Über approximative Ableitungen bei Punkt- und Intervallfunktionen.

Von

J. Ridder (Baarn, Niederlande).

§ 1. *Es sei $f(x)$ eine auf einer (beschränkten) Menge E* (welche nicht meßbar zu sein braucht) *definierte, endlichwertige Funktion.* In einem Punkte x_0, wo die äußere Dichte von E gleich 1 ist, wird A eine approximative Ableitung von $f(x)$ sein, wenn es eine Teilmenge $E_1(x_0)$ von E gibt, welche in x_0 die äußere Dichte 1 hat, so daß unter Beschränkung auf die Punkte von $E_1(x_0)$:

$$A = \lim_{x=x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ist.

Nun läßt sich zeigen:

Wenn man von einer Nullmenge absieht, so sind an den verschiedenen Stellen x von E nur noch die folgenden zwei Fälle möglich: 1. *es existiert eine endliche approximative Ableitung;* 2. *die beiden oberen Derivierten (D^+f und D^-f) sind $+\infty$ und die beiden unteren Derivierten (D_+f und D_-f) $-\infty$* [1]).

Beweis: Nach einem Satze von S. Saks [2]) genügt es zu zeigen, daß in allen Punkten, wo nur zwei entgegengesetzte Derivierten endlich sind, auch eine endliche approximative Ableitung existiert, ausgenommen in den Punkten einer Teilmenge vom Maße Null.

[1]) Bei stetigen Funktionen und bei meßbaren Funktionen wurde ein etwas allgemeinerer Satz von A. Denjoy bzw. von A. Khintchine beweisen. Siehe A. Denjoy, Ann. Ec. Norm. (3) 33 (1916), p. 181, 182; 208, 209; A. Khintchine, Rec. math. Soc. Moscou XXXI (1922/24), p. 265—285 (russisch); A. Khintchine, Fund. Math. IX (1927), p. 212 e. 213.

[2]) Dieser lautet: Bei einer auf einer willkürlichen Menge E definierten, endlichwertigen Funktion sind, ausgenommen in den Punkten einer Nullmenge, in den übrigen Punkten nur die folgenden vier Fälle möglich: 1, $D^+ = D^- = +\infty$, $D_+ = D_- = -\infty$; 2. $D^+ = D_+ = D^- = D_- =$ endlich; 3. $D^+ = +\infty$, $D_- = -\infty$, $D_+ = D^- =$ endlich; 4. $D^- = +\infty$, $D_+ = -\infty$, $D_- = D^+ =$ endlich. Siehe S. Saks, Fund. Math. V (1924), p. 98—104. Einen weiteren Beweis gaben wir in einer Mitteilung „Über Derivierten und Ableitungen" (vermutlich erscheinend in den Fund. Math.). Der Satz wurde für stetige Funktionen schon von A. Denjoy bewiesen [s. Journal de math. (7) 1 (1915), p. 174—195] und für meßbare Funktionen von G. C. Young [s. z. B. Hobson, Theory of functions I, §§ 291 - 299].

Wenn die Ausnahmemenge positives äußeres Maß hätte, so würden ihre Teilmengen $U[D^+ = D_- = \text{endlich}]$ und $V[D_+ = D^- = \text{endlich}]$ nicht beide ein Maß Null haben können. Es sei $m_a(V) > 0$. $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ sei eine nach $+\infty$ konvergierende Folge von positiven Zahlen und V_k sei die Menge derjenigen Punkte von V, in denen $D_+f(x) > -n_k$ ist. Dann wird $V = \lim\limits_{k=\infty} V_k$ sein. Somit läßt sich eine natürliche Zahl ν bestimmen, für die die Menge V_ν positives äußeres Maß hat.

Bei ganzem, positivem l sei $V_{\nu,l}$ diejenige Teilmenge von V_ν, in deren Punkten ξ aus $0 < h < \frac{b-a}{l}$ folgt:

$$f(\xi+h) - f(\xi) \geqq -n_\nu \cdot h, \tag{1}$$

wobei $\xi + h$ zu E gehören soll. Da $V_\nu = \lim\limits_{l=\infty} V_{\nu,l}$ ist, existiert ein Wert λ, für den die Menge $V_{\nu,\lambda}$ positives, äußeres Maß hat.

