Pour établir cette généralisation du théorème il suffit de remarquer que cette classe $\boldsymbol{K}$ remplit elle-même les conditions (a)—(e) et d'appliquer ensuite le lemme 4, en y posant $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{K}$.

Pour terminer je veux mentionner que le résultat établi dans cette note présente une conséquence particulière de mes considérations antérieures concernant des fonctions additives définies dans les classes abstraites. J'ai publié les résultats principaux de ces recherches, d'ailleurs sans démonstrations, dans la communication: „*Les fonctions additives dans les classes abstraites et leur application au problème de la mesure*“ [1]); les démonstrations détaillées vont paraître dans un de volumes prochains des *Fundamenta Mathematicae*.

Remarque supplémentaire.

Pendant la correction des épreuves M. Kuratowski m'a attiré obligeamment l'attention au fait que le théorème principal de cette note se laisse déduire assez facilement d'un résultat de M. Ulam publié dans le volume précédent de ce journal [2]) (d'ailleurs l'implication inverse a aussi lieu). Il est à remarquer que cette implication ne concerne pas le lemme 4, qui est peut-être intéressant grâce à sa généralité et qui entraîne comme cas particulier non seulement le théorème principal, mais aussi sa généralisation proposée par M. Sierpiński et mentionnée dans le texte.

[1]) Comptes Rendus des Séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, année XXII (1929).

[2]) *Concernings functions of sets*, p, 231.

Über die Erweiterung einer Baireschen Funktion.

Von

Georg v. Alexits (Budapest).

§ 1. Sei $\mathfrak{R}$ ein metrischer Raum und $\mathfrak{M}$ eine Menge aus $\mathfrak{R}$. Ist die Funktion f auf $\mathfrak{M}$ eine Bairesche Funktion (höchstens) α-ter Klasse, so wird man fragen, ob sich f zu einer Funktion f^* erweitern lässt, welche in $\mathfrak{R}$ von (höchstens) α-ter Klasse ist und auf $\mathfrak{M}$ mit f übereinstimmt. Diese Frage wurde bisher für den Fall erledigt, dass $\mathfrak{M}$ höchstens eine Menge $G^{(\alpha)}$ [1]), oder allgemeiner, dass es ein $G^{(\alpha+1)}$ ist [2]). Hierbei bezeichnet $G^{(\alpha)}$ die Klasse jener Borelschen Mengen, welche als Durchschnitte von abzählbar unendlich vielen Borelschen Mengen geringerer als α-ter Ordnung erhalten werden. $G^{(1)}$ ist dabei die Klasse der abgeschlossenen Mengen.

Wenn man über $\mathfrak{M}$ überhaupt keine Voraussetzungen macht, so kann man eine solche Erweiterung für alle Bairesche Funktionen nicht ohne weiteres vornehmen. Nicht einmal so viel scheint bekannt zu sein, ob eine beliebige Funktion α-ter Klasse auf $\mathfrak{M}$ überhaupt zu irgend einer Baireschen Funktion in $\mathfrak{R}$ erweitert werden kann, wie auch $\mathfrak{M}$ beschaffen sei. Um so interessanter ist es, dass eine solche Erweiterung — wie wir es zeigen werden — für die Funktionen der Youngschen [3]) oder Sierpińskischen [4]) Klassen nebst Erhaltung der Klassifikation stets möglich ist. Hierbei wird unter Youngsche Klasse folgendes verstanden:

[1]) W. Hahn, Theorie der reellen Funktionen Bd. I (Berlin 1921), p. 356.

[2]) F. Hausdorff, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 292—309.

[3]) W. H. Young, London Proc. (2) 9 (1911) p. 15—24.

[4]) W. Sierpiński, Fund. Math. 2 (1921), p. 15—27. Vgl. auch St. Kempisty Fund. Math. 2 (1921), p. 64—73.

Die Funktionen erster Ordnung — die Klassen G_1 und g_1 — sind die unterhalb bzw. oberhalb stetigen Funktionen. Durch transfinite Induktion definiert man sodann G_α als die Gesammtheit der Grenzfunktionen aller monoton zunehmenden Folgen von Funktionen geringerer als α-ter Ordnung; ebenso bezeichnet g_α die Klasse der Grenzfunktionen monoton abnehmender Folgen.

Die Sierpińskische Klassifikation erhält man aus der bekannten Baireschen, wenn man die dort auftretenden konvergenten Reihen durch absolut konvergente Reihen ersetzt.

