Je profite aussi de l'occasion pour rectifier ma démonstration (d'un théorème dû à M. Lindenbaum) publiée dans la même note (p. 219), cette démonstration contenant une lacune:

Lorsque, du fait que le point D est situé dans le plan β je conclus, d'après l'ax. I 6, que la droite $(C'D)$ coupe la droite (AB) au point E (p. 219, ligne 14) je me sers implicitement de l'inégalité $E \neq C'$, qui n'a pas été démontrée dans le texte. On peut la prouver aisément en utilisant l'axiome I 2. Si l'on avait, en effet, $E = C'$, c.-à-d. si le point C' était situé sur la droite (AB), cette droite aurait avec la droite (AC) deux points différents A, C' en commun ($A \neq C'$, d'après II 3_3), les droites (AB) et (AC) seraient donc identiques d'après I 2 et le point C serait situé sur la même droite que les points A, B — ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Remarques sur une question de la méthode axiomatique.

Par

Adolphe Lindenbaum (Varsovie).

1. Dans la note précédente [1]), M-lle Weinlös m'a bien voulu nommer comme celui qui avait attiré son attention sur l'incompatibilité d'une interprétation contenue dans sa Thèse [2]) avec un certain résultat de M. Rosenthal [3]) concernant les axiomes de la Géométrie dus à Hilbert. M. Rosenthal, étant d'avis que la remarque critique qui se trouve à ce propos dans la Thèse de M-lle Weinlös [4]) peut donner lieu à des malentendus, reprend la question [5]) pour développer son point de vue, ce qui me donne occasion d'exposer aussi le mien.

Je vais envisager la question en particulier sous son aspect méthodologique [6]); donc je vais me servir également du langage et de certains résultats de la logique mathématique, en les empruntant p. ex. (pour les raisons pratiques seulement) au livre de Hilbert et Ackermann: „*Grundzüge der theoretischen Logik*".

[1]) S. Weinlös: *A propos de la note de M. Rosenthal*... etc., ce volume pp. 310—312.

[2]) S. Weinlös: *Sur l'indépendance des axiomes de coïncidence et de parallélité*... etc., Fund. Math. **11** (1928), pp. 206—221.

[3]) A. Rosenthal: *Über das dritte Hilbertsche Axiom der Verknüpfung*, Math. Ann. **69** (1910), pp. 223—226.

[4]) p. 218.

[5]) A. Rosenthal: *Eine Bemerkung zu der Arbeit von Frl. S. Weinlös*... etc., Fund. Math. **13** (1929), pp. 304—306.

[6]) Malgré le caractère circonstanciel et transitoire de la présente note, je dois avouer que quelques points de vue exprimés ici sont sans doute un reflet bon ou mauvais de ce que j'ai appris de MM. Leśniewski et Łukasiewicz.

2. Les études sur les fondements de la Géométrie ne peuvent être taillés sur grande mesure sans une solide base logique; — elles présentent cependant tant d'autres côtés attractifs qu'il arrive parfois (ce qui est bien naturel) que le facteur logique y est un peu négligé.

Le mérite du livre de Hilbert sur les principes de la Géométrie est si considérable et incontestable que l'on peut dire sans crainte de le diminuer: en ce qui concerne la précision d'achèvement, les axiomes de Hilbert ne sont pas sans reproche. C'est pourquoi une analyse approfondie p. ex. de leur indépendance, où cet achèvement est indispensable, n'est pas à sa place sans un travail préalable qui aurait précisé toute la construction du système; or, en réalité, on en n'a pas toujours tenu compte, ce qui a pour conséquence diverses complications et inconvénients.

Le sujet qui nous intéresse ici a peut-être son origine dans une sorte de méfiance que l'on éprouve encore quelquefois envers la notion moderne de proposition conditionnelle (implication) „si X, alors Y“: en symboles

(1) $$X \to Y;$$

ou — dans la forme plus importante —

(2) $$(x)\,(F(x) \to G(x)).$$

La logique mathématique nous apprend que si „X“ (dit „antécédent“ de l'implication) est une proposition fausse, la proposition (1) est vraie; si „$(Ex)\,F(x)$“ est une proposition fausse, (2) est aussi une proposition vraie. — Les Américains disent alors que les formules (1) et (2) sont remplies „*vacuously*“.

