Sur les opérations d'addition et de multiplication dans les classes d'ensembles.

Par

A. Koźniewski et A. Lindenbaum (Varsovie).

Parmi les opérations connues dont les arguments et les résultats sont des classes d'ensembles, les opérations σ et δ [1]) jouent un rôle spécial. Elles constituent la base d'opérations très importantes, comme par exemple celles de Baire et de Souslin.

Nous nous proposons dans cette note d'examiner certaines propriétés des opérations $\boldsymbol{S}_\alpha$ et $\boldsymbol{P}_\alpha$ [2]) plus générales que les opérations σ et δ. Nous emploierons ici les mêmes définitions de $\boldsymbol{S}_\alpha$ et $\boldsymbol{P}_\alpha$ dont se sont servis MM. W. Sierpiński et A. Tarski [3]).

Définition 1. *$\boldsymbol{K}$ étant une classe quelconque d'ensembles, α un nombre ordinal,*

a) *$\boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K})$ est la classe de tous les ensembles X de la forme*
$$X = \sum_{\zeta<\mu} X_\zeta \text{ où } 0 < \overline{\mu} < \aleph_\alpha \text{ et } X_\zeta \in \boldsymbol{K} \text{ pour tout } \zeta < \mu.$$

b) *$\boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K})$ est la classe de tous les ensembles X de la forme*
$$X = \prod_{\zeta<\mu} X_\zeta \text{ où } 0 < \overline{\mu} < \aleph_\alpha \text{ et } X_\zeta \in \boldsymbol{K} \text{ pour tout } \zeta < \mu \;{}^{4}).$$

[1]) $\boldsymbol{K}$ étant une classe quelconque d'ensembles, $\boldsymbol{K}_\sigma$ est la classe de toutes les sommes des suites dénombrables d'ensembles de la classe $\boldsymbol{K}$; $\boldsymbol{K}_\delta$ est la classe de tous les produits des suites dénombrables d'ensembles de la classe $\boldsymbol{K}$. Cf. p. ex. F. Hausdorff, Mengenlehre, 1927, p. 82.

[2]) Les mêmes opérations ont été examinées dans le mémoire: W. Sierpiński et A. Tarski. *Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles.* (ce volume, pp. 292—300).

[3]) Cf. W. Sierpiński et A. Tarski, l. c., déf. 2.

[4]) On voit immédiatement que $\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{K}_\sigma$, $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{K}_\delta$.

Le problème principal de nos considérations est celui d'établir les conditions pour les nombres ordinaux α_1, α_2, β_1, β_2, et pour l'ensemble A, afin que les inclusions

$$\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K})$$
$$\boldsymbol{S}_{\alpha_1}\boldsymbol{P}_{\beta_1}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{P}_{\beta_2}\boldsymbol{S}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K}) \;{}^{5})$$

soient respectivement remplies quelle que soit la classe $\boldsymbol{K}$ de sous-ensembles de l'ensemble A [6]).

Comme nous allons le voir (th. 8), ces conditions s'expriment par des relations entre les nombres cardinaux $\aleph_{\alpha_1}$, $\aleph_{\alpha_2}$, $\aleph_{\beta_1}$, $\aleph_{\beta_2}$ et $\overline{\overline{A}}$.

D'après la définition 1 on voit facilement que

I. *Pour toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$:*
$$\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K}) \quad , \quad \boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K}).$$

II. *Si $\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta$, on a:*
$$\boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K}) \quad , \quad \boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{P}_\beta(\boldsymbol{K}).$$

III. *Si $\boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}_2$, on a:*
$$\boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K}_1) \subset \boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K}_2) \quad , \quad \boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K}_1) \subset \boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K}_2).$$

IV. *$\boldsymbol{K}$ étant une classe de sous-ensembles d'un ensemble A, on peut dire de-même des classes $\boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K})$ et $\boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K})$.*

Théorème 1. *Soient α, β deux nombres ordinaux quelconques, A un ensemble.*

Pour que les inclusions

(a) $$\boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K})$$

(b) $$\boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{P}_\beta(\boldsymbol{K})$$

soient remplies (séparement ou ensemble) pour toute classe de sous-ensembles de l'ensemble A, il faut et il suffit que α, β et A satisfassent à une des conditions:

(1) $$\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta,$$

(2) $$\overline{\overline{A}} < \aleph_\beta.$$

[5]) $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ étant des opérations quelconques définies pour toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$, l'opération $\boldsymbol{FG}$ est définie par la formule $\boldsymbol{FG}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{K}))$ et on l'appelle *produit relatif* de $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$.

[6]) Nous avons d'abord examiné ce problème dans le cas $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$. M. Tarski a proposé de l'examiner dans la forme générale.