Da die Gesammtheit aller Funktionen, welche in die Youngsche oder Sierpińskische Klassifikation eingehen, mit der Menge aller Baireschen Funktionen identisch ist, nimmt unser Satz auch gegen die Frage der Erweiterung von Funktionen α-ter Klasse eine Stellung.

§ 2. Wir benötigen folgende Bezeichnungen: $\overline{\mathfrak{A}}$ ist die abgeschlossene Hülle der Menge $\mathfrak{A}$, also die Vereinigung von $\mathfrak{A}$ und der Menge ihrer Häufungspunkte. Ist $x \in \overline{\mathfrak{A}}$, so bilden wir zu jeder Folge $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ aus $\mathfrak{A}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ den Wert

$$\overline{f}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n).$$

Die obere Schranke aller $\overline{f}(x)$ bezeichnen wir mit $M(f, \mathfrak{A}, x)$. In derselben Weise definiert man $m(f, \mathfrak{A}, x)$ als untere Schranke aller

$$\underline{f}(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n).$$

$M(f, \mathfrak{A})$ bedeutet die obere Schranke der Funktion f auf der Menge $\mathfrak{A}$ und $m(f, \mathfrak{A})$ die untere Schranke. Jeder auf $\mathfrak{A}$ definierten Funktion f ordnen wir folgende in $\mathfrak{R}$ definierte Funktion zu (die auch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen kann):

$$(1) \qquad f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn } x \in \mathfrak{A}, \\ M(f, \mathfrak{A}, x), & \text{wenn } x \in \overline{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}, \\ m(f, \mathfrak{A}) & \text{wenn } x \in \mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}} \end{cases}\ [1]).$$

[1]) Vgl. C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen* I. Aufl. (Leipzig u. Berlin 1918), p. 413.

Hilfssatz I. *Ist f auf der Menge $\mathfrak{A}$ oberhalb stetig, so ist f^* oberhalb stetig in $\mathfrak{R}$.*

In der Tat ist, da f nach Annahme auf $\mathfrak{A}$ oberhalb stetig ist:

$$(2) \qquad f(x) = M(f, \mathfrak{A}, x) \qquad (x \in \mathfrak{A}).$$

Aus (1) und (2) folgt daher

$$f^*(x) = M(f, \mathfrak{A}, x) \qquad (x \in \overline{\mathfrak{A}}),$$

oder auch

$$(3) \qquad f^*(x) = M(f^*, \mathfrak{A}, x) \qquad (x \in \overline{\mathfrak{A}}).$$

Sei nun $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, eine Punktfolge aus $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, wobei $x \in \overline{\mathfrak{A}}$. Allerdings ist

$$(4) \qquad M(f^*, \mathfrak{A}, x) \geqq m(f, \mathfrak{A}) \qquad (x \in \overline{\mathfrak{A}})$$

und da nach der dritten Beziehung (1) auf $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}$ überall $f^*(x) = m(f, \mathfrak{A})$ ist, folgt nach (3) und (4):

$$(5) \qquad f^*(x) \geqq \lim_{n\to\infty} f^*(x_n) \qquad (x \in \overline{\mathfrak{A}}).$$

Die Beziehungen (3) und (5) ergeben zusammen

$$(6) \qquad f^*(x) = M(f^*, \mathfrak{R}, x) \qquad (x \in \overline{\mathfrak{A}}).$$

Da aber f^* nach (1) auf $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}$ eine Konstante und $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}$ eine offene Menge ist, besteht auch die Relation

$$(7) \qquad f^*(x) = M(f^*, \mathfrak{R}, x) \qquad (x \in \mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}).$$

Die Gleichungen (6) und (7) besagen, dass f^* im ganzen Raume $\mathfrak{R}$ oberhalb stetig ist, w. z. b. w.

In derselben Weise zeigt man die Richtigkeit der folgenden Behauptung:

Hilfssatz II. *Ist f unterhalb stetig auf $\mathfrak{A}$, so ist*

$$(8) \qquad f^{**}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in \mathfrak{A}) \\ m(f, \mathfrak{A}, x) & (x \in \overline{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}), \\ M(f, \mathfrak{A}) & (x \in \mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}) \end{cases}$$

unterhalb stetig in $\mathfrak{R}$.