Wir teilen das Intervall (a, b), das die Menge E enthält, in eine endliche Anzahl von nicht übereinander greifenden Intervallen $i_1, \ldots, i_p$ deren Längen alle kleiner sind als $\frac{b-a}{\lambda}$. Dann muß mindestens eines unter ihnen eine Teilmenge $V^{(1)}_{\nu,\lambda}$ von $V_{\nu,\lambda}$ enthalten mit $m_a(V^{(1)}_{\nu,\lambda}) > 0$. Für alle zu $V^{(1)}_{\nu,\lambda}$ gehörenden Punkte ξ und $\xi + h$ (h positiv) wird die Ungleichung (1) gelten.

Auf $V^{(1)}_{\nu,\lambda}$ ist die Funktion $f(x) + n_\nu \cdot x$ eine monotone (nichtabnehmende) Funktion. Läßt man die Funktionswerte in den Punkten von $(E - V^{(1)}_{\nu,\lambda})$ außer acht, so werden die zugehörigen unteren Derivierten auf $V^{(1)}_{\nu,\lambda}$ beide $\geqq 0$ sein. Daraus folgt nach dem Satze von S. Saks, daß, wenn man nur die Funktionswerte von $f(x)$ auf $V^{(1)}_{\nu,\lambda}$ betrachtet, $f(x)$ fast überall auf dieser Menge eine endliche Ableitung hat. Da die äußere Dichte von $V^{(1)}_{\nu,\lambda}$ in einem Kerne von gleichem äußerem Maße den Wert 1 hat und $V_{\nu,\lambda}^{(1)}$ zu E gehört, hat $f(x)$, auf E betrachtet, eine endliche approximative Ableitung [3]) in den Punkten einer Teilmenge von V. Dies widerspricht jedoch unsere Annahme, daß auf V keine endliche approximative Ableitung existieren würde.

§ 2. *Es ist möglich, daß in den Punkten einer Menge von positivem äußerem Maße beide Fälle des Satzes von § 1 gleichzeitig erfüllt werden.* Das zeigt das Beispiel einer (meßbaren) Funktion $f(x)$, welche im Intervall $(0 \leqq x \leqq 1)$ für alle irrationalen x Werte gleich Null genommen wird, während $f(x)$ für die rationalen Werte von x wie folgt definiert wird; man ordne diese x Werte in eine abzählbare Folge $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, derartig daß jede der Mengen $(x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}, \ldots)$ und $(x_2, x_4, \ldots, x_{2k}, \ldots)$ im Intervall überall dicht liegen, und nehme $f(x_n) = +n$ für gerades n und $= -n$ für ungerades n.

Wenn die Menge M, auf der [im Satze des § 1] *nur der zweite Fall gilt, positives äußeres Maß hat, so wird auf jeder Teilmenge N von M mit positivem äußerem Maße in allen Punkten, mit Ausnahme derjenigen einer Nullmenge N_1, der zweite Fall auch dann gültig bleiben, wenn dabei die extremen Derivierten bestimmt werden nur unter Benutzung der Funktionswerte in den Punkten von N.*

Denn sonst müßte nach dem Satze des § 1 die Ausnahmemenge N_1 eine Teilmenge N_2 mit $m_a(N_2) = m_a(N_1) > 0$ enthalten, auf der eine endliche approximative Ableitung in allen Punkten existierte.

§ 3. Die vorherigen Sätze sind Spezialfälle von allgemeineren, für gewisse Intervallfunktionen gültigen Theoremen.

Bei einer in (a, b) liegenden Punktmenge E von positivem äusserem Maße (a und b gehören zu E) sei eine endlichwertige Intervallfunktion $\Phi(I)$ definiert in den Intervallen, deren Endpunkte zu E gehören; wir nennen Φ dann definiert auf E. Die vier oberen und unteren Derivierten in einem Punkte von E, welcher auf beiden Seiten Grenzpunkt von E ist, werden definiert mittels den Intervallen $(x, x+h)$, und $(x-k, x)$, wobei $x+h$ und $x-k$ zu E gehören sollen.