Démonstration. Nous allons d'abord démontrer le th. 1 dans le cas de l'inclusion (a).

La condition (1) *est suffisante.* En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, (1) entraîne (a) pour toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$.

La condition (2) *est suffisante.* En effet, soit $\boldsymbol{K}$ une classe quelconque de sous-ensembles de l'ensemble A.

Si

(3) $$X \in \boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K}),$$

on peut selon la déf. 1ª représenter l'ensemble X sous la forme

(4) $$X = \sum_{\zeta<\mu} X_\zeta \quad \text{où} \quad 0 < \overline{\mu} < \aleph_\alpha \quad \text{et} \quad X_\zeta \in \boldsymbol{K} \quad \text{pour tout} \quad \zeta < \mu.$$

Or, distinguons deux cas suivants:

I. $X = 0$. D'après (4) il résulte qu'il existe un nombre $\zeta' < \mu$ tel que $X_{\zeta'} = 0$. Comme $X_{\zeta'} \in \boldsymbol{K}$, on obtient $X_{\zeta'} \in \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K})$. Les formules trouvées prouvent que $X \in \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K})$.

II. $X \neq 0$. Soit p_ξ ou $\xi < \nu$ une suite de tous les éléments de l'ensemble X:

(5) $$\sum_{\xi<\nu} (p_\xi) = X; \quad \overline{\nu} > 0, \quad p_{\xi'} \neq p_{\xi''} \quad \text{si} \quad \xi' \neq \xi'', \quad \xi' < \nu, \quad \xi'' < \nu\ ^{7}).$$

Comme $X \subset A$, on conclut selon (2) et (5) que

(6) $$0 < \overline{\nu} < \aleph_\beta.$$

De (5) et (4) on déduit que pour tout $\xi < \nu$ il existe $\zeta(\xi) < \mu$ tel que $p_\xi \in X_{\zeta(\xi)}$.

On a évidemment

(7) $$X = \sum_{\xi<\nu} X_{\zeta(\xi)}.$$

Les formules (4), (6) et (7) prouvent, suivant la déf. 1ª, que $X \in \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K})$.

Nous avons donc démontré que dans tous les cas $X \in \boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K})$ entraîne $X \in \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{K})$, d'où l'on obtient la formule cherchée (a).

[7]) (p) désigne l'ensemble qui contient un seul élément p.

Les conditions (1) *et* (2) *sont nécessaires.* En effet, si α, β et A ne vérifient ni (1), ni (2), on a

(8) $$\aleph_\alpha > \aleph_\beta, \quad \overline{\overline{A}} \geqslant \aleph_\beta.$$

Soit

(9) *p_ζ où $\zeta < \nu$ une suite telle que $p_\zeta \in A$ pour tout $\zeta < \nu$, $p_\zeta \neq p_{\zeta'}$ si $\zeta \neq \zeta'$, $\overline{\nu} = \aleph_\beta$.*

Soit

(10) *$\boldsymbol{L}$ la classe de tous les ensembles (p_ζ) où $\zeta < \nu$.*

Posons $X = \sum\limits_{\zeta<\nu} (p_\zeta)$. On voit immédiatement selon (8), (9) et (10) que $X \in \boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{L})$, X *non* $\in \boldsymbol{S}_\beta(\boldsymbol{L})$.

Donc l'inclusion (a) n'est pas remplie pour toute classe $\boldsymbol{K}$ de sous-ensembles de l'ensemble A.

Pour prouver que les mêmes conditions sont suffisantes et nécessaires dans le cas de l'inclusion (b) on n'a qu'à passer aux complémentaires et à appliquer les formules de De Morgan.

Théorème 2. *Si quatre nombres ordinaux α_1, α_2, β_1, β_2 satisfont aux conditions:*

(1) $$\aleph_{\alpha_1} \leqslant \aleph_{\alpha_2}$$

(2) *étant donnée une suite de nombres cardinaux $\mathfrak{m}_\zeta$ du type μ telle que $0 < \overline{\mu} < \aleph_{\alpha_1}$, $\mathfrak{m}_\zeta < \aleph_{\beta_1}$ pour tout $\zeta < \mu$, on a toujours*
$$\prod_{\zeta<\mu} \mathfrak{m}_\zeta < \aleph_{\beta_2},$$

l'inclusion
$$\boldsymbol{P}_{\alpha_1} \boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}_{\beta_2} \boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K})$$

est remplie pour toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$.

