

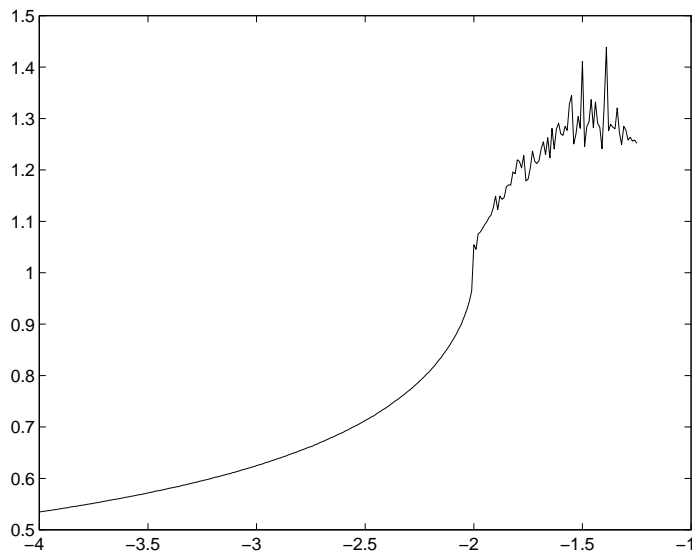


Fig. 7

d'autres calculs sur l'axe réel. A la lecture de [1], il semble naturel de conjecturer que  $d(c) > 2p/(p+1)$  pour les valeurs de  $c$  pour lesquelles  $P_c$  admet un point fixe indifférent rationnel et  $J_c$   $p$  pétales autour de ce point fixe. Les valeurs obtenues semblent largement infirmer cette conjecture (en

$-3/4$ , le calcul donne  $d \sim 1.18$  contre  $d > 4/3$  conjecturé). Ces observations nous ont incité à étudier de façon approfondie la continuité de  $d$  aux points “paraboliques”, ce qui est l’objet du paragraphe suivant.

### 3. Le cas parabolique

(a) Lorsque, de l’intérieur de la cardioïde principale, on s’approche non tangentiellement de certains points du bord, on perd l’hyperbolicité mais on garde une forme d’expansivité suffisante pour avoir un formalisme thermodynamique et obtenir des résultats de continuité.

Nous résumons dans ce sous-paragraphe les résultats dont nous aurons besoin dans la suite. Ils sont dus à Aaronson, Denker et Urbański [1], [4], [5].

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et  $T$  une application continue surjective de  $X$  sur  $X$ . On dit que  $T$  est *expansive* sur  $X$  si

$$\exists \beta > 0 \forall x \neq y \in X \exists n > 0 : d(T^n x, T^n y) > \beta.$$

Une fraction rationnelle est expansive sur son ensemble de Julia si et seulement si celui-ci ne contient pas de point critique. De plus, l’action de la fraction rationnelle est expansive non hyperbolique si et seulement si l’ensemble de Julia contient un cycle indifférent rationnel.

La notion essentielle pour l’étude de la dimension est celle de mesure conforme. Une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $J_c$  est dite *conforme* si pour tout borélien  $A$  de  $J_c$  sur lequel  $P_c$  est injectif on a

$$\mu(P_c(A)) = \int_A |P'_c|^t d\mu.$$

Le lien entre cette notion et le formalisme thermodynamique est donné par la proposition suivante :

PROPOSITION. *La mesure  $\mu$  est  $t$ -conforme si et seulement si  $\mathcal{L}_{-t\varphi}^*(\mu) = \mu$ , où  $\varphi = \log |P'_c|$ .*

Pour le confort du lecteur, donnons une preuve de cette proposition très simple. On remarque tout d’abord que pour  $A$  borélien sur lequel  $P_c$  est injectif on a

$$\mathcal{L}_{-t\varphi}(1_A e^{t\varphi})(x) = \sum_{y \in P_c^{-1}(x)} 1_A(y) = 1_{P_c(A)}(x).$$