Zur Definition des oberen Integrals von Φ über (a, b) wird das Intervall mittels zu E gehörenden Teilungspunkten in endlich viele Unterintervalle $I_1, \ldots, I_n$ zerlegt. Bei willkürlich positivem δ kann

[3]) Ihr Wert ist gleich dem gemeinsamen Werte von $D_+ f(x)$ und $D^- f(x)$.

man diejenigen Teilungen betrachten, wobei Intervalle I_k mit einer Länge $> \delta$ nur zugelassen sind, wenn sie keine Punkte von E im Innern enthalten oder nur solche, deren Abstand zu einem Endpunkte von $I_k \leqq \frac{\delta}{2}$ ist. Wenn S_δ die obere Schranke aller zugehörigen Summen $\sum_{k=1}^{n} \Phi(I_k)$ ist, so werden wir das obere Integral über (a, b) definieren als $\lim_{\delta=0} S_\delta$.

Wenn s_δ die untere Schranke jener Summenwerte ist, wird $\lim_{\delta=0} s_\delta$ das untere Integral über (a, b) definieren.

Wenn oberes und unteres Integral über (a, b) endlich und einander gleich sind, nennen wir die Intervallfunktion integrierbar über (a, b). Sie wird es dann auch sein über jedes Teilintervall von (a, b) dessen Endpunkte zu E gehören [4]).

Führen wir auch bei Intervallfunktionen eine approximative Ableitung ein (vgl § 1), so läßt sich, wie in § 1 bei Punktfunktionen, zeigen:

Es sei $\Phi(I)$ eine integrierbare Intervallfunktion, definiert auf einer Menge E, welche im Intervall (a, b) enthalten ist und deren äußeres Maß > 0 ist.

Wenn man von einer Nullmenge absieht, so sind an den verschiedenen Stellen x von E nur noch die folgenden zwei Fälle möglich: 1. es existiert eine endliche, approximative Ableitung; 2. die beiden oberen Derivierten sind $+\infty$ und die beiden unteren Derivierten $-\infty$.

[4]) Vgl S. Saks, Fund. Math. X (1927), pp. 211—214. Es läßt sich zeigen auf die in Fußn. 2, Zweites Zitat enthaltene Methode: *Wenn auf einer in (a, b) liegenden Menge E von positivem äußerem Maße (a und b gehören zu E) eine in (a, b) integrierbare Intervallfunktion $\Phi(I)$ definiert ist, so sind, ausgenommen in den Punkten einer Nullmenge, in den übrigen Punkten von E nur die folgenden vier Fälle möglich: 1. $D^+ = D^- = +\infty$, $D_+ = D_- = -\infty$; 2. $D^+ = D_+ = D^- = D_- =$ endlich; 3. $D^+ = +\infty$, $D_- = -\infty$, $D_+ = D^- =$ endlich; 4. $D^- = +\infty$, $D_+ = -\infty$, $D_- = D^+ =$ endlich.* Der Satz wurde schon von H. S. Saks bewiesen für den Fall, daß E mit dem Intervall (a, b) zusammenfällt; auch sein Beweisverfahren ist in diesem Fall anwendbar [vgl. Fund. Math. X, p. 215—220]. Im weiteren brauchen wir auch den folgenden Satz: *Wenn $\Psi(I)$ das Integral der Intervallfunktion $\Phi(I)$ des vorigen Satzes darstellt, wird in den verschiedenen Punkten x von E, mit Ausnahme einer Nullmenge, nur möglich sein: $D^+\Psi = D^+\Phi$, $D_+\Psi = D_+\Phi$, $D^-\Psi = D^-\Phi$, $D_-\Psi = D_-\Phi$.* Auch dieses Resultat wurde von H. Saks, l. c., bewiesen für den Fall, daß die Menge E ein abgeschlossenes Intervall ist.

Auch der Inhalt des § 2 läßt sich bei integrierbaren Intervallfunktionen übertragen.

§ 4 Schließlich läßt sich der letzte Satz noch auf folgende Weise ausbreiten:

$\Phi(I)$ sei eine integrierbare Intervallfunktion, definiert auf einer Menge E, welche im Intervall (a, b) enthalten ist; $\Psi(I)$ sei das zugehörige Integral.