Il existe des opinions si naïves sur cette question qu'il serait superflu de les discuter ici, mais il est à remarquer que dans les recherches sur les fondements axiomatiques de la Géométrie, on les rencontre fréquemment.

Dans la note „*Sur l'état actuel de la question sur les fondements de la géométrie euclidienne*“ [7]), M. Tchernouchenko écrit: „*die*

[7]) I. Tchernouchenko: Commun. de la Soc. math. de Kharkow (4) **2** (1928), pp. 87—112 — en russe (avec un résumé en allemand). Les défauts logiques privent ce travail assez laborieux de valeur.

Benutzung von „vacuously“ ist bei den Unabhängigkeitsbeweisen unerlaubt“; ses arguments sont les suivants:

I (p. 93). Si l'on emploie des interprétations où quelques axiomes sont satisfaits „*vacuously*“, on parvient à la possibilité de démontrer que chaque axiome dans un système arbitraire est indépendant: en effet, il suffit de se servir de l'ensemble vide, comme interprétation de la classe d'objets introduits dans le système. *Sic!*

II (pp. 90—91). Si un théorème a la forme (2), il contient implicitement l'exigence que le théorème

(3) $$(Ex)\,F(x)$$

soit vrai aussi, alors faut-il toujours le savoir ou bien démontrer; parfois on le fait plus tard. Mais si la proposition (3) se montre fausse, le théorème (2) perd sa place dans le système. Pour tout axiome, son antécédent est accepté comme „donné“. — A propos de cet argument, v. encore **3** et **4**.

III (p. 90). M. Tch. cite (de façon très obscure) une interprétation empruntée au cours litographié, qui m'est inaccessible, de Hilbert [8]): elle ne satisfait pas à l'axiome II 4 [9]), tandis qu'elle satisfait aux axiomes II 1—3 et, comme il semble, à I 1—7 aussi (partiellement „*vacuously*“); M. Tch. est d'opinion qu'elle remplit encore „*vacuously*“ l'axiome II 5, ce qui est en contradiction avec le résultat connu dû à M. E. H. Moore [10]), d'après lequel II 4 est une conséquence des autres axiomes des groupes I et II. De là — la conclusion de M. Tch. que l'emploi de „*vacuously*“ est défendu...

Ici, se pourrait il que la circonstance suivante a joué son rôle:

(4) dans le système de Hilbert sans son „*Vollständigkeitsaxiom*“ V2, on ne peut pas démontrer [11]) qu'il existe un plan ou qu'ils existent trois points non situés sur une même droite.

[8]) *Elemente der Euklidischen Geometrie*, *Göttingen*, *Wintersemester 1898/9*.

[9]) Ici, je cite exceptionnellement la première édition des „*Grundlagen der Geometrie*“; dans la suite, que ce soit la quatrième édition de ce livre.

[10]) E. H. Moore: *On the projective axioms of geometry*, Trans. Am. Math. Soc. **3** (1902), pp. 142—158.

L'exemple de Hilbert était bien connu à M. Moore (v. l. c., p. 142, note „**)“).

[11]) V. Rosenthal [5])

Cependant, M. Moore fait usage consciemment de l'existence des plans (donc — en raison de I 3 — l'existence des trois points non collinéaires est assurée aussi), ce qui est déjà incompatible avec l'interprétation employée par M. Tch. (si j'en comprends quelque chose). M. Moore ajoute notamment (l. c.[10]), p. 144) l'axiome suivant („*a necessary addition*"): „*There exists at least one plane*" — et écrit: „*it is an implication of the remarks with which Hilbert introduces the axioms I*" (ce qui est probablement une allusion à l'„*Erklärung*" du § 1 des „*Grundlagen*" qui peut passer pour un axiome exigeant l'existence des points, des droites et des plans).