Démonstration. En vertu de (2), nous obtenons suivant le résultat de MM. Sierpiński et Tarski[8]) que

(3) $$\boldsymbol{P}_{\alpha_1} \boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}_{\beta_2} \boldsymbol{P}_{\alpha_1}(\boldsymbol{K})$$

pour toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$. D'après (1) on a

(4) $$\boldsymbol{S}_{\beta_2} \boldsymbol{P}_{\alpha_1}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{S}_{\beta_2} \boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K}).$$

[8]) W. Sierpiński et A. Tarski, l. c., p. 297.

Les formules (3) et (4) nous donnent

$$P_{\alpha_1} S_{\beta_1}(K) \subset S_{\beta_2} P_{\alpha_2}(K). \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Comme cas particulier du théorème 1 on obtient:

Corollaire. *Si* α_1, α_2, β_2, γ *satisfont aux conditions*:

$$\aleph_{\alpha_1} \leqslant \aleph_{\alpha_2} \quad , \quad \aleph_\gamma = \aleph_{\beta_1}^{\aleph_{\alpha_1}}$$

on a

$$P_{\alpha_1} S_{\beta_1}(K) \subset S_{\gamma+1} P_{\alpha_2}(K)$$

pour toute classe d'ensembles K.

Théorème 3. α_1, α_2, β_1, β_2 *étant quatre nombres ordinaux tels que*

$$(1) \quad \aleph_{\alpha_1} \leqslant \aleph_{\alpha_2} \quad \text{et} \quad (2) \quad \overline{\overline{A}} < \aleph_{\beta_2},$$

on a

$$P_{\alpha_1} S_{\beta_1}(K) \subset S_{\beta_2} P_{\alpha_2}(K)$$

pour toute classe K *de sous-ensembles de l'ensemble* A.

Démonstration. Soit K une classe quelconque de sous-ensembles de l'ensemble A.

Soit $\aleph_\gamma = \aleph_{\beta_1}^{\aleph_{\alpha_1}}$. En vertu de (1), on obtient suivant le corollaire du th. 2

(3) $$P_{\alpha_1} S_{\beta_1}(K) \subset S_{\gamma+1} P_{\alpha_2}(K).$$

D'après (2) on déduit du th. 1 l'inclusion

(4) $$S_{\gamma+1} P_{\alpha_2}(K) \subset S_{\beta_2} P_{\alpha_2}(K).$$

Les formules (3) et (4) entraînent

$$P_{\alpha_1} S_{\beta_1}(K) \subset S_{\beta_2} P_{\alpha_2}(K)$$

Theorème 4. α_1, α_2, β_1, β_2, *étant quatre nombres ordinaux tels que*

(1) $$\overline{\overline{A}} < min\,(\aleph_{\alpha_2}, \aleph_{\beta_2})$$

on a

$$P_{\alpha_1} S_{\beta_1}(K) \subset S_{\beta_2} P_{\alpha_2}(K)\cdot$$

pour toute classe K *de sous-ensembles de l'ensemble* A.

Démonstration. Soit K une classe quelconque de sous-ensembles de l'ensemble A. Soit $\aleph_\gamma = \aleph_{\beta_1}^{\aleph_{\alpha_1}}$.

Le corollaire du th. 2 nous donne

(2) $$P_{\alpha_1} S_{\beta_1}(K) \subset S_{\gamma+1} P_{\alpha_1}(K).$$

En appliquant deux fois le th. 1 nous obtenons en vue de (1) l'inclusion:

(3) $$S_{\gamma+1} P_{\alpha_1}(K) \subset S_{\beta_2} P_{\alpha_2}(K).$$

Les formules (2) et (3) nous prouvent que

$$P_{\alpha_1} S_{\beta_1}(K) \subset S_{\beta_2} P_{\alpha_2}(K) \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Théorème 5 [9]**.** α_1, α_2, β_1, β_2 *étant quatre nombres ordinaux satisfaisant à la condition*:

(1) *il existe une suite de nombres cardinaux* $\mathfrak{m}'_\zeta$ *du type* μ', *telle que* $0 < \overline{\mu}' < \aleph_{\alpha_1}$, $\mathfrak{m}'_\zeta < \aleph_{\beta_1}$ *pour tout* $\zeta < \mu'$ *et* $\prod_{\zeta<\mu'} \mathfrak{m}'_\zeta \geqslant \aleph_{\beta_2}$,

il existe un ensemble B *et une classe* L *de sous-ensembles de l'ensemble* B *tels que*

(a) $$\overline{\overline{B}} = \aleph_{\beta_2}$$

(b) $$P_{\alpha_1} S_{\beta_1}(L) \text{ non} \subset S_{\beta_2} P_{\alpha_2}(L).$$

Démonstration. Nous allons d'abord prouver que (1) entraîne ce qui suit:

(2) *il existe une suite de nombres cardinaux* $\mathfrak{m}_\zeta$ *du type* μ *telle que* $0 < \overline{\mu} < \aleph_{\alpha_1}$, $\overline{\overline{\mu}} \leqslant \aleph_{\beta_2}$, $\mathfrak{m}_\zeta < \aleph_{\beta_1}$ *pour tout* $\zeta < \mu$ *et* $\prod_{\zeta<\mu} \mathfrak{m}_\zeta \geqslant \aleph_{\beta_2}$.

