Auch der Inhalt des § 2 läßt sich bei integrierbaren Intervallfunktionen übertragen.

§ 4 Schließlich läßt sich der letzte Satz noch auf folgende Weise ausbreiten:

$\Phi(I)$ sei eine integrierbare Intervallfunktion, definiert auf einer Menge E, welche im Intervall (a, b) enthalten ist; $\Psi(I)$ sei das zugehörige Integral.

Wenn man von einer Nullmenge absieht, so sind an den verschiedenen Stellen x von E nur die folgenden drei Fälle möglich: A. *Φ und Ψ haben endliche Ableitungen, welche einander gleich sind;* B. *Φ und Ψ haben endliche approximative Ableitungen, welche einander gleich sind;* C. $D^+\Phi = D^-\Phi = D^+\Psi = D^-\Psi = +\infty$, $D_+\Phi = D_-\Phi = D_+\Psi = D_-\Psi = -\infty$.

Man kann erstens das Lemma beweisen: „Bei einer integrierbaren Intervallfunktion existiert in fast allen Punkten, wo zwei entgegengesetzte extreme Derivierten (D^+, D_- oder D^-, D_+) endlich und einander gleich sind, eine approximative Ableitung mit demselben Werte". Das folgt aus dem Beweise von § 1, übertragen auf den Fall integrierbarer Intervallfunktionen. Darauf folgt der eigentliche Beweis.

Das Integral Ψ ist beschränkt additiv und somit auch eine auf E integrierbare Intervallfunktion. Nach dem ersten Satze von Fußn. 4 kann man, bei Vernachlässigung einer Nullmenge, auf E für Φ und Ψ nur drei Fälle unterscheiden: 1. $D^+ = D^- = +\infty$, $D_+ = D_- = -\infty$; 2. $D^+ = D_+ = D^- = D_- =$ endlich; 3. $D_+ = D^- =$ endlich oder $D_- = D^+ =$ endlich.

Nach dem zweiten Satze von Fußn. 4. können die Mengen, in deren Punkten der erste Fall für Φ und für Ψ gilt, sich nur in einer Nullmenge unterscheiden. Nach jenem Satze kann auch die Menge, auf der Φ eine Ableitung hat, nur eine Nullmenge enthalten, in deren Punkten Ψ nicht eine Ableitung von gleichem Werte hat; und umgekehrt.

Endlich ist in allen Punkten der Mengen 3, mit Ausnahme einer Nullmenge, $D_+\Phi = D^-\Phi = D_+\Psi = D^-\Psi$ oder $D_-\Phi = D^+\Phi = D_-\Psi = D^+\Psi$. Da Φ und Ψ, nach dem Lemma, in fast allen diesen Punkten approximative Ableitungen haben gleich zwei dieser extremen Derivierten, folgt, daß die Mengen 3 nur Nullmengen enthalten können, in deren Punkten Φ und Ψ nicht einander gleiche approximative Ableitungen besitzen.

Sur un ensemble connexe plan ne contenant aucune partie connexe bornée.

Par

G. Poprougénko (Varsovie).

M. Mazurkiewicz a démontré en 1921 [1]) qu'il existe une fonction d'une variable réelle dont l'image géométrique est un ensemble connexe ne contenant aucune partie connexe bornée. La démonstration de M. Mazurkiewicz est *non-effective* [2]). L'exemple effectif d'une telle fonction, donné ensuite par MM. Knaster et Kuratowski [3]) est encore très compliqué au point de vue de ses propriétés analytiques, qui restent indéterminées.

Or, le problème se pose: *est ce qu'on peut nommer une fonction représentable analytiquement dont l'image possède la singularité en question?*

Nous nous proposons de donner ici la solution effective *la plus simple* de ce problème. Nous énonçons à ce but le théorème suivant:

Théorème. 1. *Il existe une fonction de classe 2 de Baire définie dans l'intervalle* $I = [0, 1]$ [4]) *dont l'image géométrique*

α) est connexe irreductible entre deux points,

β) ne contient aucun sous-ensemble connexe borné.