§ 3. ***Satz I.*** *Ist f auf $\mathfrak{R}$ höchstens eine Youngsche Funktion α-ter Ordnung, so gibt es eine Funktion f^*, welche im ganzen Raume $\mathfrak{R}$ höchstens von α-ter Ordnung ist* [1]) *und auf $\mathfrak{A}$ mit f übereinstimmt.*

Sei zunächst $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ eine monoton zunehmende Folge von Funktionen, welche auf $\mathfrak{A}$ oberhalb stetig sind. Nach Hilfssatz I lässt sich durch

$$(9) \qquad f_n^*(x) = \begin{cases} f_n(x) & (x \in \mathfrak{A}), \\ M(f_n, \mathfrak{A}, x) & (x \in \overline{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}), \\ m(f_n, \mathfrak{A}) & (x \in \mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{A}}) \end{cases}$$

jede Funktion f_n zu einer in $\mathfrak{R}$ oberhalb stetigen Funktion erweitern. Da nach Annahme

$$(10) \qquad f_{n+1}(x) \geqq f_n(x),$$

ist offenbar auch

$$(11) \qquad M(f_{n+1}, \mathfrak{A}, x) \geqq M(f_n, \mathfrak{A}, x)$$

und

$$(12) \qquad m(f_{n+1}, \mathfrak{A}) \geqq m(f_n, \mathfrak{A}).$$

Aus (9), (10), (11) und (12) folgt

$$f_{n+1}^*(x) \geqq f_n^*(x)$$

für alle x aus $\mathfrak{R}$. Wir haben also bis jetzt folgendes Ergebnis erhalten:

Ist $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ eine monoton zunehmende Folge auf $\mathfrak{A}$ oberhalb stetiger Funktionen, so gibt es eine monoton zunehmende Folge $f_1^*, f_2^*, \dots f_n^*, \dots$ von Funktionen, die im ganzen Raume $\mathfrak{R}$ oberhalb stetig sind und auf $\mathfrak{A}$ die Beziehung

$$f_n^* = f_n$$

erfüllen. Eine ähnliche Behauptung ergibt sich aus Hilfssatz II für die monoton abnehmenden Folgen auf $\mathfrak{A}$ unterhalb stetiger Funktionen.

Nehmen wir die Richtigkeit dieser Behauptung — damit wir durch transfinite Induktion weiter schliessen können — für alle $\beta < \alpha$, also für alle monotonen Folgen von Funktionen, die auf $\mathfrak{A}$

[1]) Die Funktion f^* kann auch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen.

höchstens G_β oder g_β sind, an. Sei sodann $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$ eine monoton zunehmende Folge von Funktionen, welche auf $\mathfrak{A}$ alle höchstens g_α sind. Jedes f_n ist dann Grenzfunktion einer monoton abnehmenden Folge $f_{1,n}, f_{2,n}, \dots f_{\nu,n}, \dots$ von Funktionen, welche auf $\mathfrak{A}$ alle höchstens G_{β_ν} sind, mit $\beta_\nu < \alpha$. Nach Annahme gibt es dann eine monoton abnehmende Folge $f_{1,n}^*, f_{2,n}^*, \dots f_{\nu,n}^*, \dots$ mit $f_{\nu,n}^*(x) = f_{\nu,n}(x)$ für $x \in \mathfrak{A}$ und jedes $f_{\nu,n}^*$ ist höchstens ein G_{β_ν} im ganzen Raume $\mathfrak{R}$. Wegen $f_{n+1} \geqq f_n$ können wir ohne weiteres $f_{\nu,n+1} \geqq f_{\nu,n}$ annehmen, es ist aber auch keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn $f_{\nu,n+1}^* \geqq f_{\nu,n}^*$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ angenommen wird, denn aus $f_{\nu,n+1} \geqq f_{\nu,n}$ folgt — wie in (9), (10), (11) und (12) — unmittelbar $f_{\nu,n+1}^* \geqq f_{\nu,n}^*$. Wegen der Monotonie besitzt die Folge $f_{1,n}^*, f_{2,n}^*, \dots f_{\nu,n}^*$ eine Grenzfunktion f_n^* und wegen $f_{\nu,n+1}^* \geqq f_{\nu,n}^*$ ist auch

$$f_{n+1}^* \geqq f_n^*.$$

Ausser dieser Ungleichung besteht auch die Beziehung

$$f_n^* = f_n$$

auf $\mathfrak{A}$, da für $x \in \mathfrak{A}$ die Relation $f_{\nu,n}^*(x) = f_{\nu,n}(x)$ gilt. Damit haben wir gezeigt, dass unsere Aussage auch für die Ordnungszahl α richtig bleibt, wenn f_n ein g_α ist. Dasselbe zeigt man auch für ein G_α. In diesem Resultat ist aber die Behauptung des Satzes I schon enthalten, da jede Funktion f_n^* als Grenze einer monoton abnehmenden Folge, deren Glieder höchstens G_{β_ν} sind ($\beta_\nu < \alpha$), höchstens ein g_α ist.

