Une contribution à la théorie de la mesure.

Par

Alfred Tarski (Warszawa).

M. Banach a posé le problème suivant, qui présente une généralisation du problème de la mesure[1]): étant donné un ensemble infini E, existe-il une fonction $m(X)$ qui fait correspondre à chaque sous-ensemble X de E un nombre réel de façon que (1) $m(X)$ est additive au sens complet, (2) $m(X)$ s'annulle pour tout sous-ensemble X de E composé d'un seul élément, (3) $m(X)$ n'est pas identiquement nulle?

MM. Banach et Kuratowski ont prouvé[2]), en admettant l'hypothèse du continu, que ce problème possède une solution négative dans le cas où l'ensemble donné E est de la puissance du continu. M. Banach a étendu ensuite ce résultat[2]) aux ensembles d'une puissance quelconque, en admettant cependant des hypothèses plus générales, notamment l'hypothèse de Cantor sur les alephs (ou l'hypothèse du continu généralisée) et l'hypothèse suivant laquelle les nombres initiaux réguliers avec les indices de 2^{me} espèce n'existent pas.

Je vais m'occuper dans cette note d'un problème tout-à-fait analogue qui présente une *généralisation du problème de la mesure au sens large*[3]) et que l'on peut formuler de façon suivante: *étant donné*

[1]) Cf. S. Banach et C. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, ce volume, p. 127—131. L'énoncé du problème que l'on trouve dans cette note ne concerne d'ailleurs que le cas où l'ensemble donné E est de la puissance du continu.

[2]) Cette généralisation de M. Banach va paraître prochainement dans ce journal.

[3]) Le problème de la mesure au sens large a été posé par M. F. Hausdorff dans son livre: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig und Berlin 1914, p. 469—472; cf. aussi S. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fund. Math. IV, p. 8.

un ensemble infini E, existe-il une fonction $m(X)$ qui fait correspondre à tout sous-ensemble X de E un nombre réel non-négatif de façon que (1) *$m(X)$ est additive au sens restreint,* (2) *$m(X)$ s'annulle pour tout sous-ensemble X de E composé d'un seul élément,* (3) *$m(X)$ n'est pas identiquement nulle?*

Je vais prouver ici à l'aide de l'axiome du choix que *le problème énoncé tout-à-l'heure possède une solution positive*; je vais montrer de plus que l'*on peut déterminer la fonction $m(X)$ de façon qu'elle n'admette que deux valeurs:* 0 *et* 1.

Lemme 1. *Soit E un ensemble arbitraire et $\boldsymbol{K}$ une classe quelconque de ses sous-ensembles. Pour qu'il existe une fonction $m(X)$ remplissant les conditions suivantes:*

(α) *cette fonction fait correspondre à chaque sous-ensemble X de E un de deux nombres:* 0 *et* 1,

(β) *si* $X_1 \subset E$, $X_2 \subset E$ *et* $X_1 . X_2 = 0$ *on a* $m(X_1 + X_2) = m(X_1) + m(X_2)$,

(γ) *si* $X \epsilon \boldsymbol{K}$, *on a* $m(X) = 0$,

(δ) $m(E) = 1$,

il faut et il suffit qu'il existe une classe d'ensembles $\boldsymbol{M}$ qui satisfait aux conditions:

(*a*) *tous les éléments de cette classe sont des sous-ensembles de E*[1]),

(*b*) *si* $X_1 \epsilon \boldsymbol{M}$ *et* $X_2 \epsilon \boldsymbol{M}$, *on a* $X_1 + X_2 \epsilon \boldsymbol{M}$,

(*c*) *si* $X_1 \epsilon \boldsymbol{M}$ *et* $X_2 \subset X_1$, *on a* $X_2 \epsilon \boldsymbol{M}$.

(*d*) $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{M}$,

(*e*) $E \,\bar{\epsilon}\, \boldsymbol{M}$[2]),

(*f*) *si* $X \subset E$, *on a* $X \epsilon \boldsymbol{M}$ *ou bien* $E - X \epsilon \boldsymbol{M}$.

Démonstration. I. *La condition du lemme est nécéssaire.*

Soit $m(X)$ une fonction remplissant les conditions (α)—(δ). On déduit facilement de ces conditions les propriétés suivantes de la fonction $m(X)$:

(ε) *Si* $X_2 \subset X_1 \subset E$ *et* $m(X_1) = 0$, *on a* $m(X_2) = 0$.