Si $\overline{\mu}' \leqslant \aleph_{\beta_2}$, nous obtenons (2) en posant $\mu = \mu'$ et $\mathfrak{m}_\zeta = \mathfrak{m}'_\zeta$ pour tout $\zeta < \mu$.

Si $\overline{\mu}' > \aleph_{\beta_2}$, on déduit immédiatement de (1) que $\aleph_{\beta_2} < \aleph_{\alpha_1}$. Posons

(3) $$\mu = \omega_{\beta_2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_\zeta = 2 \quad \text{pour} \quad \zeta < \mu.$$

[9]) Le théorème 5 a été démontré par nous par une méthode différente de celle qu'on présente ici. Cette dernière, plus simple, ressemble à la méthode dont se sont servis MM. Sierpiński et Tarski, (l. c., th. 4.).

On voit aisément que la suite des nombres $\mathfrak{m}_\zeta$ du type μ, définie par (3), vérifie dans ce cas les conditions de (2).

Ceci établi, nous ferons correspondre à tout nombre $\mathfrak{m}_\zeta$ $(\zeta<\mu)$ un nombre ordinal φ_ζ tel que $\mathfrak{m}_\zeta = \overline{\varphi}_\zeta$. On a donc

(4) $$\prod_{\zeta<\mu} \overline{\varphi}_\zeta \geqslant \aleph_{\beta_2},$$

où

(5) $$0<\overline{\mu}<\aleph_{\alpha_1}, \quad 0<\overline{\varphi}_\zeta<\aleph_{\beta_1} \quad \textit{pour tout} \quad \zeta<\mu$$

et

(6) $$\overline{\mu} \leqslant \aleph_{\beta_1}.$$

Soit

(7) *Ψ_* l'ensemble de toutes les suites ψ de nombres ordinaux du type μ dont le ζ^{me} terme ψ_ζ vérifie l'inégalité double $0<\psi_\zeta \leqslant \varphi_\zeta$.*

L'ensemble de tous les nombres η tels que $0<\eta\leqslant\varphi_\zeta$ étant évidemment de la puissance $\overline{\varphi}_\zeta$, on en conclut à l'aide de la définition du produit des nombres cardinaux que $\overline{\overline{\Psi}}_* = \prod_{\zeta<\mu} \overline{\varphi}_\zeta$, d'où selon (4) on obtient $\overline{\overline{\Psi}}_* \geqslant \aleph_{\beta_2}$.

Soit

(8) *Ψ^* un sous-ensemble de la puissance $\aleph_{\beta_2}$ de l'ensemble Ψ_*:* $\Psi^* \subset \Psi_*$, $\overline{\overline{\Psi^*}} = \aleph_{\beta_2}$.

Soit

(9) *Ψ^{**} l'ensemble de toutes les suites ψ de nombres ordinaux du type μ pour lesquelles existent respectivement une suite $\psi' \in \Psi^*$ et un nombre ordinal $\zeta'<\mu$, tels que $\psi_\zeta = \psi'_\zeta$ pour $\zeta \neq \zeta'$ et $\psi_{\zeta'} = 0$.*

Il est clair, en vertu de (9), (8) et (6) que

(10) $$\overline{\overline{\Psi^{**}}} = \aleph_{\beta_2}.$$

Posons

(11) $$\Psi = \Psi^* + \Psi^{**}.$$

Il suit de (8) et (10) que

(12) $$\overline{\overline{\Psi}} = \aleph_{\beta_2}.$$

Soit

(13) *$\Psi_{\zeta,\eta}$ (où $\zeta<\mu$, $0\leqslant\eta\leqslant\varphi_\zeta$) l'ensemble de toutes les suites $\psi \in \Psi$ dont le ζ^{me} terme ψ_ζ est égal à η.*

Soit

(14) *L la classe de tous les ensembles $\Psi_{\zeta,\eta}$, où $\zeta<\mu$, $0\leqslant\eta\leqslant\varphi_\zeta$.*

Posons

(15) $$Y = \prod_{\zeta<\mu} \sum_{0<\eta\leqslant\varphi_\zeta} \Psi_{\zeta,\eta}.$$

On voit sans peine en vertu de (7), (8), (9), (11) et (13) que

(16) $$Y = \Psi^*.$$

On aperçoit immédiatement selon la déf. 1, (15), (14) et (5) que

(17) $$Y \in P_{\alpha_1} S_{\beta_1}(L).$$

Or, supposons que

(18) $$Y \in S_{\beta_2} P_{\alpha_2}(L).$$

Suivant la déf. 1, on en conclut que l'ensemble Y peut être représenté sous la forme

