La première partie de notre Théorème est ainsi démontrée.

2. Pour en démontrer la seconde, il suffit de remarquer que *si l'image géométrique d'une fonction possédant un point de continuité ne contient aucune partie connexe bornée, elle n'est pas connexe.*

On démontre cette propriété par un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la II-de partie de notre Lemme.

Notre Théorème est ainsi démontré complétement.

Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo: »Über die Definitheit in der Axiomatik«.

Von

Th. Skolem (Oslo).

Im 14. Bande dieser Zeitschrift hat E. Zermelo einen Aufsatz veröffentlicht, dessen Zweck es ist, den von ihm früher eingeführten Begriff der „definiten" Aussage [1]) axiomatisch zu begründen. Da ich in mehreren Punkten mit dieser Arbeit nicht einverstanden bin, sei es mir gestattet, einige Bemerkungen dazu zu machen.

Zermelo bespricht zuerst einige frühere Versuche zur Vermeidung oder Präzisierung des Begriffes „definit". Dabei fällt es mir besonders auf, daß er meinen Helsingforser Vortrag [2]) vom Jahre 1922 nicht zu kennen scheint, worin ich genau dieselbe Idee zur Verschärfung jenes Begriffes ausgesprochen habe wie Zermelo auf Seite 342 in seiner Arbeit. Freilich versucht Zermelo trotzdem auf Seite 343 einen etwas weiteren Begriff als ich zu bilden mittels der Festsetzung 4); aber gerade dieser Punkt ist sehr zweifelhaft, worauf ich bald zurückkommen werde. Der Unterschied zwischen dem Zermeloschen Begriff der Definitheit und dem meinigen besteht nur darin, daß ich die Quantifikationen nur auf die Argumente der Satzfunktionen und nicht wieder auf diese selbst anwende, abgesehen davon, dass ich den Begriff konstruktiv formuliert habe. Axiomatisch formuliert würde mein Definitheitsbegriff sich von dem Zermeloschen nur darin unterscheiden, daß 4) wegfällt. Merkwürdig scheint es

[1]) Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, Math. Ann. 65.

[2]) Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre (Vorträge gehalten auf dem 5-ten Kongress der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors 1922). Zitiert u. a. in der 2. (1923) und 3. (1928) Auflage von Fraenkels „Einleitung in d. Mengenlehre".

mir weiter zu sein, daß er eine so große Unterscheidung macht zwischen dem Versuch Fraenkels einerseits und dem Versuch J. v. Neumanns anderseits zur Verschärfung des Begriffes „definit". Der Fraenkelsche Begriff soll eine „Spezialisierung" sein, der Neumannsche eine „Axiomatisierung". Aus Gründen, die ich am Schlusse dieser Kritik angebe, scheint es mir, daß beides auf gleicher Linie stehen muß; denn es kann kaum möglich sein, diesen Begriff axiomatisch derart zu charakterisieren, daß er sich nicht nachher verallgemeinern läßt.

Die Auffassung Zermelos, daß es so ausserordentlich viel besser sein soll, den Begriff „definit" axiomatisch statt konstruktiv zu erklären, ist wohl auch wenig berechtigt. Er will nicht den Begriff der endlichen ganzen Zahl benutzen, weil es eine Aufgabe der Mengenlehre sei, diesen Begriff zu erklären. Wenn er aber seine Axiomatik der Definitheit aufstellt, so ist er darin genötigt, den Begriff des beliebigen „Teilsystems" zu benutzen (Axiom III Seite 344). Es liegt dann nahe zu fragen: Ist es auch nicht gerade eine Aufgabe der Mengenlehre, den Begriff „Teil" zu fixieren, und sollen nicht eben die definiten Aussagen erst dazu dienen, aus einer Menge die Untermengen auszusondern?