3. M. Rosenthal, auteur bien mérité dans le domaine des recherches axiomatiques sur la Géométrie, exprime également une certaine méfiance envers l'emploi de „*vacuously*", comme M. Tchernouchenko, mais ses arguments appartiennent déjà à un autre niveau. M. R. (l. c.[5])) introduit un postulat qu'il appelle „*Erfüllbarkeitsforderung*"[12]).

Voici la première explication que nous en donnons:

($\boldsymbol{E}$) *Les axiomes (d'une théorie T) de forme* (2) *ne sont pas admissibles, lorsque (dans la théorie T) la fonction „F(x)" n'est remplie pour aucun x.*

Convenons alors de dire que cette fonction, de même que la proposition (2), est *irréalisable*.

Après avoir motivé ce postulat, M. R. l'applique au cas relatif à son résultat précité[8]).

Or, le postulat ($\boldsymbol{E}$) est-il juste et désirable? Je ne le crois pas.

1°. Je suis d'accord avec M-lle Weinlös sur ce point qu'étant donné un domaine mathématique bien connu ayant la propriété

$$(5) \qquad (x)\,\overline{F}(x)$$

on arrange d'habitude ses axiomes de façon qu'ils n'aient pas la forme (2).

En fait, on obtiendrait autrement une forme peu ésthétique et compliquée sans aucune raison. Toutefois, je ne peux pas affirmer avec M. R. (M. Tch. énonce une thèse semblable) que

[12]) Le livre (cité à ce propos par M. R.) de M. Baldus ne m'est pas accessible.

l'axiome (2) soit dans ce cas superflu (*überflüssig und bedeutungslos*)[13]), mais uniquement qu'il peut être remplacé par un autre, plus court et plus simple, — précisément par la proposition (5) ou par la proposition $(\overline{Ex})\,F(x)$. La proposition (5) implique en effet l'axiome (2), car on a un théorème logique:

$$(x)\,\overline{F}(x) \rightarrow (x)\,(F(x) \rightarrow G(x))$$

qui prouve que la proposition (5) est aussi suffisante comme axiome. C'est pourquoi, en pratique, on évite aisément les axiomes irréalisables: qui veut construire un système d'axiomes simples, n'en choisira jamais des formes irréalisables.

La question s'impose, quelles sont alors les raisons pour insister sur le postulat ($\boldsymbol{E}$), si par lui-même il ne présente pas de grand intérêt et d'ailleurs il est presque toujours automatiquement respecté.

2°. Il est encore à remarquer (avec M-lle Weinlös) que lorsqu'on transforme une proposition en une autre qui lui est équivalente („*äquivalent*" et „*gleichwertig*" — d'après Hilbert et Ackermann), on peut d'un coup changer son rapport au postulat ($\boldsymbol{E}$)[14]): ce défaut d'invariance logique montre que — proprement dit — le postulat ($\boldsymbol{E}$) ne donne rien ou — tout au moins — que sa rédaction est encore insuffisante[15]).

3°. Il peut arriver (surtout lorsqu'on cherche à axiomatiser un domaine peu connu à l'heure actuelle) qu'il soit difficile ou même impossible de vérifier si une proposition est réalisable ou non. Est-ce vraiment nécessaire de demander que cette question soit résolue de suite?[16])

[13]) On peut construire aisément des exemples où il en est autrement: p. ex. l'axiome II 1 de Hilbert peut être remplacé par le suivant (qui est irréalisable):

Si A, B et C sont les points d'une droite, et B est entre A et C, mais n'est pas entre C et A, alors A est entre B et C.

[14]) La proposition (2) peut être écrite p. ex. dans la forme

$$(x)\,(\overline{F}(x) \vee G(x))$$

(etc.), à laquelle le postulat ne s'applique point. Réciproquement, une proposition arbitraire peut être transformée („*gleichwertig*") en une autre qui est en conflit avec le postulat.