(19) $$Y = \sum_{\xi<\nu} Y_\xi \quad \textit{où} \quad 0<\overline{\nu}<\aleph_{\beta_2} \quad \textit{et} \quad x_\xi \in P_{\alpha_2}(L) \quad \textit{pour} \quad \xi<\nu.$$

Si chaque ensemble Y_ξ (où $\xi<\nu$) contenait tout au plus un élément, on aurait en vertu de (19) $\overline{\overline{Y}} \leqslant \overline{\nu} < \aleph_{\beta_2}$, contrairement à (16) et (8). Il existe donc un nombre ξ tel que

(20) $$\overline{\overline{Y}}_\xi > 1 \quad \textit{et} \quad \xi<\nu.$$

En raison de (19) et (20): $Y_\xi \in P_{\alpha_2}(L)$. En appliquant une fois encore la déf. 1 et en tenant compte de (14), on en déduit l'existence de deux suites de nombres ordinaux ζ_ι et η_ι du type π satisfaisant aux conditions:

(21) $$Y_\xi = \prod_{\iota<\pi} \Psi_{\zeta_\iota,\eta_\iota} \textit{ où } 0<\overline{\pi}<\aleph_{\alpha_2} \textit{ et en outre } \zeta_\iota<\mu \textit{ et } 0\leqslant\eta_\iota\leqslant\varphi_{\zeta_\iota} \textit{ pour tout } \iota<\pi.$$

Suivant (20), (19) et (16), on établit l'existence de deux suites ψ et ψ' et d'un nombre ordinal ζ' tels que

(22) $$\psi \in \Psi^* \quad \textit{et} \quad \psi' \in \Psi^*.$$

(23) $$\psi \in Y_\xi \quad \textit{et} \quad \psi' \in Y_\xi.$$

(24) $$\zeta'<\mu \quad \textit{et} \quad \psi_{\zeta'} \neq \psi'_{\zeta'}.$$

Supposons que le nombre ζ' est un des nombres ζ_ι où $\iota<\pi$, soit $\zeta'=\zeta_{\iota'}$.

En raison de (23) et (21), on a alors $\psi \in \Psi_{\zeta_{\iota'},\eta_{\iota'}}$ et $\psi' \in \Psi_{\zeta_{\iota'},\eta_{\iota'}}$ d'où selon (13) $\psi_{\zeta'}=\psi_{\zeta_{\iota'}}=\eta_{\iota'}$ et de-même $\psi'_{\zeta'}=\psi'_{\zeta_{\iota'}}=\eta_{\iota'}$. Il en résulte aussitôt que $\psi_{\zeta'}=\psi'_{\zeta'}$, ce qui contredit évidemment (24). On a donc

(25) $$\zeta' \neq \zeta_\iota \quad \textit{pour tout} \quad \iota<\pi.$$

Or, formons une nouvelle suite ψ'' du type μ, en remplaçant dans la suite ψ le terme à l'indice ζ' par le nombre 0:

(26) $$\psi''_{\zeta'}=0,$$

(27) $$\psi''_\zeta=\psi_\zeta \quad \textit{lorsque} \quad \zeta\neq\zeta'.$$

En vertu de (22), (26), (27), (9) et (11), on a

(28) $$\psi'' \in \Psi.$$

Les formules (25) et (27) impliquent que $\psi''_{\zeta_\iota}=\psi_{\zeta_\iota}$ pour $\iota<\pi$. A l'aide de (23), (21), (13) et (28), on conclut que $\psi'' \in \Psi_{\zeta_\iota,\eta_\iota}$ pour tout $\iota<\pi$, et par conséquent que $\psi'' \in Y_\xi$, d'où en vertu de (19), (20) et (16) $\psi'' \in \Psi^*$. Comme d'après (7) et (8) l'ensemble Ψ^* est formé exclusivement de suites du type μ à termes >0, il s'en suit que

(29) $$\psi''_{\zeta'}>0.$$

Les formules (26) et (29) prouvent que la supposition (18) nous conduit à une contradiction. Nous sommes donc contraints d'admettre que l'ensemble Y n'appartient pas à la classe $\boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{L})$.

En rapprochant ce fait de (17) on voit que

(30) $$\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{L}) \textit{ non} \subset \boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{L}).$$

En posant $B=\Psi$, on voit selon (12), (14), (13) et (30) que l'ensemble B et la classe $\boldsymbol{L}$ de sous-ensembles de l'ensemble B répondent aux conditions (a) et (b) de la thèse du th. 5.