Was den schon erwähnten Punkt 4) Seite 343 betrifft, so ist es erstens gar nicht klar, was eigentlich gemeint ist. Es scheint, daß $F(f)$ eine Funktion von Satzfunktionen sein soll; aber wie dieser Begriff allgemein zu verstehen ist, darauf geht Zermelo ja gar nicht ein! Sollen die Funktionen von Satzfunktionen konstruktiv gegeben sein als Ausdrücke, wie z. B. der Ausdruck

$$\bigcap_y (f(x) + g(y)),$$

der eine Funktion von f und g ist, wenn diese variable Satzfunktionen darstellen? Dann wäre es nicht verständlich, weshalb man nicht schon die Satzfunktionen selbst konstruktiv erklären soll. Oder sollen die Funktionen von Satzfunktionen wieder durch gewisse Axiome charakterisiert werden? Oder ist vielleicht gemeint, daß der Begriff der Satzfunktion so umfassend gedacht werden soll, daß er schon von vornherein auch den Begriff „Funktion von Satzfunktionen" umfaßt? Im letzten Falle können die Satzfunktionen wieder ebensolche als Argumente haben, und dann liegt die Gefahr der Antinomien sehr nahe. Bildete man die Funktion $\Sigma(S)$, welche bedeutet, daß die Satzfunktion $S(x)$ nicht wahr ist, wenn man statt x

die Funktion S selbst einsetzt, so hätte man wieder die Russellsche Antinomie. Übrigens ist die Festsetzung 4), wenn man zwischen Satzfunktionen und Funktionen davon unterscheidet, mit einem Teile des Russellschen Reduzibilitätsaxioms gleichwertig.

Zweitens — und das ist das wichtigste — ist es leicht zu beweisen, daß die Anwendung von 4), wenn die Funktionen von Satzfunktionen auch mittels der 5 logischen Grundoperationen aus den letzteren aufgebaut werden, in Verbindung mit den Mengenaxiomen Zermelos *gar keine Mengenbildung möglich macht, die nicht schon mit Hilfe meines l. c. eingeführten einfacheren Definitheitsbegriffes möglich ist*, d. h. die Forderung 4) ist vollkommen überflüssig und nutzlos. Es sei z. B. $F(f)$ eine Funktion der definiten Satzfunktion $f(x)$, und es sei M eine gegebene Menge. Wenn f gewählt wird, so stellt $F(f(x))$ eine Satzfunktion von x dar. Nach dem Aussonderungsaxiom gibt es eine Untermenge $M_{F(f)}$ von M, welche alle und nur diejenigen Elemente x von M enthält, für welche $F(f(x))$ wahr ist. Die verschiedenen Wahlen von f geben verschiedene Untermengen $M_{F(f)}$. Aber schon nach dem von mir l. c. angegebenen Definitheitsbegriff lassen sich die Untermengen der Form $M_{F(f)}$ von M alle zu einer Menge zusammenfassen. Die Aussage „Es gibt eine Satzfunktion f derart, daß N die Untermenge $M_{F(f)}$ von M ist" sieht nämlich in Symbolen so aus:

(a) $$\overset{f}{\bigcup} \bigcap_x [(x \epsilon N) \rightleftarrows (x \epsilon M) F(f(x))]\ ^{1})$$

und ich behaupte, daß diese Aussage mit

(b) $$\overset{y}{\bigcup} \bigcap_x [(x \epsilon N) \rightleftarrows (x \epsilon M) F(x \epsilon y)]$$

gleichbedeutend ist, wobei y eine Menge ist und nicht eine Satzfunktion. Ist (a) wahr, so gilt für eine gewisse Funktion f

$$\bigcap_x [(x \epsilon N) \rightleftarrows (x \epsilon M) F(f(x))].$$

Bedeutet aber M_f die Menge aller $x \epsilon M$, für welche $f(x)$ wahr ist, so ist $F(f(x))$ $(x \epsilon M)$ mit $F(x \epsilon M_f)$ $(x \epsilon M)$ gleichbedeutend.