Remarquons que l’opérateur de Ruelle n’a pas été défini pour les fonctions boréliennes bornées mais il est clair que la définition s’étend à ces fonctions. De plus, des arguments standards de la théorie de la mesure permettent d’étendre à cette classe la formule

$$\int b d(\mathcal{L}_\varphi^* \mu) = \int \mathcal{L}_\varphi(b) d\mu.$$

Alors  $\mathcal{L}_{-t\varphi}^*(\mu) = \mu$  et donc  $\int 1_A e^{t\varphi} d\mu = \int \mathcal{L}_{-t\varphi}(1_A e^{t\varphi}) d\mu = \int_{P_c(A)} d\mu$ , ce qu'il fallait démontrer. Réciproquement, la  $t$ -conformité implique que pour tout  $A$  sur lequel  $P_c$  est injectif on a

$$\int_A |P'_c|^t d(\mathcal{L}_{-t\varphi}^* \mu) = \int_A |P'_c|^t d\mu$$

et donc que  $\mathcal{L}_{-t\varphi}^*(\mu) = \mu$  car  $|P'_c| \sim 1$  sur  $J_c$ .

La proposition implique aussitôt que si  $P_c$  est hyperbolique,  $d(c)$  est l'unique réel  $t$  pour lequel il existe une mesure  $t$ -conforme et de plus cette mesure est unique (c'est la mesure de Hausdorff normalisée). Cela découle du théorème de Perron–Frobenius–Ruelle et du fait que le rayon spectral de l'opérateur  $\mathcal{L}_{-t\varphi}$  est  $P(-t\varphi)$ . Soit en effet  $\beta$  le rayon spectral de l'opérateur  $\mathcal{L}_{-t\varphi}$ ; par le théorème de Perron–Frobenius–Ruelle pour toute fonction  $v$  hölderienne sur  $J_c$ , la suite  $v_n = \beta^{-n} \mathcal{L}_{-t\varphi}^n(v)$  converge uniformément vers  $(\int v d\nu)h$ , où  $\nu$  est l'unique mesure de probabilité telle que  $\mathcal{L}_{-t\varphi}^*(\nu) = \beta\nu$  et  $h$  l'unique fonction hölderienne telle que  $\int h d\nu = 1$ ,  $\mathcal{L}_{-t\varphi}(h) = \beta h$ . Mais  $\int v_n d\mu = \beta^{-n} \int v d\mu$  et donc nécessairement  $\beta = 1$  car  $\int h d\mu \neq 0$  (faire  $v \equiv 1$ ) et  $\mu = \nu$ .

On suppose à présent que  $P_c$  est expansif non hyperbolique sur son ensemble de Julia et on désigne par  $\Omega$  l'ensemble des points de  $J_c$  faisant partie d'un cycle indifférent rationnel. L'expansivité implique que l'on peut définir comme dans le cas hyperbolique la notion de pression.

Soit  $\pi(t) = P(-t \log |P'_c|)$ . Nous admettrons les propriétés suivantes de cette fonction :

- (1)  $\pi$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
- (2)  $\pi(t) > 0$  si  $t < d(c)$  et  $\pi(t) = 0$  si  $t \geq d(c)$ .
- (3) Il existe une mesure  $t$ -conforme ssi  $t \geq d(c)$ .
- (4) Si  $t > d(c)$  toute mesure  $t$ -conforme est atomique portée par  $\bigcup_{n \geq 0} P_c^{-n}(\Omega)$ .
- (5) Il existe une unique mesure  $d(c)$ -conforme et elle est non atomique (diffuse).

La condition (2) signifie du point de vue thermodynamique qu'il y a "transition de phase" au point  $t = d(c)$ . Ce phénomène est relié au phénomène de crowding déjà mentionné. Ces grandes valeurs de  $|\Phi'_c|$  ne "comptent" pour l'intégrale  $\int |\Phi'_c|^t$  que si  $t \geq d(c)$  car l'ensemble sur lequel ces valeurs sont prises est très petit.