Théorème 6. *α_1, α_2, β_1, β_2 étant quatre nombres ordinaux satisfaisant à la condition:*

(1) $$\aleph_{\alpha_1}>\aleph_{\alpha_2},$$

il existe un ensemble B et une classe $\boldsymbol{L}$ de sous-ensembles de l'ensemble B tels que:

(a) $\overline{\overline{B}}=\aleph_{\alpha_2}$

(b) $\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{L})$ *non* $\subset \boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{L})$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit p_ζ où $\zeta<\nu$ une suite telle que

(2) $$p_{\zeta'}\neq p_{\zeta''} \quad \textit{si} \quad \zeta'\neq\zeta'',\ \zeta'<\nu,\ \zeta''<\nu \ \textit{ et } \ \overline{\overline{\nu}}=\aleph_{\alpha_2}.$$

Posons

(3) $$B=\sum_{\zeta<\nu}(p_\zeta).$$

Soit

(4) $\boldsymbol{L}$ *la classe de tous les ensembles* $B_{\zeta'}=\sum\limits_{\substack{\zeta<\nu\\ \zeta\neq\zeta'}}(p_\zeta)$ *où* $\zeta'<\nu$.

Il est clair que $0=\prod\limits_{\zeta'<\nu}B_{\zeta'}$.

En vertu de (1), (2) et (3), $0 \in \boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{L})$. On voit sans peine que $\overline{\overline{B}}=\aleph_{\alpha_2}$, 0 *non* $\in \boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{L})$, ce qui montre que l'ensemble B et la classe $\boldsymbol{L}$ de sous-ensembles de l'ensemble B répondent aux conditions (a) et (b) de la thèse du th. 6.

Théorème 7. *S'il existe pour l'ensemble B une classe $\boldsymbol{L}$ de sous-ensembles de B, telle que*

$$\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{L}) \textit{ non} \subset \boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{L}),$$

il existe pour chaque ensemble A, où

$$\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{B}},$$

une classe $\boldsymbol{K}$ de sous-ensembles de A, telle que

$$\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{K}) \textit{ non} \subset \boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K}).$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{B}}$. Soit f une fonction qui transforme d'une façon biunivoque l'ensemble B en un sous-ensemble de l'ensemble A. Soit $\boldsymbol{K}$ la classe de toutes les images — suivant la fonction f — d'ensembles qui appartiennent à $\boldsymbol{L}$.

Comme la transformation f est biunivoque, on en déduit que la formule $\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{L})$ *non* $\subset \boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{L})$ entraîne $\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{K})$ *non* $\subset \boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K})$. $\boldsymbol{K}$ étant évidemment une classe de sous-ensembles de l'ensemble A, on voit que $\boldsymbol{K}$ vérifie les conditions du th. 7.

Théorème 8. *Soient α_1, α_2, β_1, β_2 quatre nombres ordinaux quelconques, A un ensemble.*

Pour que les inclusions

(a) $$\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{K})\subset\boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K})$$

(b) $$\boldsymbol{S}_{\alpha_1}\boldsymbol{P}_{\beta_1}(\boldsymbol{K})\subset\boldsymbol{P}_{\beta_2}\boldsymbol{S}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K})$$

soient remplies (séparément ou ensemble) pour toute classe de sous-ensembles de l'ensemble A, il faut et il suffit que α_1, α_2, β_1, β_2 et A satisfassent à une des conditions

(1) $\aleph_{\alpha_1}\leqslant\aleph_{\alpha_2}$; *étant donnée une suite de nombres cardinaux $\mathfrak{m}_\zeta$ du type μ telle que $0<\overline{\mu}<\aleph_{\alpha_1}$, $\mathfrak{m}_\zeta<\aleph_{\beta_1}$ pour tout $\zeta<\mu$, on a toujours $\prod\limits_{\zeta<\mu}\mathfrak{m}_\zeta<\aleph_{\beta_2}$.*

(2) $$\aleph_{\alpha_1}\leqslant\aleph_{\alpha_2};\quad \overline{\overline{A}}<\aleph_{\beta_2}$$

(3) $$\overline{\overline{A}}<min\,(\aleph_{\alpha_2},\aleph_{\beta_2}).$$

Démonstration. Pour prouver le th. 8 dans le cas de l'inclusion (a), il ne reste qu'à confronter les th. 2, 3, 4 et 5, 6, 7.

Pour démontrer que les mêmes conditions sont suffisantes et nécessaires dans le cas de l'inclusion (b), on passe aux complémentaires et on applique les formules de De Morgan.

