Satz III. Ist f auf $\mathfrak{A}$ höchstens α-ter Klasse, so gibt es eine Funktion f^* (die auch unendliche Werte annehmen kann) höchstens $(\alpha+1)$-ter Klasse in $\mathfrak{X}$, welche auf $\mathfrak{A}$ mit f übereinstimmt.

Ich verdanke Herrn Sierpiński die freundliche Bemerkung, dass man aus dem Satze III auch folgendes Ergebnis erhalten kann:

Satz IV. Ist f auf $\mathfrak{A}$ eine endliche Funktion höchstens α-ter Klasse, so gibt es eine endliche Funktion φ höchstens $(\alpha+2)$-ter Klasse in $\mathfrak{X}$, welche auf $\mathfrak{A}$ mit f übereinstimmt.

Um eine solche Funktion φ zu bekommen, bezeichnen wir mit f^* eine dem Satze III genügende Funktion und setzen $\varphi(x) = f^*(x)$ für alle x, für die $f^*(x)$ endlich ist, sonst $\varphi(x) = 0$. Die so definierte Funktion φ genügt, wie man leicht sieht, dem Satze IV.

Über oberhalb-stetige Zerlegungen von Punktmengen in Kontinua.

Von

Witold Hurewicz (Amsterdam).

Zerlegt man die zweidimensionale Sphäre S_2 [1]) oberhalb-stetig [2]) in (echte) Teilkontinua [3]), welche S_2 *nicht zerschneiden*, so ist nach einem bemerkenswerten Theorem von M. R. L. Moore [4]) der durch diese Zerlegung bestimmte „Hyperraum" *mit S_2 homöomorph*. Daraus lässt sich folgern, dass allgemeiner bei einer oberhalb-stetigen Zerlegung einer *abgeschlossenen Teilmenge M* von S_2 in Kontinua, welche die ganze Sphäre nicht zerschneiden, der zugehörige Hyperraum selbst *mit einer Teilmenge von S_2 homöomorph* ist: die gegebene Zerlegung $\mathfrak{M}$ von M lässt sich nämlich zu einer oberhalb-stetigen Zerlegung der vollen S_2 erweitern, indem als Elemente dieser erweiterten Zerlegung erstens die Elemente der Zerlegung $\mathfrak{M}$ und zweitens die einzelnen Punkte der zu M komplementären Mengen $S_2 - M$ definiert werden.

Lässt man bei Zerlegungen Kontinua, welche S_2 *zerschneiden*. zu, so werden die beiden eben ausgesprochenen Behauptungen, wie schon die einfachsten Beispiele ergeben, hinfällig [5]). Es werden indessen bei oberhalb-stetigen Zerlegungen der abgeschlossenen Teilmengen von R_2 in *beliebige Teilkontinua* immer noch Räume von sehr spezieller topologischer Struktur erzeugt (wenn auch nicht notwendig

[1]) D. H. die durch unendlich fernen Punkt ergänzte Euklidische Ebene R_2.

[2]) Näheres über stetige und oberhalb stetige Zerlegungen findet man bei Kuratowski Fund. Math. 11, S. 169.

[3]) Das Wort Kontinuum wird in dieser Arbeit im weiteren Sinne gebraucht: Darunter werden abgeschlossene zusammenhängende Mengen (also *auch einzelne Punkte* verstanden).

[4]) Vgl. M. R. L. Moore, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), ferner Kuratowski, Fund. Math. 13, S. 307.

[5]) Man nehme z. B. auf S eine Kreislinie K und betrachte die Zerlegung von S_2 bei der als Elemente das Kontinuum K und die einzelnen Punkte des Komplements von K auftreten, so ist der Zerlegungsraum, wie man leicht sieht mit keiner Teilmenge von S_2 homöomorph.

Teilmengen von S_2). Insbesondere kommen unter diesen Hyperräumen, wie wir sogleich sehen werden, *nur eindimensionale und zweidimensionale Räume* vor, und es liessen sich noch weitere einschränkende Eigenschaften angeben, worauf wir in dieser Arbeit nicht eingehen wollen.

Ganz anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn wir in den Euklidischen R_3 hinaufsteigen. Durch oberhalb stetige Zerlegungen der abgeschlossenen Mengen des R_3 (und zwar sogar der eindimensionalen Mengen) in Kontinua lassen sich überhaupt *alle kompakten* (metrisierbaren) *Räume erzeugen*, also auch Räume von unendlich-hoher *Dimension*. Alle gestaltlichen Möglichkeiten können in R_3 durch passende Anordnung der Kontinua realisiert werden.