Notons enfin pour conclure ce survol que l'idée à la base du paragraphe suivant est très similaire à celle permettant de montrer (5) [1].

(b) *Continuité de  $d$  sur l'axe réel en  $1/4 - 0$ .* Il faut tout d'abord mentionner l'important résultat de Shishikura [11] : la fonction  $d$  est discontinue

en tout point de  $\partial M$  ou elle est strictement plus petite que 2. Pour montrer cela il prouve que  $d = 2$  sur un sous-ensemble dense de  $\partial M$ . Dans ce qui suit notre approche sera différente puisque nous approcherons un point de  $\partial M$  par l'intérieur de  $M$ .

Nous nous proposons de démontrer dans ce paragraphe le

**THÉORÈME 1.** *La fonction  $d$  restreinte à l'axe réel est continue à gauche en  $1/4$ .*

Il suffit de montrer que si  $c_k$  est une suite convergeant en croissant vers  $1/4$  et telle que  $d(c_k)$  converge vers  $d$ , alors  $d = d(1/4)$ . Pour tout  $k \geq 0$ , on appelle  $m_k$  l'unique mesure conforme sur  $J_{c_k}$  et l'on considère cette mesure comme une mesure de Radon sur le plan. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que la suite  $(m_k)$  converge faiblement vers une mesure de probabilité  $m$ .

**LEMME 1.** *La mesure  $m$  est une mesure  $d$ -conforme sur  $J_{1/4}$ .*

*Preuve.* Notons  $\varphi_k = -d(c_k) \log |P'_{c_k}|$ . Remarquons tout d'abord que le support de  $m_k$  ne rencontre jamais le disque ouvert de centre 0 et de rayon  $1/2$ . Alors  $\text{supp}(m) \cap D(0, 1/2) = \emptyset$  et si l'on désigne par  $\psi$  une fonction de classe  $C^\infty$  qui vaut 1 en dehors de  $D(0, 1/2)$  et 0 sur  $D(0, 1/3)$ , on a  $m = \psi m$  et  $m_k = \psi m_k$ . Si  $b$  est une fonction continue à support compact sur  $\mathbb{C}$  on peut alors écrire  $\int b d(\mathcal{L}_\varphi^* m) = \int \mathcal{L}_\varphi(b) \psi dm$ . Mais si  $|x| > 1/3$  et  $P_c(y) = x$  alors  $|y| > 1/12$  et par conséquent  $\psi \mathcal{L}_\varphi(b)$  est limite uniforme sur  $\mathbb{C}$  de  $\psi \mathcal{L}_{\varphi_k}(b)$ ; de la convergence faible de  $(m_k)$  vers  $m$  et de la conformité de  $m_k$  on déduit alors que  $\mathcal{L}_\varphi^*(m) = m$ , et donc la conformité de  $m$  si l'on montre que le support de  $m$  est  $J_{1/4}$ .

Pour ce faire considérons un petit disque ouvert inclus dans la composante bornée de l'ensemble de Fatou de  $P_{1/4}$ . Alors  $m(P_{1/4}(A)) = \int_A |P'_{1/4}|^d dm \geq m(A)$  par ce qui précède, et par conséquent  $m(P_{1/4}^n(A)) \geq m(A)$  par récurrence. Mais  $P_{1/4}^n(A)$  converge uniformément vers  $1/2$ , et ceci tangentiellement au segment  $[0, 1/2]$ . Pour  $n$  assez grand on en déduit que  $m_k(P_{1/4}^n(A)) = 0$  pour tout  $k$  et finalement que  $m(A) = 0$  par la convergence faible. L'analogie pour  $A$  disque ouvert inclus dans le bassin de l'infini est similaire (plus simple même) et laissé au lecteur.

