Sur l'accessibilité des continus plans.

(Extrait d'une lettre à M. Mazurkiewicz).

Par

G. T. Whyburn (Wien).

... Je viens de lire vos deux articles dans le tome XIV des Fundamenta Mathematicae au sujet de l'accessibilité des points d'un continu plan indécomposable... J'y trouve quelques connexions avec mes résultats sur l'accessibilité et je vous envois mes remarques qui, j'espère, seront d'intérêt pour vous.

Le lemme 3 de votre première Note (pp. 109—110) n'est qu'un cas particulier du théorème suivant que j'ai publié dans le Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 35, Jan. 1929, pp. 91—93, th. 6:

Soit $\mathfrak{G}$ une famille non dénombrable de sous-ensembles disjoints et connexes d'un ensemble connexe M dans un espace métrique séparable, telle que pour tout élément G de $\mathfrak{G}$ l'ensemble $M-G$ n'est pas connexe. Alors il existe une sous-famille $\mathfrak{G}^*$ de $\mathfrak{G}$ contenant tous les éléments de $\mathfrak{G}$ sauf une infinité dénombrable et telle que tout couple d'éléments de $\mathfrak{G}^*$ est séparé dans M par une infinité non dénombrable d'éléments de $\mathfrak{G}^*$.

Quant à votre second article, je trouve qu'à l'aide de mes résultats votre théorème principal peut être énoncé dans une forme différente et plus générale, de sorte à prouvoir l'appliquer aussi aux continus décomposables. Enonçons d'abord deux théorèmes suivants.

(I) *Supposons que pour un continu plan borné M et pour une composante D du complément de M il existe dans M une famille non dénombrable $\mathfrak{G}$ de continus disjoints dont chacun contient deux continus (ou points) disjoints accessibles de D. Alors pour tout continu G de $\mathfrak{G}_0$, sauf une infinité dénombrable, l'ensemble $M-G$ n'est pas connexe.*

(II) *Supposons qu'un continu plan borné M contienne une famille non dénombrable $\mathfrak{G}$ de continus disjoints dont chacun est accessible des deux composantes distinctes du complément de M. Alors il existe une sous-famille non dénombrable $\mathfrak{G}_0$ de $\mathfrak{G}$ telle que pour tout couple G_1 et G_2 d'éléments de $\mathfrak{G}_0$ l'ensemble $M-(G_1+G_2)$ n'est pas connexe.*

On démontre (I) facilement, en appliquant votre lemme 2, p. 271. J'ai démontré (II) dans une forme un peu modifiée pour les *points accessibles* dans les Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 35, 1928, pp. 289—304, th. 1 et 4, et j'en ai donné l'extension immédiate pour les *continus accessibles* dans les Fundamenta Mathematicae, tome XIV, pp. 311—326, § 5, th. 9 et 12.

Supposons maintenant que le continu plan borné M contienne une famille non dénombrable de semi-continus disjoints dont chacun contient au moins deux continus (ou points) disjoints et accessibles. On voit aisément que l'hypothèse d'un au moins des théorèmes (I) et (II) doit être satisfaite et, en conséquence, que dans chacun de ces cas il existe deux sous-continus de M tels que le complément de leur somme dans M n'est pas connexe. De plus, dans les deux cas $\mathfrak{G}_0$ contient une sous-famille $\mathfrak{G}'$ différant de $\mathfrak{G}_0$ par une infinité d'éléments tout au plus dénombrable et dont tout élément est un sous-continu régulier de M relatif à $\mathfrak{G}'$ (pour le premier cas voir mon article cité du Bull. of the Amer. Math. Soc., th. 10, 11 et 12; pour le second cas voir mon article cité des Fund. Math., th. 10). Ainsi M est nécessairement non seulement décomposable, mais aussi, comme il est démontré dans mes articles précités, on peut le décomposer à l'aide de la famille $\mathfrak{G}'$ en sous-continus de façon que cette décomposition soit semi-continue et ait pour hyperespace une courbe régulière (au sens de Menger).

Vienne, le 6 février 1930.