[1]) *Sur l'existence d'un ensemble plan connexe ne contenant aucun sous-ensemble connexe borné*, Fund. Math, t. II, p. 96.

[2]) Sa construction s'appuit en effet sur l'existence des correspondances biunivoques provenant de l'égalité des puissances des deux ensembles (v. op. cit., p. 99).

[3]) V. Knaster et Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*. Fund. Math., t. II, p. 245—7 (Exemples β) et β_1)).

[4]) Le symbole $[a, b]$ désigne l'intervalle linéaire fermé à extrémités a et b $(a < b)$.

2. *Il n'existe aucune fonction de classe <2 de Baire (définie dans un intervalle fini ou non) dont l'image géométrique possède ces propriétés.*

Nous établirons d'abord une proposition générale concernant les images géométriques des fonctions d'une variable réelle.

Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $I=[0, 1]$ et remplissant la relation $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Désignons par E l'image géométrique de $f(x)$, par Q le carré fermé à sommets opposés $(0, 0)$ et $(1, 1)$, par $J(Q)$ son intérieur. Nous allons démontrer le suivant

Lemme. *Si*

(1) $$\overline{E}=Q,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble E ne soit pas connexe est qu'il existe un continu C à propriété:

(2) $$C \subset J(Q)-E,$$

et tel que la projection $\Pi_x(C)$ de C sur l'axe des x ne se réduise pas à un seul point.

Dém. I. *La nécessité.*

Supposons que l'ensemble E n'est pas connexe: il existe donc deux ensembles séparés non-vides A et B tels que $E=A+B$, et on vérifie sans peine, l'ensemble $E \cdot J(Q)$ étant, d'après (1), dense dans le carré fermé Q, que l'on a: $A \cdot J(Q) \neq 0$, $B \cdot J(Q) \neq 0$. Désignons par a et b deux points de E tels que

(3) $$a \in A \cdot J(Q), \quad b \in B \cdot J(Q),$$

et soit C_0 un continu qui coupe le carré Q entre les points a et b et satisfait à la condition

(4) $$C_0 \subset Q-E\ ^{1)}.$$

Désignons par $\mathscr{K}$ la classe de tous les sous-continus de C_0 *situés entièrement dans* $J(Q)$ (cette classe n'est pas vide d'après (3) et la définition de C_0); je dis *qu'il existe un continu C appartenant à $\mathscr{K}$ et tel que la projection $\Pi_x(C)$ de C sur l'axe des x ne se réduit pas à un seul point.*

En effet, supposons le contraire: tout continu de la classe $\mathscr{K}$ est donc situé sur un segment vertical $\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x=\alpha,\ 0 \leqslant y \leqslant 1]$ (le nombre α remplissant toujours l'inégalité $0<\alpha<1$), il est par conséquent lui-même *un segment vertical fermé* (qui peut se réduire à un seul point). Désignons par d le segment variable de la famille $\mathscr{K}$, par $l(d)$ sa longueur.

On a évidemment

(5) $$\operatorname*{Sup}_{d \in \mathscr{K}} \{l(d)\} = \eta < 1,$$

car l'égalité $\eta=1$ entraînerait l'existence d'un nombre α_0 tel que $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1$ et d'un segment $\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x=\alpha_0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1]=V_{\alpha_0}$ remplissant la relation $V_{\alpha_0} \cdot E \neq 0$, en même temps que $V_{\alpha_0} \subset C_0$, ce qui est impossible en vertu de (4).