Wenn man von einer Nullmenge absieht, so sind an den verschiedenen Stellen x von E nur die folgenden drei Fälle möglich: A. *Φ und Ψ haben endliche Ableitungen, welche einander gleich sind;* B. *Φ und Ψ haben endliche approximative Ableitungen, welche einander gleich sind;* C. $D^+\Phi = D^-\Phi = D^+\Psi = D^-\Psi = +\infty$, $D_+\Phi = D_-\Phi = D_+\Psi = D_-\Psi = -\infty$.

Man kann erstens das Lemma beweisen: „Bei einer integrierbaren Intervallfunktion existiert in fast allen Punkten, wo zwei entgegengesetzte extreme Derivierten (D^+, D_- oder D^-, D_+) endlich und einander gleich sind, eine approximative Ableitung mit demselben Werte". Das folgt aus dem Beweise von § 1, übertragen auf den Fall integrierbarer Intervallfunktionen. Darauf folgt der eigentliche Beweis.

Das Integral Ψ ist beschränkt additiv und somit auch eine auf E integrierbare Intervallfunktion. Nach dem ersten Satze von Fußn. 4 kann man, bei Vernachlässigung einer Nullmenge, auf E für Φ und Ψ nur drei Fälle unterscheiden: 1. $D^+ = D^- = +\infty$, $D_+ = D_- = -\infty$; 2. $D^+ = D_+ = D^- = D_- =$ endlich; 3. $D_+ = D^- =$ endlich oder $D_- = D^+ =$ endlich.

Nach dem zweiten Satze von Fußn. 4. können die Mengen, in deren Punkten der erste Fall für Φ und für Ψ gilt, sich nur in einer Nullmenge unterscheiden. Nach jenem Satze kann auch die Menge, auf der Φ eine Ableitung hat, nur eine Nullmenge enthalten, in deren Punkten Ψ nicht eine Ableitung von gleichem Werte hat; und umgekehrt.

Endlich ist in allen Punkten der Mengen 3, mit Ausnahme einer Nullmenge, $D_+\Phi = D^-\Phi = D_+\Psi = D^-\Psi$ oder $D_-\Phi = D^+\Phi = D_-\Psi = D^+\Psi$. Da Φ und Ψ, nach dem Lemma, in fast allen diesen Punkten approximative Ableitungen haben gleich zwei dieser extremen Derivierten, folgt, daß die Mengen 3 nur Nullmengen enthalten können, in deren Punkten Φ und Ψ nicht einander gleiche approximative Ableitungen besitzen.

Sur un ensemble connexe plan ne contenant aucune partie connexe bornée.

Par

G. Poprougénko (Varsovie).

M. Mazurkiewicz a démontré en 1921 [1]) qu'il existe une fonction d'une variable réelle dont l'image géométrique est un ensemble connexe ne contenant aucune partie connexe bornée. La démonstration de M. Mazurkiewicz est *non-effective* [2]). L'exemple effectif d'une telle fonction, donné ensuite par MM. Knaster et Kuratowski [3]) est encore très compliqué au point de vue de ses propriétés analytiques, qui restent indéterminées.

Or, le problème se pose: *est ce qu'on peut nommer une fonction représentable analytiquement dont l'image possède la singularité en question?*

Nous nous proposons de donner ici la solution effective *la plus simple* de ce problème. Nous énonçons à ce but le théorème suivant:

Théorème. 1. *Il existe une fonction de classe 2 de Baire définie dans l'intervalle $I = [0, 1]$* [4]) *dont l'image géométrique*

α) est connexe irreductible entre deux points,

β) ne contient aucun sous-ensemble connexe borné.

[1]) *Sur l'existence d'un ensemble plan connexe ne contenant aucun sous-ensemble connexe borné*, Fund. Math, t. II, p. 96.

[2]) Sa construction s'appuit en effet sur l'existence des correspondances biunivoques provenant de l'égalité des puissances des deux ensembles (v. op. cit., p. 99).

[3]) V. Knaster et Kuratowski, *Sur les ensembles connexes.* Fund. Math., t. II, p. 245—7 (Exemples β) et β_1)).

[4]) Le symbole $[a, b]$ désigne l'intervalle linéaire fermé à extrémités a et b $(a < b)$.