[1]) Cette condition n'est pas essentielle.

[2]) La formule „$x \,\bar{\epsilon}\, X$" exprime dans cette note que l'élément x n'appartient pas à l'ensemble X.

Il résulte, en effet, de (α) et (β) que $m(X_1) = m(X_2 + (X_1 - X_2)) = m(X_2) + m(X_1 - X_2)$. Comme $m(X_1 - X_2) \geqslant 0$, on en obtient $m(X_2) \leqslant m(X_1) = 0$, d'où en vertu de (α) $m(X_2) = 0$.

(ζ) *Si $X_1 \subset E$, $X_2 \subset E$ et $m(X_1) = m(X_2) = 0$, on a $m(X_1 + X_2) = 0$.*

Comme $X_2 - X_1 \subset X_2 \subset E$, on en conclut suivant (ε) que $m(X_2 - X_1) = 0$, d'où selon (α) et (β) $m(X_1 + X_2) = m(X_1 + (X_2 - X_1)) = m(X_1) + m(X_2 - X_1) = 0 + 0 = 0$.

(η) *Si $X \subset E$, on a $m(X) = 0$ ou bien $m(E - X) = 0$.*

Car, si on avait $m(X) \neq 0$ et $m(E - X) \neq 0$, on en déduirait en vertu de (α) et (β) que $m(X) = 1$, $m(E - X) = 1$ et enfin $m(E) = m(X + (E - X)) = m(X) + m(E - X) = 1 + 1 = 2$, ce qui contredit à (α), resp. à (δ).

Désignons maintenant par „$\boldsymbol{M}$" la classe de tous les sous-ensembles X de E tels que $m(X) = 0$. On voit tout-de-suite que la classe $\boldsymbol{M}$ satisfait aux conditions (a)—(f), c. q. f. d.

II. *La condition du lemme est suffisante.*

Pour s'en convaincre, envisageons une classe d'ensembles $\boldsymbol{M}$ qui remplit les conditions (a)—(f). Observons que cette classe jouit en outre de deux propriétés suivantes:

(g) *Si $X_1 \bar{\epsilon} \boldsymbol{M}$ ou bien $X_2 \bar{\epsilon} \boldsymbol{M}$, on a $X_1 + X_2 \bar{\epsilon} \boldsymbol{M}$.*

Cela résulte immédiatement de (c).

(h) *Si $X_1 \subset E$, $X_2 \subset E$ et $X_1 . X_2 = 0$ on a $X_1 \epsilon \boldsymbol{M}$ ou bien $X_2 \epsilon \boldsymbol{M}$.*

On déduit, en effet, de (f) que $X_1 \epsilon \boldsymbol{M}$ ou bien $E - X_1 \epsilon \boldsymbol{M}$; comme $X_2 \subset E - X_1$, on en conclut suivant (c) qu'une de deux formules: $X_1 \epsilon \boldsymbol{M}$ et $X_2 \epsilon \boldsymbol{M}$ doit avoir lieu.

Définissons maintenant la fonction $m(X)$ comme il suit: $m(X) = 0$, lorsque $X \epsilon \boldsymbol{M}$, et $m(X) = 1$ dans le cas contraire. On vérifie sans difficulté, que cette fonction satisfait aux conditions (α)—(δ); en particulier, la condition (β) résulte de (b), (g) et (h).

Le lemme est ainsi démontré complètement.

Si l'on suppose dans le lemme précédent que $\boldsymbol{K}$ coïncide avec la classe de tous les sous-ensembles de E composés d'un seul élément, on parvient à la conclusion que le problème qui nous intéresse dans cette note peut être formulé entièrement en termes de la Théorie générale des Ensembles.

Lemme 2. *Soit E un ensemble arbitraire, $\boldsymbol{K}$ une classe non-vide de ses sous-ensembles, $\boldsymbol{L}$ une classe d'ensembles remplissant (pour $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}$) les conditions (a)—(e) du lemme 1 et A un sous-ensemble de E tel que $A \bar{\epsilon} \boldsymbol{L}$ et $E - A \bar{\epsilon} \boldsymbol{L}$; soit enfin $\boldsymbol{L}'$ la classe de tous les ensembles X qui se laissent présenter sous la forme: $X = Y + Z$, où $Y \epsilon \boldsymbol{L}$ et $Z \subset A$. La classe $\boldsymbol{L}'$ satisfait alors aussi (pour $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}'$) aux conditions (a)—(e) du lemme 1 et vérifie en outre les formules: $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{L}'$ et $\boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{L}'$.*