Soit donc R un rectangle fermé à côtés parallèles aux axes des coordonnées, inscrit dans Q, contenant a et b *et tel que sa hauteur h remplit l'inégalité*

(6) $$\eta<h<1.$$

L'ensemble fermé $C_0 R$ coupe R entre les points a et b; S désignant une composante de $C_0 R$ qui coupe R entre a et b, on a $S \in \mathscr{K}$, donc, en vertu de notre supposition, S est un segment vertical. Or, sa longueur étant selon (5) et (6) $<h$, *il n'est pas une coupure de R.*

Cette contradiction prouve l'existence dans $\mathscr{K}$ d'un continu C dont la projection sur l'axe des x ne se réduit pas à un seul point. Tout continu de la classe $\mathscr{K}$ remplissant par définition la relation (2), on voit que la condition du Lemme est nécessaire.

II. *La suffisance.*

Supposons que le continu C satisfait aux conditions du Lemme: il existe donc deux nombres x_1 et x_2 remplissant l'inégalité $0<x_1<x_2<1$ et tels que

(7) $$\Pi_x(C)=[x_1,\ x_2].$$

Posons

(8) $$H=\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y=f(x)],$$

(9) $$L=\underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1],$$

[1]) D désignant la coupure du plan, donc aussi du carré Q, entre les points a et b, disjointe de E (qui existe en vertu du théorème XXXVII, p. 233, Fund. Math. t. II. (Knaster et Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*)), DQ contient une composante C_0 qui coupe Q entre a et b.

et soient λ_1, resp. λ_2, la borne inférieure, resp. supérieure, de l'ensemble d'ordonnées y des points (x, y) appartenant à C.

On a d'après (2):

$$(10) \qquad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 1.$$

Il existe donc, d'après la relation (1), deux points $a = (\xi_1, \eta_1)$ et $b = (\xi_2, \eta_2)$ tels que

$$(11) \qquad a \in H, \quad b \in H,$$

$$(12) \qquad x_1 < \xi_1 < x_2, \quad x_1 < \xi_2 < x_2,$$

$$(13) \qquad 0 < \eta_1 < \lambda_1, \quad \lambda_2 < \eta_2 < 1.$$

Or, le continu C coupe (d'après les relations (7), (9), (12), (13) et la définition des nombres λ_1 et λ_2) l'ensemble L entre les points a et b, d'où il résulte, en vertu de (8), (9), (11) et de l'égalité $C \cdot H = 0$, que l'ensemble H est *non-connexe*.

Soient donc A et B deux ensembles tels que

$$(14) \qquad H = A + B,$$

$$(15) \qquad \overline{A}B + A\overline{B} = 0,$$

$$(16) \qquad A \neq 0 \neq B.$$

Définissons les ensembles H_1 et H_2 comme il suit:

$$(17) \qquad H_1 = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[0 \leqslant x < x_1, \quad y = f(x)],$$

$$(18) \qquad H_2 = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x_2 < x \leqslant 1, \quad y = f(x)].$$

Il résulte des formules (17) et (18) que les relations

$$(19) \qquad (x, y) \in \overline{H}_1, \quad \text{resp.} \quad (x, y) \in \overline{H}_2,$$

entraînent les inégalités

$$(20) \qquad x \leqslant x_1, \quad \text{resp.} \quad x \geqslant x_2.$$

Remarquons en outre que les abscisses x des points (x, y) appartenant à l'ensemble $\overline{A} + \overline{B}$, remplissent d'après (8) et (14) l'inégalité évidente $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Considérons maintenant la décomposition (14); il ne peuvent se présenter (d'après (11)) que les deux cas suivants:

1. Les points $p = (x_1, f(x_1))$ et $q = (x_2, f(x_2))$ appartiennent tous deux à un des ensembles de la décomposition (14), soit $p \in A$, $q \in A$.

2. Les points p et q remplissent les relations $p \in A$, $q \in B$.

Posons dans le premier cas:

$$M = H_1 + A + H_2,$$
$$N = B$$

et dans le second:

$$M = H_1 + A,$$
$$N = B + H_2.$$

On déduit aisément des formules (14)—(20) et de la remarque ci-dessus que l'on a en tout cas

$$E = M + N,$$
$$\overline{M}N + M\overline{N} = 0,$$
$$M \neq 0 \neq N,$$

ce qui prouve que l'ensemble E n'est pas connexe.