Comme une simple déduction du th. 8 on obtient ce qui suit:

Corollaire. *α_1, α_2, β_1, β_2 étant quatre nombres ordinaux quelconques, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $$\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{K})\subset\boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K})$$

pour toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$;

(2) $$\boldsymbol{S}_{\alpha_1}\boldsymbol{P}_{\beta_1}(\boldsymbol{K})\subset\boldsymbol{P}_{\beta_2}\boldsymbol{S}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K})$$

pour toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$;

(3) $\aleph_{\alpha_1}\leqslant\aleph_{\alpha_2}$; *étant donnée une suite de nombres cardinaux $\mathfrak{m}_\zeta$ du type μ telle que $0<\overline{\mu}<\aleph_{\alpha_1}$, $\mathfrak{m}_\zeta<\aleph_{\beta_1}$ pour tout $\zeta<\mu$, on a toujours $\prod\limits_{\zeta<\mu}\mathfrak{m}_\zeta<\aleph_{\beta_2}$.*

Le théorème 8 nous permet d'établir les conditions pour les nombres ordinaux α_1, α_2, β_1, β_2 et l'ensemble A, afin d'avoir pour toute classe $\boldsymbol{K}$ de sous-ensembles de l'ensemble A:

$$\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{K})=\boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K}).$$

Pour exprimer la solution cherchée il est commode de se servir de la définition des *nombres cardinaux inaccessibles*:

Définiton 2. *Le nombre ordinal transfini $\mathfrak{m}$ est dit inaccessible lorsqu'il remplit la condition suivante: étant donnée une suite de nombres cardinaux $\mathfrak{m}_\zeta$ du type μ telle que $0<\overline{\mu}<\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}_\zeta<\mathfrak{m}$ pour tout $\zeta<\mu$, on a toujours $\prod\limits_{\zeta<\mu}\mathfrak{m}_\zeta<\mathfrak{m}$* [10].

Théorème 9. *Soient α_1, α_2, β_1, β_2 quatre nombres ordinaux quelconques, A un ensemble.*

Pour que l'égalité

$$\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{K})=\boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K})$$

soit remplie pour toute classe $\boldsymbol{K}$ de sous-ensembles de l'ensemble A, il faut et il suffit que α_1, α_2, β_1, β_2 et A satisfassent à une des conditions:

(1) $\aleph_{\alpha_1}=\aleph_{\alpha_2}=\aleph_{\beta_1}=\aleph_{\beta_2}=\aleph_\gamma$ *où $\aleph_\gamma$ est un nombre cardinal inaccessible.*

(2) $$\overline{\overline{A}}<min\,(\aleph_{\alpha_1},\aleph_{\alpha_2},\aleph_{\beta_1},\aleph_{\beta_2}).$$

Démonstration: Pour prouver la partie plus difficile, c.-à-d. que les conditions (1) et (2) sont nécessaires, on n'a qu'à confronter — une à une — les conditions (1), (2) et (3) du th. 8 et les conditions (1'), (2') et (3') qu'on en obtient après avoir remplacé les nombres α_1, α_2, β_1, β_2 respectivement par les nombres β_2, β_1, α_2, α_1; en outre, on s'appuie sur le fait que la condition (1) du th. 8 implique les rélations: $\aleph_{\beta_1}\leqslant\aleph_{\beta_2}$, $\aleph_{\alpha_1}\leqslant\aleph_{\beta_2}$.

Comme une simple déduction du th. 9 on obtient le

Corollaire. *α_1, α_2, β_1, β_2 étant quatre nombres ordinaux quelconques les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\boldsymbol{P}_{\alpha_1}\boldsymbol{S}_{\beta_1}(\boldsymbol{K})=\boldsymbol{S}_{\beta_2}\boldsymbol{P}_{\alpha_2}(\boldsymbol{K})$ *pour toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$.*

[10]) Cf. W. Sierpiński et A. Tarski l. c. [2]) déf. 1. Cette définition s'éloigne de la définition proposée par M. Kuratowski, mais on peut prouver leur équivalence à l'aide de l'hypothèse de Cantor sur les alephs.

(2) $\aleph_{\alpha_1} = \aleph_{\alpha_2} = \aleph_{\beta_1} = \aleph_{\beta_2} = \aleph_\gamma$ *où* $\aleph_\gamma$ *est un nombre cardinal inaccessible* [11]).