Démonstration. Tout ensemble X de la classe $\boldsymbol{L}$ peut être présenté sous la forme: $X = Y + Z$, où $Y = X \epsilon \boldsymbol{L}$ et $Z = 0 \subset A$; conformément à l'hypothèse du lemme, X appartient donc aussi à la classe $\boldsymbol{L}'$. On obtient ainsi la formule:

(1) $$\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{L}'.$$

D'autre part, la classe $\boldsymbol{L}$ remplissant la condition (d) du lemme 2 et la classe $\boldsymbol{K}$ n'étant pas vide, la classe $\boldsymbol{L}$ ne l'est nonplus. Comme la classe $\boldsymbol{L}$ vérifie de plus la condition (c), on en déduit tout-de-suite que $0 \epsilon \boldsymbol{L}$. Or, l'ensemble A est de la forme $A = Y + Z$, où $Y = 0 \epsilon \boldsymbol{L}$ et $Z = A \subset A$; A appartient donc à la classe $\boldsymbol{L}'$. Comme en même temps, suivant l'hypothèse, $A \bar{\epsilon} \boldsymbol{L}$, on en conclut que

(2) $$\boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{L}'.$$

Envisageons maintenant un ensemble arbitraire X de la classe $\boldsymbol{L}'$. Cet ensemble est de la forme: $X = Y + Z$, où $Y \epsilon \boldsymbol{L}$ et $Z \subset A$. La classe $\boldsymbol{L}$ remplissant la condition (a) et A étant un sous-ensemble de E, on voit que X est aussi un sous-ensemble de E. On parvient donc à la conclusion que

(3) *la classe $\boldsymbol{L}'$ remplit la condition* (a).

Soit ensuite $X_1 \epsilon \boldsymbol{L}'$ et $X_2 \epsilon \boldsymbol{L}'$. Il existe donc des ensembles Y_1, Z_1, Y_2 et Z_2 tels que $X_1 = Y_1 + Z_1$, $Y_1 \epsilon \boldsymbol{L}$, $Z_1 \subset A$, $X_2 = Y_2 + Z_2$, $Y_2 \epsilon \boldsymbol{L}$ et $Z_2 \subset A$. Il en résulte que $X_1 + X_2 = (Y_1 + Y_2) + (Z_1 + Z_2)$, où $Y_1 + Y_2 \epsilon \boldsymbol{L}$ (puisque la classe $\boldsymbol{L}$ vérifie la condition (b)) et $Z_1 + Z_2 \subset A$; suivant l'hypothèse du lemme, l'ensemble $X_1 + X_2$ appartient donc à la classe $\boldsymbol{L}'$. On voit ainsi que

(4) *la classe $\boldsymbol{L}'$ remplit la condition* (b).

D'une manière analogue, soit $X_1 \epsilon \boldsymbol{L}'$ et $X_2 \subset X_1$; X_1 étant de la forme: $X_1 = Y + Z$, où $Y \epsilon L$ et $Z \subset A$, on obtient: $X_2 = X_2 . Y + X_2 . Z$, où $X_2 . Y \epsilon L$ (puisque $X_2 . Y \subset Y$ et la classe L satisfait à la condition (*c*)) et $X_2 . Z \subset A$, d'où $X_2 \epsilon L'$. Ce raisonnement prouve que

(5) *la classe L' remplit la condition* (*c*).

Or, la classe L remplissant la condition (*d*), on déduit de (1) que $K \subset L'$; en d'autres termes,

(6) *la classe L' remplit la condition* (*d*).

Supposons enfin que $E \epsilon L'$. L'ensemble E se laisse donc présenter sous la forme: $E = Y + Z$, où $Y \epsilon L$ et $Z \subset A$. On en obtient facilement: $E - A \subset E - Z \subset Y$, d'où $E - A \epsilon L$ (puisque la classe L satisfait à la condition (*c*)). Or, cette dernière formule contredit évidemment à l'hypothèse du lemme. Il faut donc admettre que $E \bar{\epsilon} L'$, ce qui veut dire que

(7) *la classe L' remplit la condition* (*e*).

En raison de (1)—(7), la classe L' satisfait à toutes les conditions désirées, c. q. f. d.