La condition de notre Lemme est donc suffisante.

Ceci posé, nous allons démontrer notre théorème.

1. Désignons par $\omega(x)$ la fonction de **Cesàro**; on sait que c'est une fonction de classe 2 de **Baire** définie pour tout x remplissant l'inégalité $0 \leqslant x \leqslant 1$ et donné sous la forme du dévelloppement dyadique *essentiellement infini*

$$(21) \qquad x = \frac{\alpha_1(x)}{2} + \frac{\alpha_2(x)}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n(x)}{2^n} + \ldots$$

par la formule

$$(22) \qquad \omega(x) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \ldots + \alpha_n(x)}{n}.$$

Définissons la fonction $f(x)$ par les conditions suivantes:

$$(23) \qquad f(x) = \omega(x), \quad \text{si} \quad \omega(x) < 1,$$

et

$$(24) \qquad f(x) = 0, \quad \text{si} \quad \omega(x) = 1,$$

et posons

$$F(x) = \frac{1}{f(x) - 1}. \tag{25}$$

La fonction (finie) $F(x)$ est, d'après (22), (23), (24) et (25), définie pour tout x de l'intervalle $I = [0, 1]$. Je dis que c'est la fonction cherchée.

En premier lieu, la fonction $F(x)$ est de classe 2 de Baire. Pour l'établir, il suffit évidemment (d'après la transformation (25)) de démontrer que la fonction $f(x)$ est de classe 2 de Baire.

Considérons à cet effet les fonctions $\alpha_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ données par le développement (21): chacune d'elles étant définie univoquement dans l'intervalle I et possédant dans cet intervalle un nombre fini de points de discontinuité, il en est de même pour les fonctions

$$\varphi_n(x) = \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \ldots + \alpha_n(x)}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

Désignons par P l'ensemble de tous les points de discontinuité des fonctions $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et posons

$$T = I - P. \tag{27}$$

L'ensemble P étant dénombrable, T est un G_δ.

On en conclut, d'après (22), (26) et (27), que

$$\omega(x/T) = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, \varphi_n(x/T)\ ^{1)}, \tag{28}$$

les fonctions $\varphi_n(x/T)$ étant *continues*; il en résulte [2]) que $\omega(x/T)$ est une fonction de classe 2 de Young par rapport à l'espace T, plus précisément (suivant M. Hahn) une fonction g_2 par rapport à T, c'est-à-dire une fonction dont l'égalité caractéristique est donnée pour tout r réel par la formule

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x} [\omega(x/T) < r] = F_\sigma(T)\ ^{3)}. \tag{29}$$

On en déduit facilement que

[1]) Ces symboles désignent, d'après Hausdorff, les „Teilfunktionen" de $\omega(x)$, resp. $\varphi_n(x)$, définies pour $x \in T$.

[2]) V. Hahn. *Theorie d. reellen Funktionen*, p. 369, Théorème XIV.

[3]) Ce qui veut dire: un ensemble F_σ relatif à T.

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x} [\omega(x) = 1,\ x \in T] = \mathop{\mathrm{E}}_{x} [\omega(x/T) = 1] = G_\delta(T)\ ^{1)} = G_\delta,$$

et

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x} [\omega(x) = 1] = G_\delta + \textit{un ens. dénombrable} = G_{\delta\sigma} = F_{\sigma\delta}. \tag{30}$$

La formule (30) donne d'après (23) et (24)

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x} [f(x) > r] = G_{\delta\sigma}, \quad \mathop{\mathrm{E}}_{x} [f(x) < r] = G_{\delta\sigma},$$

pour tout r réel, ce qui prouve que la fonction (partout discontinue) $f(x)$ est de classe 2 de Baire.