Remarque. Les opérations S_α et P_α sont basées sur les opérations d'addition et de multiplication des suites transfinies d'ensembles. On peut généraliser la définition 1 de telle manière qu'elle embrasse aussi les opérations formées par l'addition et la multiplication des suites finies d'ensembles.—

Définition. *K étant une classe quelconque d'ensembles, $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal >1,*

a) $S_{(\mathfrak{m})}(K)$ est la classe de tous les ensembles X de la forme

$$X = \sum_{\zeta<\mu} X_\zeta \text{ où } 0 < \bar{\mu} < \mathfrak{m} \text{ et } X_\zeta \in K \text{ pour tout } \zeta < \mu.$$

b) $P_{(\mathfrak{m})}(K)$ est la classe de tous les ensembles X de la forme

$$X = \prod_{\zeta<\mu} X_\zeta \text{ où } 0 < \bar{\mu} < \mathfrak{m} \text{ et } X_\zeta \in K \text{ pour tout } \zeta < \mu.$$

On voit immédiatement que

$$S_{(\aleph_\alpha)}(K) = S_\alpha(K), \qquad P_{(\aleph_\alpha)}(K) = P_\alpha(K),$$
$$S_{(2)}(K) = K, \qquad P_{(2)}(K) = K.$$

On peut, avec quelques restrictions, étendre les résultats obtenus pour les opérations S_α et P_α sur les opérations $S_{(\mathfrak{m})}$ et $P_{(\mathfrak{m})}$.

Dans le cas de $\mathfrak{m}$ fini, les méthodes dont nous nous sommes servies diffèrent de celles qu'on emploie dans le cas de $\mathfrak{m}$ transfini.

Comme exemple nous allons citer la généralisation du th. 9 dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$.

Théorème. *Soient $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ deux nombres cardinaux >1, A un ensemble. Pour que l'égalité*

$$P_{(\mathfrak{n})} S_{(\mathfrak{m})}(K) = S_{(\mathfrak{m})} P_{(\mathfrak{n})}(K)$$

soit remplie pour toute classe K de sous-ensembles de l'ensemble A, il faut et il suffit que $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ et A satisfassent à une des conditions:

1) $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ *où* $\mathfrak{m}$ *est un nombre cardinal transfini inaccessible,*
2) $\mathfrak{n} = 2$
3) $\mathfrak{m} = 2$
4) $\overline{\overline{A}} < min\,(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) + 2.$

Pour terminer nos considérations, nous remarquons encore que l'hypothèse H [12]) implique ce qui suit:

Pour que la condition [13]):

(ϱ) *étant donnée une suite $\mathfrak{m}_\zeta$ de nombre cardinaux du type μ telle que $0 < \bar{\mu} < \aleph_{\alpha_1}$ et $\mathfrak{m}_\zeta < \aleph_{\beta_1}$, pour tout $\zeta < \mu$, on a $\prod_{\zeta<\mu} \mathfrak{m}_\zeta < \aleph_{\beta_2}$,*

soit remplie, il faut et il suffit que les nombres ordinaux α_1, β_1 et β_2 satisfassent à l'une des conditions:

(1) $\beta_1 \leqslant \alpha_1$, *$\alpha_1$ est de 1re espèce,* $\alpha_1 < \beta_2$,
(2) $\beta_1 < \alpha_1$, *α_1 est de 2me espèce,* $\alpha_1 \leqslant \beta_2$,
(3) $\beta_1 = \alpha_1$, *α_1 est de 2me espèce,* $\alpha_1 = cf(\alpha_1)$, $\alpha_1 \leqslant \beta_2$ [14]),
(4) $\beta_1 = \alpha_1$, *α_1 est de 2me espèce,* $\alpha_1 > cf(\alpha_1)$, $\alpha_1 + 1 < \beta_2$,
(5) $\beta_1 > \alpha_1$, *β_1 est de 1re espèce,* $\alpha_1 \leqslant cf(\beta_1 - 1)$, $\beta_1 \leqslant \beta_2$,
(6) $\beta_1 > \alpha_1$, *β_1 est de 1re espèce,* $\alpha_1 > cf(\beta_1 - 1)$, $\beta_1 < \beta_2$,
(7) $\beta_1 > \alpha_1$, *β_1 est de 2me espèce,* $\alpha_1 \leqslant cf(\beta_1)$, $\beta_1 \leqslant \beta_2$,
(8) $\beta_1 > \alpha_1$, *β_1 est de 2me espèce,* $\alpha_1 > cf(\beta_1)$, $\beta_1 + 1 < \beta_2$.

[11]) Le corollaire du th. 9 présente la généralisation du résultat principal obtenu par MM. Sierpiński et Tarski (cf. l. c., th. 5 C'est M. Tarski), qui l'avait déjà énoncée en forme d'hypothèse.

[12]) C.-à-d. que $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ pour tout nombre ordinal α (l'hypothèse de Cantor).

[13]) Cf. la condition (1) du th. 8.

[14]) Le signe „$cf(\alpha)$“ dénote ici l'indice du plus petit nombre initial avec lequel le nombre ω_α est confinal. On a toujours $cf(\alpha) \leqslant \alpha$. Cf. A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints.* Fund. Math. XII, p. 201 et 202.