Lemme 3. Soient E un ensemble arbitraire, K une classe non-vide de ses sous-ensembles, α un nombre ordinal différent de 0; *supposons donnée une suite transfinie de classes d'ensembles L_η du type α telles que (1) toute classe L_η, où $\eta < \alpha$, remplit (pour $M = L_\eta$) les conditions (a)—(e) du lemme 1, (2) $L_\eta \subset L_\xi$, lorsque $\eta \leqslant \xi < \alpha$; soit enfin $M = \sum\limits_{\eta<\alpha} L_\eta$. La classe M satisfait alors aussi aux conditions (a)—(e).*

D é m o n s t r a t i o n. Il est évident que la classe M satisfait aux conditions (*a*), (*c*), (*d*) et (*e*). Quant à la condition (*b*), on raisonne comme il suit:

Soit $X_1 \epsilon M$ et $X_1 \epsilon M$. Il existe donc des nombres ordinaux $\xi_1 < \alpha$ et $\xi_2 < \alpha$ tels que $X_1 \epsilon L_{\xi_1}$ et $X_2 \epsilon L_{\xi_2}$. Soit $\xi = \max(\xi_1, \xi_2)$. Comme $\xi_1 \leqslant \xi < \alpha$ et $\xi_2 \leqslant \xi < \alpha$, on a suivant l'hypothèse $L_{\xi_1} \subset L_\xi$ et $L_{\xi_2} \subset L_\xi$, d'où $X_1 \epsilon L_\xi$ et $X_2 \epsilon L_\xi$. Conformément à l'hypothèse, la classe L_ξ remplit de plus la condition (*b*), d'où $X_1 + X_2 \epsilon L_\xi$ et à plus forte raison $X_1 + X_2 \epsilon M$. La classe M satisfait donc à la condition (*b*), c. q. f. d.

Lemme 4. Soit E un ensemble arbitraire, K une classe non-vide de ses sous-ensembles et L une classe d'ensembles remplissant (pour $M = L$) les conditions (a)—(e) du lemme 1. Il existe alors une classe d'ensembles M qui satisfait aux conditions (a)—(f) du même lemme et vérifie en outre la formule $L \subset M$.

D é m o n s t r a t i o n. L'axiome du choix entraîne l'existence d'une fonction $F(X)$ vérifiant la condition suivante:

(1) *la fonction $F(X)$ fait correspondre à toute classe non-vide X de sous-ensembles de E un ensemble $Y = F(X)$ tel que $Y \epsilon X$.*

X étant une classe d'ensembles arbitraire, soit

(2) *X^* la classe de tous les ensembles Y tels que $Y \subset E$, $Y \bar{\epsilon} X$ et $E - Y \bar{\epsilon} X$.*

De (1) et (2) on obtient immédiatement:

(3) $F(X^*) \subset E$, $F(X^*) \bar{\epsilon} X$ *et* $E - F(X^*) \bar{\epsilon} X$, *pourvu que* $X^* \neq 0$.

Envisageons un nombre ordinal α vérifiant la formule:

(4) $$\bar{\alpha} > 2^{2^{\bar{E}}}\ ^{1)}.$$

Définissons par recurrence une suite transfinie des classes d'ensembles L_ξ du type α, en posant:

(5) $$L_0 = L;$$

(6) *ξ étant un nombre ordinal de 1^{re} espèce tel que $\xi < \alpha$ et* $L^*_{\xi-1} = 0$ [2]), $L_\xi = L_{\xi-1}$;

(7) *ξ étant un nombre ordinal de 1^{re} espèce tel que $\xi < \alpha$ et $L^*_{\xi-1} \neq 0$, L_ξ est la classe de tous les ensembles X qui se laissent représenter sous la forme: $X = Y + Z$, où $Y \epsilon L_{\xi-1}$ et $Z \subset F(L^*_{\xi-1})$;*

(8) *ξ étant un nombre ordinal de 2^{me} espèce tel que* $0 < \xi < \alpha$.
$$L_\xi = \sum_{\eta<\xi} L_\eta.$$

[1]) Le symbole „$\bar{\alpha}$" dénote la puissance de l'ensemble de tous les nombres ordinaux plus petits que α.

[2]) ξ étant un nombre ordinal de 1^{re} espèce, $\xi - 1$ est le nombre qui le précède immédiatement.