Pour prouver le théorème il suffit de montrer que la mesure  $m$  est non atomique ou encore, vu les résultats admis du (a), que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(D(1/2, \varepsilon)) = 0.$$

Si  $c \in ]0, 1/4[$ ,  $P_c$  a deux points fixes  $(1 \pm (1 - 4c)^{1/2})/2$  et  $z_c$ ; celui qui correspond au signe + est le point fixe répulsif.

LEMME 2. Il existe  $\varepsilon > 0$  et  $c_0 \in [0, 1/4[$  tels que pour  $c \geq c_0$  il existe sur  $D(1/2, \varepsilon)$  une branche holomorphe de  $P_c^{-1}$  fixant  $z_c$  et telle que

$$P_c^{-1}(J_c \cap D(1/2, \varepsilon)) \subset J_c \cap D(1/2, \varepsilon).$$

Preuve. On fait tout d'abord le changement de variable  $z \mapsto 1/2 + z$ ; le polynôme devient  $T_\alpha(z) = z + z^2 - \alpha$  avec  $\alpha = 1/4 - c$ . La branche de l'inverse dans ces coordonnées devient

$$T_\alpha^{-1}(z) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\alpha + z)}}{2},$$

soit  $T_\alpha^{-1}(z) = T_0^{-1}(z + \alpha)$ , qui est bien définie sur  $D(0, 1/8)$  si  $\alpha < 1/8$ .

Si  $0 < \theta < \pi/2$  soit  $\Gamma_\theta = \{re^{it} : r \geq 0, |t| < \theta\}$ .

LEMME 3. Pour  $\theta < \pi/2$  on peut trouver  $\delta > 0$  et  $\alpha_0 > 0$  tels que si  $\alpha < \alpha_0$  alors  $J_\alpha \cap D(0, \delta) \subset \Gamma_\theta$ .

Preuve. Il existe (voir [6] par exemple) un ensemble ouvert  $\mathcal{C}$  ayant la forme d'une cardioïde de point de rebroussement 0 et tel que  $T_0(\mathcal{C})$  soit strictement inclus dans  $\mathcal{C}$  : si  $\theta$  est choisi on peut trouver  $\delta > 0$  tel que  $D(0, \delta) \cap {}^c\Gamma_\theta \subset \mathcal{C}$ . Comme  $\partial(T_0(\mathcal{C})) \cap \partial(\mathcal{C}) = \{0\}$  et que  $T_0(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ , un simple argument de compacité montre l'existence de  $\alpha_0 > 0$  tel que  $\alpha < \alpha_0 \Rightarrow T_0(\mathcal{C}) - \alpha \subset \mathcal{C}$ , ce qui implique que  $T_\alpha(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$  et par suite le lemme 3.

Revenons à la preuve du lemme 2. Par le lemme 3, il suffit de montrer que pour un  $\theta$  il existe  $\alpha_1, \delta_1 > 0$  tels que  $T_\alpha^{-1}(D(0, \delta) \cap \Gamma_\theta) \subset D(0, \delta)$  si  $\alpha < \alpha_1$  et  $\delta < \delta_1$ . On observe tout d'abord que  $T_0^{-1}(z) = z - z^2 + O(z^3)$  et donc qu'il existe des constantes  $C, \delta > 0$  telle que si  $z \in \Gamma_\theta \cap D(0, \delta)$ , alors

$$|T_0^{-1}(z)| \leq |z - z^2| + C|z|^3 \leq r(1 - r \cos \theta + (C + 1)r^2) \quad (z = re^{it}).$$

On en déduit que si  $\alpha$  est assez petit et si  $z \in \Gamma_\theta$  est lui aussi suffisamment petit, alors

$$|T_\alpha^{-1}(z)| \leq |z + \alpha|(1 - |z + \alpha| \cos \theta + (C + 1)|z + \alpha|^2).$$