1. Wir beweisen zunächst das erste der oben angekündigten Ergebnisse: Wird die abgeschlossene Menge $M \subset S_2$ oberhalb stetig in Teilkontinua zerlegt, welche den Hyperraum $\mathfrak{A}$ ergeben, so ist

$$\dim \mathfrak{A} \leqq 2.$$

Wir machen die Annahme: $\dim \mathfrak{A} > 2$ und wollen dieselbe zum Widerspruch führen. Nach einem Satz von Menger und von mir enthält jeder n-dimensionale kompakte Raum eine abgeschlossene n-stufig zusammenhängende Teilmenge [6]), in unserem Falle enthält also der Raum $\mathfrak{A}$ eine dreistufig zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{M}$. Sei N die Vereinigungsmenge aller Kontinua unserer Zerlegung, die in $\mathfrak{M}$ als Elemente vorkommen. Ist C irgend eines dieser Kontinua ($C \varepsilon \mathfrak{M}$), so fügen wir zu ihm jene der von ihm in S_2 bestimmten Komplementärgebiete, die keinen Punkt von N besitzen hinzu, wodurch wir ein neues Kontinuum $C^* \supset C$ erhalten, und man sieht leicht, dass zwischen den Kontinua C^* dieselben Stetigkeitsbeziehungen, wie zwischen den Kontinua C bestehen (Aus $C_0 = \limsup\limits_{n\to\infty} C_n$ folgt also $C_0^* = \limsup\limits_{n\to\infty} C_n^*$). Die Kontinua C^* liefern daher (als den Hyperraum der oberhalb-stetigen Zerlegung ihrer Vereinigungsmenge) einen zu $\mathfrak{M}$ homöomorphen und somit dreistufig zusammenhängenden Raum $\mathfrak{M}^*$. Ferner geht aus der Konstruktion der C^* hervor: Jedes der von einem bestimmten C^* erzeugten Komplementärgebiete enthält mindestens eines der Kontinua C^* in seinem Innern.

[6]) Vgl. Math. Ann. 100, S. 618. Ein kompakter Raum R (bzw. eine abgeschlossene Teilmenge eines konpakten Raumes) ist n-stufig zusammenhängend, wenn er nach Tilgung jeder $(n-2)$-dimensionalen Menge zusammenhängend bleibt.

Unter den Kontinua C^* muss mindestens eines vorkommen, das die Sphäre S_2 zerschneidet, denn sonst wäre $\mathfrak{M}^*$ nach dem Moore'schen Satze homöomorph mit einer Teilmenge der S_2, also sicher nicht dreistufig zusammenhängend. Angenommen, etwa das Kontinuum C_0^* zerschneide S_2: $S_2 - C_0^* = U + V$ (U, V, offen; $U \neq 0$, $V \neq 0$, $U \cdot V = 0$). Die von C_0^* verschiedenen Kontinua der Menge $\mathfrak{M}^*$ liegen entweder in U oder in V und nach dem oben bemerkten sind tatsächlich in jeder dieser beiden Mengen Kontinua aus $\mathfrak{M}^*$ vorhanden. Nach der Tilgung des Elementes C_0^* zerfällt somit die von den Kontinua C^* gebildete Menge $\mathfrak{M}^*$ in zwei nicht leere Teilmengen, von denen offenbar keine ein Häufungselement der anderen enthält. Die Menge $\mathfrak{M}^* - C_0^*$ ist also nicht zusammenhängend, während doch eine dreistufig-zusammenhängende (sogar eine zweistufig zusammenhängende) Menge nach Tilgung eines beliebigen Elements zusammenhängend bleibt. Widerspruch [6a])!

2. Wir untersuchen jetzt die Verhältnisse im R_3. Mit $S_{y,z}$ (y, z reelle Zahlen) bezeichnen wir die geradlinige Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $(1, y, 0)$ und $(0, 0, z)$. Sei N die im linearen Zahlenkontinuum $(0 \leqq x \leqq 1)$ definierte nirgends dichte Cantorsche Menge. Wir lassen die Zahlen y und z die Menge N durchlaufen und bilden die Summe:

$$M = \Sigma S_{y,z} \quad (y, z \,\epsilon\, N).$$

Man sieht one weiteres, dass M abgeschlossen und zusammenhängend, also, ein *Kontinuum* ist. Wir zeigen noch, dass M *eindimensional* (somit eine *Kurve*) ist. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit $S_{y,z}^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ die Teilstrecke von $S_{y,z}$ welche denselben Mittelpunkt besitzt und deren Länge $\frac{n-1}{n}$ der Länge von $S_{y,z}$ beträgt Setzen wir: $M^{(n)} = \Sigma S_{y,z}^{(n)}$ $(y, z \,\epsilon\, N)$. $M^{(n)}$ ist abgeschlossen und ihre Komponenten sind die Strecken $S_{y,z}^{(n)}$. Um das letztere einzusehen, nehmen wir zwei Strecken $S_{y,z}^{(n)}$ und $S_{y',z'}^{(n)}$, wo etwa $y \neq y'$. Zwischen y und y' wählen wir eine Zahl $\bar{y}$, die N *nicht* angehört. Die durch den Punkt $(1, \bar{y}, 0)$ und durch die Gerade $x = y = 0$ bestimmte Ebene E, ist, wie leicht ersichtlich zu $M^{(n)}$ fremd, und, da $S_{y,z}^{(n)}$ und $S_{y',z'}^{(n)}$ auf verschiedenen Seiten von E gelegen sind,