Suivant (5) et l'hypothèse du lemme on a

(9) *la classe* L_0 *remplit les conditions* (a)—(e).

Posons dans le lemme 2 : $L = L_{\xi-1}$, $A = F(L^*_{\xi-1})$ et $L' = L_\xi$; en vertu de (3), (6) et (7) nous concluons que

(10) *ξ étant un nombre de 1re espèce tel que $\xi < \alpha$, si la classe $L_{\xi-1}$ remplit les conditions (a)—(e), la classe L_ξ les remplit aussi et vérifie en outre la formule: $L_{\xi-1} \subset L_\xi$.*

Si l'on remplace enfin dans le lemme 3 „α" par „ξ" et „M" par „L_ξ", on obtient de même en raison de (8):

(11) *ξ étant un nombre de 2me espèce tel que $0 < \xi < \alpha$, si toutes les classes L_η, où $\eta < \alpha$, remplissent les conditions (a)—(e) et vérifient en outre la formule: $L_\eta \subset L_\zeta$, lorsque $\eta \leqslant \zeta < \xi$, alors la classe L_ξ remplit aussi ces conditions et vérifie la formule: $L_\eta \subset L_\xi$, lorsque $\eta \leqslant \xi$.*

Or, en appliquant le principe de l'induction transfinie, on déduit facilement de (9)—(11) que

(12) *toute classe L_ξ, où $\xi < \alpha$, satisfait aux conditions (a)—(e);*

(13) *$L_\eta \subset L_\xi$, lorsque $\eta \leqslant \xi < \alpha$.*

Observons maintenant que

(14) *dans la suite transfinie du type α des classes d'ensembles L_ξ se trouvent nécessairement des termes identiques.*

En effet, dans le cas contraire la famille $\mathcal{F}$ de toutes ces classes L_ξ serait de la puissance $\overline{\alpha}$, donc selon (4) de la puissance $> 2^{2^{\overline{\overline{E}}}}$; or c'est impossible, puisque en vertu de (12) toute classe L_ξ se compose exclusivement de sous-ensembles de E, la famille $\mathcal{F}$ est donc, comme on sait, de la puissance $\leqslant 2^{2^{\overline{\overline{E}}}}$.

Soient conformément à (14) η et ξ deux nombres ordinaux tels que

(15) $$\eta < \xi < \alpha$$

et

(16) $$L_\eta = L_\xi.$$

En raison de (12) et (15) on a

(17) *la classe L_η satisfait aux conditions (a)—(e) du lemme 1.*

Les formules (15) et (13) impliquent aussitôt que $\eta < \eta + 1 \leqslant \xi < \alpha$ et $L_\eta \subset L_{\eta+1} \subset L_\xi$, d'où en vertu de (16)

(18) $$L_\eta = L_{\eta+1}.$$

Supposons que $L^*_\eta \neq 0$. Appliquons une fois encore le lemme 2, en y posant $L = L_\eta$, $A = F(L^*_\eta)$ et $L' = L_{\eta+1}$; à l'aide de (17), (3) et (7) (pour $\xi = \eta + 1$) nous concluons alors sans peine que $L_\eta \neq L_{\eta+1}$, ce qui contredit évidemment à (18). Il faut donc admettre que $L^*_\eta = 0$. Il en résulte immédiatement suivant (2) qu'aucun sous-ensemble Y de E ne vérifie à la fois les formules $Y \,\overline{\epsilon}\, L_\eta$ et $E - Y \,\overline{\epsilon}\, L_\eta$; autrement dit

(19) *la classe L_η satisfait à la condition (f) du lemme 1.*

Les formules (5) et (13) donnent enfin:

(20) $$L \subset L_\eta.$$

Si l'on pose maintenant $M = L_\eta$, on parvient aussitôt, en tenant compte de (17), (19) et (20), à la conclusion que M est la classe cherchée, c. q. f. d.

Théorème. *Soit E un ensemble infini arbitraire et K la classe de tous ses sous-ensembles composés d'un seul élément Il existe alors une classe d'ensembles M qui satisfait aux conditions (a)—(f) formulées dans le lemme 1; il existe de plus une fonction $m(X)$ qui remplit les conditions (α)—(δ) du même lemme.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que la classe L de tous les sous-ensembles finis de E remplit (pour $M = L$) les conditions (a)—(e) et d'appliquer ensuite successivement les lemmes 4 et 1.