Nous démontrerons maintenant que l'image E de la fonction $F(x)$ est connexe.

Désignons par E_1 l'image de la fonction $\omega(x)$, par E_2 celle de la fonction $f(x)$. Les ensembles E et E_2 étant, d'après (23)—(25), homéomorphes, il suffit de démontrer que E_2 est connexe.

L'ensemble E_1 possède, comme on sait [2]), les propriétés suivantes:

1° *E_1 est dense dans le carré Q,*

2° *E_1 est connexe.*

L'ensemble E_2 est, d'après (23), (24) et 1°, *dense dans Q* et remplit en outre l'égalité $E_2 Q = E_1 Q$, d'où il résulte que tout continu C satisfaisant à la relation $C \subset J(Q) - E_2$, remplit nécessairement la relation $C \subset J(Q) - E_1$. Or, notre Lemme étant applicable à E_2, on en conclut que la non-connexité de E_2 entraîne celle de E_1, ce qui contredit 2°.

E_2 et, par conséquent, E est donc connexe, et il est évident que E est connexe irréductible entre les points $(0, F(0))$ et $(1, F(1))$. Or, cet ensemble ne contient aucune partie connexe bornée, car on a, d'après les formules (21)—(25):

$$|F(x)| < +\infty,$$

pour tout x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$, et

$$\mathrm{Inf}\,\{F(x)\} = -\infty$$

sur tout intervalle contenu dans I.

[1]) Ce qui veut dire: un ensemble G_δ relatif à T.

[2]) V. Vietoris, *Stetige Mengen.* Monatsh. f. Math. u. Physik, t. XXXI, p. 202—4.

La première partie de notre Théorème est ainsi démontrée.

2. Pour en démontrer la seconde, il suffit de remarquer que *si l'image géométrique d'une fonction possédant un point de continuité ne contient aucune partie connexe bornée, elle n'est pas connexe.*

On démontre cette propriété par un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la II-de partie de notre Lemme.

Notre Théorème est ainsi démontré complétement.

Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo: »Über die Definitheit in der Axiomatik«.

Von

Th. Skolem (Oslo).

Im 14. Bande dieser Zeitschrift hat E. Zermelo einen Aufsatz veröffentlicht, dessen Zweck es ist, den von ihm früher eingeführten Begriff der „definiten" Aussage [1]) axiomatisch zu begründen. Da ich in mehreren Punkten mit dieser Arbeit nicht einverstanden bin, sei es mir gestattet, einige Bemerkungen dazu zu machen.

Zermelo bespricht zuerst einige frühere Versuche zur Vermeidung oder Präzisierung des Begriffes „definit". Dabei fällt es mir besonders auf, daß er meinen Helsingforser Vortrag [2]) vom Jahre 1922 nicht zu kennen scheint, worin ich genau dieselbe Idee zur Verschärfung jenes Begriffes ausgesprochen habe wie Zermelo auf Seite 342 in seiner Arbeit. Freilich versucht Zermelo trotzdem auf Seite 343 einen etwas weiteren Begriff als ich zu bilden mittels der Festsetzung 4); aber gerade dieser Punkt ist sehr zweifelhaft, worauf ich bald zurückkommen werde. Der Unterschied zwischen dem Zermeloschen Begriff der Definitheit und dem meinigen besteht nur darin, daß ich die Quantifikationen nur auf die Argumente der Satzfunktionen und nicht wieder auf diese selbst anwende, abgesehen davon, dass ich den Begriff konstruktiv formuliert habe. Axiomatisch formuliert würde mein Definitheitsbegriff sich von dem Zermeloschen nur darin unterscheiden, daß 4) wegfällt. Merkwürdig scheint es

[1]) Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, Math. Ann. 65.

[2]) Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre (Vorträge gehalten auf dem 5-ten Kongress der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors 1922). Zitiert u. a. in der 2. (1923) und 3. (1928) Auflage von Fraenkels „Einleitung in d. Mengenlehre".