Satz II. *Jede Sierpińskische Funktion f höchstens α-ter Ordnung auf $\mathfrak{A}$ kann zu einer Sierpińskischen Funktion höchstens α-ter Ordnung im ganzen Raume $\mathfrak{R}$ erweitert werden.*

Nach dem Satze I liegt der Beweis dieser Behauptung auf der Hand. Denn jede Sierpińskische Funktion höchstens α-ter Ordnung ist die Differenz zweier Funktionen höchstens g_α [1]).

§ 4. Eine Bairesche Funktion höchstens α-ter Klasse ist bekanntlich höchstens ein $g_{\alpha+1}$ [2]), aus Satz I folgt daher

[1]) A. a. O. [4]).

[2]) W. H. Young, (2) 12 (1913), p. 260—287, für metrische Räume W. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I., p. 345—349.

Satz III. Ist f auf $\mathfrak{A}$ höchstens α-ter Klasse, so gibt es eine Funktion f^* (die auch unendliche Werte annehmen kann) höchstens $(\alpha+1)$-ter Klasse in $\mathfrak{X}$, welche auf $\mathfrak{A}$ mit f übereinstimmt.

Ich verdanke Herrn Sierpiński die freundliche Bemerkung, dass man aus dem Satze III auch folgendes Ergebnis erhalten kann:

Satz IV. Ist f auf $\mathfrak{A}$ eine endliche Funktion höchstens α-ter Klasse, so gibt es eine endliche Funktion φ höchstens $(\alpha+2)$-ter Klasse in $\mathfrak{X}$, welche auf $\mathfrak{A}$ mit f übereinstimmt.

Um eine solche Funktion φ zu bekommen, bezeichnen wir mit f^* eine dem Satze III genügende Funktion und setzen $\varphi(x) = f^*(x)$ für alle x, für die $f^*(x)$ endlich ist, sonst $\varphi(x) = 0$. Die so definierte Funktion φ genügt, wie man leicht sieht, dem Satze IV.

Über oberhalb-stetige Zerlegungen von Punktmengen in Kontinua.

Von

Witold Hurewicz (Amsterdam).

Zerlegt man die zweidimensionale Sphäre S_2 [1]) oberhalb-stetig [2]) in (echte) Teilkontinua [3]), welche S_2 *nicht zerschneiden*, so ist nach einem bemerkenswerten Theorem von M. R. L. Moore [4]) der durch diese Zerlegung bestimmte „Hyperraum" *mit S_2 homöomorph.* Daraus lässt sich folgern, dass allgemeiner bei einer oberhalb-stetigen Zerlegung einer *abgeschlossenen Teilmenge M* von S_2 in Kontinua, welche die ganze Sphäre nicht zerschneiden, der zugehörige Hyperraum selbst *mit einer Teilmenge von S_2 homöomorph* ist: die gegebene Zerlegung $\mathfrak{M}$ von M lässt sich nämlich zu einer oberhalb-stetigen Zerlegung der vollen S_2 erweitern, indem als Elemente dieser erweiterten Zerlegung erstens die Elemente der Zerlegung $\mathfrak{M}$ und zweitens die einzelnen Punkte der zu M komplementären Mengen $S_2 - M$ definiert werden.

Lässt man bei Zerlegungen Kontinua, welche S_2 *zerschneiden*. zu, so werden die beiden eben ausgesprochenen Behauptungen, wie schon die einfachsten Beispiele ergeben, hinfällig [5]). Es werden indessen bei oberhalb-stetigen Zerlegungen der abgeschlossenen Teilmengen von R_2 in *beliebige Teilkontinua* immer noch Räume von sehr spezieller topologischer Struktur erzeugt (wenn auch nicht notwendig

[1]) D. H. die durch unendlich fernen Punkt ergänzte Euklidische Ebene R_2.

[2]) Näheres über stetige und oberhalb stetige Zerlegungen findet man bei Kuratowski Fund. Math. 11, S. 169.

[3]) Das Wort Kontinuum wird in dieser Arbeit im weiteren Sinne gebraucht: Darunter werden abgeschlossene zusammenhängende Mengen (also *auch einzelne Punkte* verstanden).

[4]) Vgl. M. R. L. Moore, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), ferner Kuratowski, Fund. Math. 13, S. 307.

[5]) Man nehme z. B. auf S eine Kreislinie K und betrachte die Zerlegung von S_2 bei der als Elemente das Kontinuum K und die einzelnen Punkte des Komplements von K auftreten, so ist der Zerlegungsraum, wie man leicht sieht mit keiner Teilmenge von S_2 homöomorph.