[6a]) Ein anderer Beweis wurde wir von Herrn Kuratowski mit geteilt und erschien während der Drucklegung dieser Arbeit in Band XIV der Fund. Math. (S. 143).

gehören sie zu verschiedenen Komponenten von $M^{(n)}$, woraus hervorgeht, dass die letzteren mit den Teilstrecken $S_{y,z}^{(n)}$ identisch sind. Nun stimmt aber bekanntlich die Dimension einer kompakten Menge mit der grössten unter den Dimensionen ihrer Komponenten überein [7]), und daraus folgt: dim $M^{(n)} = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Es gilt offenbar

$$M = N^{(1)} + N^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} M^{(n)},$$

wo die Menge $N^{(1)}$ (bzw. $N^{(2)}$) aus den Punkten $(1, y, 0)$ $(y \epsilon N)$ (bzw. $(0, 0, z)$ $(z \epsilon N)$) gebildet ist. In dieser Zerlegung von M sind alle Summanden abgeschlossen; ferner sind die ersten zwei von ihnen nulldimensional, alle übrigen eindimensional, also ist nach dem „Summensatz" der Dimensionstheorie auch M eindimensional.

Wir behaupten jetzt: *Zu jedem kompakten Raum R gibt es eine Teilmenge M_R der Kurve M und eine oberhalb stetige Zerlegung von M_R in Kontinua, welche einen mit R homöomorphen Hyperraum liefert.*

Bekanntlich ist es bei jedem vorgegebenen kompakten Raum R möglich die Cantorsche Menge N eindeutig und stetig auf R abzubilden [8]). Wir denken uns eine derartige Abbildung f zwischen N und R hergestellt. Für einen Punkt p von R sei N_p die Menge der Punkte von N, die ihn als Bild haben. Für jedes $p \epsilon R$ setzen wir:

$$M_p = \Sigma\, S_{y,z} \quad (y, z \epsilon N_p)$$

M_p ist ein *Teilkontinuum* der Kurve M, und für $p \neq q$ ist $M_p \cdot M_q = 0$. Die Menge $M_R = \Sigma\, M_p$ (Summierung erstreckt über alle $p \epsilon R$) besteht aus allen Strecken $S_{y,z}$ mit $f(y) = f(z)$ und ist offenbar abgeschlossen. Die Kontinua M_p ergeben eine oberhalb stetige Zerlegung von M_R mit zu R homöomorphem Hyperraum womit die eben ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. Bemerken wir noch, dass für einen zusammenhängenden Raum R M_R notwendig ein *Kontinuum* ist wie aus einem allgemeinen Satze von Kuratowski hervorgeht [9]) [10]).

[7]) Vgl. Tumarkin, Amst. Proc. 28 (1925), S. 1000, wo der Satz zum ersten Mal ausgesprochen wurde. Er ist auch in dem sub [6]) zitierten Theorem enthalten.

[8]) Vgl. Hausdorff, Mengenlehre (1927), S. 197.

[9]) Kuratowski, Fund. Math. 11, S. 182 (Corollaire 1).

[10]) (Zusatz während der Korrektur). Dadurch ist u. a. gezeigt, dass jedes Kontinuum *stetiges Bild eines eindimensionalen Kontinuums* ist. Dasselbe Resultat hat durch eine ähnliche Konstruktion Mazurkiewicz erhalten und es auf dem im Semptember 1929 in Warschau abgehaltenen I Kongress der Mathematiker der slawischen Länder mitgeteilt.

On Functions Possessing Differentials.

By

Grace Chisholm Young (La Conversion, Switzerland).

Introduction.

The present paper is the outcome of a renewed effort to complete the solution of the problem, attacked by my husband in 1912 [1]), a subject to which we have returned from time to time, but without obtaining any result we thought worthy of publication, — and re-considered by Pollard in 1921 [2]), the problem namely of proving by the methods proper to the Theory of Functions of Two Real Variables, the fundamental theorem in the Theory of Functions of a Complex Variable (Goursat's Theorem), which asserts that the necessary and sufficient condition that w should be a analytic function of z is that $\frac{dw}{dz}$ should exist.

There is no difficulty in expressing this enunciation in terms of two real variables, and indeed, though first clearly brought out by Goursat, this was certainly in the mind of Riemann; the theorem is that

$$w = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

involving $i = \sqrt{-1}$, is expressible in the neighbourhood of a point (X, Y) in the form of a power series in $(x - X) + i(y - Y)$, if, and only if, the ratio

$$\Delta w / \Delta z = (u(X+h,\ Y+k) - u(X, Y) + \\ + i\, v(X+h,\ Y+k) - i\, v(X, Y)) / (h + ik)$$

[1]) W. H. Young. „On the Fundamental Theorem in the Theory of Functions of a Complex Variable", (1912), Proc. London M. S., Ser. 2, Vol. 10, pp. 1—6.

[2]) S. Pollard. „On the Conditions for Cauchy's Theorem", (1921), ibid. Vol. 21, pp. 456—482.