Mais

$$\sqrt{\cos \theta}(r + \alpha) \leq |z + \alpha| \leq r + \alpha$$

et par conséquent, pour  $z, \alpha$  assez petits,  $z \in \Gamma_\theta$ ,

$$|T_\alpha^{-1}(z)| \leq (r + \alpha)(1 - (\cos \theta)^{3/2}(r + \alpha) + (C + 1)(r + \alpha)^2) = \varphi(r + \alpha).$$

Fixons maintenant  $\theta$  tel que  $a_\theta = (\cos \theta)^{3/2} > 1/2$ . Comme  $\varphi(x) = x - a_\theta x^2 + (C + 1)x^3$  on peut trouver  $\delta$  tel que  $\varphi(x) < x$  si  $0 < x < \delta$ . Alors  $|T_\alpha^{-1}(z)| < \delta$  si  $|z| < \delta - \alpha$ . Si maintenant  $|z| \geq \delta - \alpha$  on peut écrire, si l'on suppose  $2\alpha < \delta$ ,

$$\varphi(r + \alpha) \leq r + \alpha - a_\theta r^2 + 8(C + 1)r^3.$$

On choisit alors  $\delta$  suffisamment petit pour que  $a_\theta r^2 - 8(C+1)r^3 \geq r^2/2$  si  $r < \delta$  et  $\alpha < \delta^2/10$ ; on a alors, si  $r \geq \delta - \alpha$ ,

$$\varphi(r + \alpha) \leq r + \frac{\delta^2}{10} - \frac{(\delta - \delta^2/10)^2}{2} \leq r$$

si  $\delta$  est assez petit.

On revient à présent à la variable initiale. Soit  $z_0 \in D(1/2, \delta) \cap J_c$  ( $\delta$  et  $c$  sont choisis pour que les conclusions des lemmes précédents aient lieu). On peut alors définir la suite  $z_n = P_c^{-n}(z_0)$  et elle converge vers  $z_c$ . Posons  $t_n = z_n - z_c$ ; on veut estimer la vitesse de convergence de  $t_n$  vers 0. On a

$$t_{n+1} = -z_c + \sqrt{z_c^2 + t_n}$$

et donc le développement

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{2z_c} - \frac{t_n^2}{8z_c^3} + O(t_n^3).$$

Comme  $1/(2z_c) > 1$  on déduit de ce dernier développement que  $|t_n| \leq C(2z_c)^{-n}$ . On pose alors  $u_n = (2z_c)^n t_n$  et le développement précédent implique que

$$|u_n - u_{n+1}| \geq ce^{-n\beta} |u_n|^2,$$

où l'on a posé  $2z_c = e^\beta$ .

**LEMME 4.** *Il existe une constante  $C > 1$  telle que si  $c$  est suffisamment proche de  $1/4$  et si  $\delta$  est assez petit on ait, pour tout  $n \geq 1$ ,  $|u_n - u_{n+1}| \leq C(|u_n| - |u_{n+1}|)$ .*

*Preuve.* Soit  $\varepsilon$  une petite constante qui sera déterminée plus tard. On choisit tout d'abord  $\delta$ ,  $c_0$  de sorte que le lemme 3 ait lieu avec  $\theta = \varepsilon/10$ . Pour démontrer le lemme 4 il suffit de montrer que

$$\left| \operatorname{Arg} \left( \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n} \right) \right| \leq \frac{\pi}{6}$$

pour tout  $n \geq 1$ . Mais  $(u_n - u_{n+1})/u_n = at_n + o(t_n)$  et il suffit d'ajuster les constantes pour que  $|\operatorname{Arg}(t_n)| \leq \pi/12$  pour tout  $n$ . Si  $|t_n| \geq \varepsilon(1 - e^{-\beta})$  on observe que  $|\operatorname{Arg}(t_n)| \leq C|\operatorname{Arg}(z_n - 1/2)| \leq C\varepsilon/10 \leq \pi/24$  pour un choix correct de  $\varepsilon$ . Si au contraire  $n_0$  est le premier entier tel que  $|t_{n_0}| < \varepsilon(1 - e^{-\beta})$  on remarque tout d'abord que cette propriété va rester vraie pour  $n \geq n_0$  et que, pour  $n \geq n_0$ ,  $|t_{n+1}/t_n| \leq e^{-\beta/2}$  du moins si  $\varepsilon$  est assez petit et par conséquent  $|t_n| \leq |t_{n_0}|e^{-(n-n_0)\beta/2}$ ,  $n \geq n_0$ ; comme par ailleurs  $t_{n+1}/t_n = e^{-\beta}(1 - bt_n + o(t_n))$  on en déduit que