[1]) Statt $A \rightarrow B$ kann man $\overline{A} + B$ schreiben; statt $A \rightleftarrows B$ deshalb $(\overline{A} + B)(A + \overline{B})$ oder auch $AB + \overline{A}\overline{B}$.

Also gilt

$$\bigcap_x [(x \in N) \rightleftarrows (x \in M)\ F(x \in M_f)],$$

woraus offenbar (b) folgt. Ist umgekehrt (b) wahr, so ist es auch (a); denn $x \in y$ ist ja für jedes y schon eine Satzfunktion $f(x)$. Nun ist (b) schon in meinem Sinne eine definite Satzfunktion von N, wenn M festgehalten wird. Infolgedessen bilden sämtliche Elemente N von UM, für welche diese Aussage gilt, zusammen eine Menge P. Die zu P gehörige Vereinigungs- und Durchschnittsmenge sind dann bezw. die Untermenge aller $x \in M$, für welche $\bigcup^f F(f(x))$ bezw. $\bigcap_f F(f(x))$ gilt.

Zum Schlusse habe ich eine Bemerkung allgemeinerer Art. Stellt man für die Satzfunktionen Axiome auf, welche gewisse Reproduktionsforderungen ausdrücken wie II) 1), 2), 3), 4) bei Zermelo, so lassen sich diese Axiome, ebenso wie auch die einfacheren von derselben Art wie I bei Zermelo, als „Zählaussagen" auffassen, wenn man gewisse Satzfunktionen von höherem Typus wie Df, f ist definit, und gewisse andere, welche Beziehungen zwischen den axiomatisch zu charakterisierenden Satzfunktionen ausdrücken, als Urfunktionen betrachtet (z. B. daß eine Satzfunktion die Konjunktion zweier anderen ist, oder daß eine Satzfunktion $A(x)$ aus einer anderen $B(x, y)$ mittels einer Quantifikation in Bezug auf y (z. B. „alle") entsteht). Nach dem Satze von Löwenheim[1]) muß dann jedes kleinste Modell des Bereiches O der Satzfunktionen höchstens abzählbar unendlich sein. Man denke sich nun ein einzelnes bestimmtes solches Modell gegeben und zugleich ein bestimmtes Modell des mit Hilfe des Definitheitsbegriffes und der übrigen Axiome Zermelos gegebenen mengentheoretischen Bereichs B. In dem letzteren Modell kommt dann die Zermelosche Zahlenreihe Z_0 vor, und es sei eine Abzählung des Bereiches der definiten Satzfunktionen einer Variablen mittels der Elemente von Z_0 gegeben. Es sei S_n die Satzfunktion einer Variablen, welche dem Elemente n von Z_0 entspricht. Ich betrachte die Verneinung $\overline{S_n}(n)$ der Satzfunktion $S_n(n)$. Da wir uns ein bestimmtes Modell sowohl von O wie von B gedacht haben und ebenso eine bestimmte Abzählung, so ist es nach dem von Zermelo Seite 341 benutzten Gedankengang, falls ich ihn richtig verstehe,

[1]) Vgl. meinen in der zweiten Fußnote S. 337 zitierten Aufsatz.

für jedes n entschieden, ob $S_n(n)$ wahr ist oder nicht. Deshalb gehört $\overline{S_n}(n)$ zu den definiten Satzfunktionen nach der auf Seite 341 gegebenen Erklärung. Anderseits ist $\overline{S_n}(n)$ eine Funktion einer Variablen und offenbar von allen $S_m(n)$ verschieden; sie kommt also nicht in O vor. M. a. W. es erscheint unmöglich mittels einer bestimmten finiten Axiomatik einen Definitheitsbegriff zu charakterisieren, der mit der Erklärung Seite 341 übereinstimmen könnte, falls den Ausdrücken „ableitbar" und „was in jedem Modell bestimmt ist" eine absolut-allgemeine Bedeutung beigelegt werden soll.