Observons que le théorème établi tout-à-l'heure ne se laisse pas étendre au cas où l'ensemble E est fini; on prouve facilement que *l'existence d'une classe d'ensembles M satisfaisant aux conditions (a)—(f) du lemme 1 présente une condition à la fois nécessaire et suffisante pour que l'ensemble donné E soit infini.*

M. Sierpiński a attiré l'attention au fait que l'*on peut généraliser le théorème précédent en admettant que la classe K se compose de tous les sous-ensembles de E dont la puissance est $< \overline{\overline{E}}$.*

Pour établir cette généralisation du théorème il suffit de remarquer que cette classe $\boldsymbol{K}$ remplit elle-même les conditions (a)—(e) et d'appliquer ensuite le lemme 4, en y posant $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{K}$.

Pour terminer je veux mentionner que le résultat établi dans cette note présente une conséquence particulière de mes considérations antérieures concernant des fonctions additives définies dans les classes abstraites. J'ai publié les résultats principaux de ces recherches, d'ailleurs sans démonstrations, dans la communication: „*Les fonctions additives dans les classes abstraites et leur application au problème de la mesure*" [1]); les démonstrations détaillées vont paraître dans un de volumes prochains des *Fundamenta Mathematicae*.

Remarque supplémentaire.

Pendant la correction des épreuves M. Kuratowski m'a attiré obligeamment l'attention au fait que le théorème principal de cette note se laisse déduire assez facilement d'un résultat de M. Ulam publié dans le volume précédent de ce journal [2]) (d'ailleurs l'implication inverse a aussi lieu). Il est à remarquer que cette implication ne concerne pas le lemme 4, qui est peut-être intéressant grâce à sa généralité et qui entraîne comme cas particulier non seulement le théorème principal, mais aussi sa généralisation proposée par M. Sierpiński et mentionnée dans le texte.

[1]) Comptes Rendus des Séances de la Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, année XXII (1929).

[2]) *Concernings functions of sets*, p, 231.

Über die Erweiterung einer Baireschen Funktion.

Von

Georg v. Alexits (Budapest).

§ 1. Sei $\mathfrak{R}$ ein metrischer Raum und $\mathfrak{M}$ eine Menge aus $\mathfrak{R}$. Ist die Funktion f auf $\mathfrak{M}$ eine Bairesche Funktion (höchstens) α-ter Klasse, so wird man fragen, ob sich f zu einer Funktion f^* erweitern lässt, welche in $\mathfrak{R}$ von (höchstens) α-ter Klasse ist und auf $\mathfrak{M}$ mit f übereinstimmt. Diese Frage wurde bisher für den Fall erledigt, dass $\mathfrak{M}$ höchstens eine Menge $G^{(\alpha)}$ [1]), oder allgemeiner, dass es ein $G^{(\alpha+1)}$ ist [2]). Hierbei bezeichnet $G^{(\alpha)}$ die Klasse jener Borelschen Mengen, welche als Durchschnitte von abzählbar unendlich vielen Borelschen Mengen geringerer als α-ter Ordnung erhalten werden. $G^{(1)}$ ist dabei die Klasse der abgeschlossenen Mengen.

Wenn man über $\mathfrak{M}$ überhaupt keine Voraussetzungen macht, so kann man eine solche Erweiterung für alle Bairesche Funktionen nicht ohne weiteres vornehmen. Nicht einmal so viel scheint bekannt zu sein, ob eine beliebige Funktion α-ter Klasse auf $\mathfrak{M}$ überhaupt zu irgend einer Baireschen Funktion in $\mathfrak{R}$ erweitert werden kann, wie auch $\mathfrak{M}$ beschaffen sei. Um so interessanter ist es, dass eine solche Erweiterung — wie wir es zeigen werden — für die Funktionen der Youngschen [3]) oder Sierpińskischen [4]) Klassen nebst Erhaltung der Klassifikation stets möglich ist. Hierbei wird unter Youngsche Klasse folgendes verstanden:

[1]) W. Hahn, Theorie der reellen Funktionen Bd. I (Berlin 1921), p. 356.

[2]) F. Hausdorff, Math. Ztschr. 5 (1919), p. 292—309.

[3]) W. H. Young, London Proc. (2) 9 (1911) p. 15—24.

[4]) W. Sierpiński, Fund. Math. 2 (1921), p. 15—27. Vgl. auch St. Kempisty Fund. Math. 2 (1921), p. 64—73.