$$|\operatorname{Arg}(t_n) - \operatorname{Arg}(t_{n_0})| \leq b|t_{n_0}| \sum_{n_0}^n e^{-(k-n_0)\beta/2} \leq C\varepsilon \frac{1 - e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta/2}} \leq C\varepsilon,$$

d'où l'on déduit facilement le lemme.

On pose  $x_n = |u_n|$ ; en considérant

$$\sum_{k=0}^n \frac{x_k - x_{k+1}}{x_k^2}$$

comme une somme de Riemann pour la fonction  $1/x^2$  il vient

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_0} \geq c \sum_{k=0}^n e^{-\beta k},$$

ce qui implique que

$$|t_n| \leq C \frac{e^{-n\beta}}{1 + (1 - e^{-n\beta})/\beta}.$$

LEMME 5. *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n$ ,  $|t_n| \leq C/n$ .*

Preuve. Fixons-nous une constante  $\varepsilon$  positive très petite.

- Si  $n\beta \leq \varepsilon$ , alors  $1 - e^{-n\beta} \geq cn\beta$  et donc  $|t_n| \leq C/(1 + n)$ .
- Si  $n\beta > \varepsilon$ , alors  $|t_n| \leq C(\varepsilon)\beta e^{-n\beta} \leq C(\varepsilon)n\beta e^{-n\beta}/n \leq C(\varepsilon)/n$ .

COROLLAIRE. *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n$ ,*

$$|(P_c^{-n})'(z_0)| \leq C/n^2.$$

Preuve. Par le théorème de distorsion de Koebe

$$|(P_c^{-n})'(z_0)| \leq C|t_n - t_{n+1}|$$

et

$$t_n - t_{n+1} = t_n(1 - e^{-\beta}) + O(t_n^2) \Rightarrow |t_n - t_{n+1}| \leq \frac{C\beta e^{-n\beta}}{1 + (1 - e^{-n\beta})/\beta} + C|t_n|^2.$$

Là encore on sépare deux cas pour conclure :

- Si  $n\beta < \varepsilon$ , alors  $|t_n - t_{n+1}| \leq C\beta/n \leq C\varepsilon/n^2$ ,
- Si  $n\beta \geq \varepsilon$ , alors  $|t_n - t_{n+1}| \leq C\beta^2 e^{-n\beta} + C/n^2 \leq C(\varepsilon)/n^2$ .

Fin de la démonstration du théorème 1. On fixe  $\delta$  assez petit et l'on pose  $A = \sup\{|P_c'(z)| : c \in [0, 1/4], z \in J_c\}$ . Soit  $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : \delta/(2A) \leq |z - 1/2| \leq \delta/2\}$  et  $K$  l'adhérence de  $\bigcup_{c \geq c_0} J_c \cap \mathcal{R}$ . Soit  $r > 0$  très petit; on va estimer  $m_k(D(1/2, r))$ . On a

$$D(1/2, r) \cap J_{c_k} \subset \{1/2\} \cup \bigcup_{n \geq n_k(r)} P_{c_k}^{-n}(K),$$

où  $n_{c_k}(x)$  est le plus petit entier  $n$  tel que  $P_{c_k}^n(x) \notin D(1/2, \delta/(2A))$  et  $n_k(r) = \inf\{n_{c_k}(x) : x \in D(1/2, r)\}$ , ce qui implique que

$$|P_{c_k}^{n_{c_k}}(x) - P_{c_k}^{n_{c_k}}(1/2)| \leq A|P_{c_k}^{n_k-1}(x) - 1/2| \leq \delta/2 \Rightarrow x \in K.$$

Donc  $D(1/2, r) \subset \bigcup_{n \geq n_k(r)} P_c^{-n}(K)$ . Par la conformité,

$$\begin{aligned} m_{c_k}(K) &= m_{c_k}(P_{c_k}^n(P_{c_k}^{-n}(K))) = \int_{P_{c_k}^{-n}(K)} |P_{c_k}'|^n dm_k \\ &\sim |t_n - t_{n+1}|^{-d_k} m_k(P_{c_k}^{-n}(K)) \end{aligned}$$

et par suite,  $m_k(P_{c_k}^{-n}(K)) \leq C/n^2$ .

On déduit de tout cela que  $m_k(D(1/2, r)) \leq C/n_k(r)$  et donc le résultat car on vérifie facilement que  $n_k(r) \geq C \log(\delta/r) \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$ .

**4. Conclusion.** Les résultats de ce travail sont partiels. Il reste à faire l'étude du paragraphe 3 pour tous les points paraboliques de la cardioïde. Un problème intéressant serait aussi d'étudier la continuité à droite en  $1/4$ . En ce point A. Douady a mis en évidence un phénomène de discontinuité de l'ensemble de Julia pour la métrique de Hausdorff.

La méthode présentée est tout à fait générale et pourrait s'adapter à tout autre système dynamique hyperbolique.

Numériquement il serait intéressant d'effectuer les calculs sur une machine beaucoup plus puissante (ce travail est en cours) pour pouvoir par exemple étudier ce qui se passe à droite en  $1/4$ . Cela est impossible sur une machine de puissance moyenne.

Les résultats sont encourageants et ont apporté un progrès par rapport aux algorithmes de calcul de dimension de Hausdorff existants. Il n'est cependant pas utopique de penser qu'on peut encore optimiser l'algorithme pour arriver à de meilleures précisions pour un temps de calcul moindre.

#### Références

- [1] J. Aaronson, M. Denker and M. Urbański, *Ergodic theory for Markov fibered systems and parabolic rational maps*, Trans. Amer. Math. Soc. 337 (1993), 495–548.
- [2] N. Bouleau and D. Lépingle, *Numerical Methods for Stochastic Processes*, Wiley, 1994.
- [3] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. 470, Springer, 1975.
- [4] M. Denker and M. Urbański, *Hausdorff and conformal measures on Julia sets with a rationally indifferent fixed point*, J. London Math. Soc. (2) 43 (1991), 107–118.
- [5] —, —, *Absolutely continuous invariant measures for expansive rational maps with rationally indifferent fixed points*, Forum Math. 3 (1991), 561–579.
- [6] A. Douady et J. Hubbard, *Etude dynamique des polynômes complexes I, II*, Publ. Math. d'Orsay 84–02, 85–04.
- [7] L. Garnett, *A computer algorithm for determining the Hausdorff dimension of certain fractals*, Math. Comp. 51 (1988), 291–300.



- [8] T. Ransford, *Variation of Hausdorff dimension of Julia sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems 13 (1993), 167–174.
- [9] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, tome IV, Academic Press, 1978.
- [10] D. Ruelle, *Repellers for real analytic maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems 2 (1982), 99–108.
- [11] M. Shishikura, *The boundary of the Mandelbrot set has Hausdorff dimension two*, in: Complex Analytic Methods in Dynamical Systems, Astérisque 222 (1994), 389–405.

MAPMO  
URA CNRS 1803  
Université d'Orléans  
BP 6759  
45067 Orléans Cedex 2, France  
E-mail: [obodart@lagrange.univ-orleans.fr](mailto:obodart@lagrange.univ-orleans.fr)  
Web: <http://galois.univ-orleans.fr/~obodart/>

*Received 26 June 1995;  
in revised form 4 April 1996*