[15]) Des difficultés semblables naissent quand on cherche à distinguer les propositions générales des propositions existentielles, ou positives — des négatives.

[16]) L'analogie suivante („avec la vie pratique", mais... très peu cohérente) se présente ici:

Lorsqu'on introduit dans un pays de nouvelles lois munies de sanctions pé-

4. Il est clair que le postulat (E) n'est pas un axiome: il exige uniquement que les axiomes jouissent d'une certaine propriété formelle (les axiomes de Hilbert jouissant de cette propriété, on pourrait même dire que dans ce cas le postulat n'y peut rien apporter).

Or, on peut le concevoir tout autrement, notamment comme une *règle*, „*formale* (*Grund-*) *Regel zur Ableitung richtiger Formeln*", „*inhaltliches Axiom*" (Hilbert-Ackermann, chap. I, § 10), „*Direktive*" [17]); à savoir:

(E') *Si l'on a un axiome de forme* (2), *on peut énoncer aussitôt comme théorème la proposition de forme* (3).

Cette règle va beaucoup plus loin que le postulat (E), mais son acceptation donne lieu aux nouvelles objections. —

4⁰. Les règles de la sorte (appelées encore „*règles de procédé*", en allemand „*Schlussregeln*", en anglais „*directions*") ne sont nécessaires que pour les systèmes axiomatiques de nature logique. — On sait qu'un système complet de logique une fois bien fondé, des règles nouvelles deviennent superflues [18]) pour les systèmes mathématiques proprement dits; s'il n'en est pas ainsi, la logique est insuffisante (v. Hilbert-Ackermann, p. 22, lignes 15—17). Dans la Géométrie avec un bon système d'axiomes, on n'a besoin d'aucune règle spéciale; en particulier, on obtient toutes les propositions vraies du type (3) sans ces moyens artificiels. Et il est naturel de demander que l'on n'introduise des règles qu'à condition qu'elles apportent quelque profit.

5⁰. Si l'on a affaire à une théorie axiomatique T non-catégorique (pensons p. ex. à la Géométrie à n dimensions où l'on ne spécifie pas le nombre n) admettant une série de différentes interprétations

nales (ces lois ayant aussi — on peut dire — la forme des propositions conditionnelles), considère-t-on comme essentiel — pour qu'elles ne soient privées d'importance ou de sens — qu'elles soient au moins une fois violées?

Il peut donc arriver qu'elles ne soient jamais violées précisément à cause de ces sanctions pénales. De telles lois sont incontestablement importantes bien qu'elles soient... irréalisables dans la vie.

[17]) V. S. Leśniewski: *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, Fund. Math. **14** (1929), pp. 7—8.

[18]) A vrai dire, elles sont nécessaires toujours, mais ce ne sont que des modifications des mêmes règles (générales), appliquées au système donné de notions et d'axiomes, ne contenant cependant aucune idée nouvelle.

dont quelques-unes (p. ex. la Géométrie à une dimension) peuvent remplir certains axiomes „*vacuously*", le postulat (E') peut même être manifestement nuisible: il ne permet pas d'appliquer les résultats de la théorie générale T (Géométrie à n dimensions) à ces cas singuliers (Géométrie à une dimension), il les exclut.

5. Je passe maintenant à considérer *in merito* la question géométrique qui a donné lieu aux réfléxions qui précèdent.

6⁰. Ce que M. R. écrivit dans son premier travail cité [3]), c'est qu'un axiome devient privé de sens (*sinnlos wird*), „*wenn es nicht mindestens einen Fall gäbe, in dem es realisierbar wäre*". Cette expression, peut être vague, n'a toutefois beaucoup de commun avec l'„*Erfüllbarkeitsforderung*" explicitement formulée l. c. [4]) et elle pouvait causer la remarque „[2])", p. 218 chez M-lle W.

7⁰. Un système donné d'axiomes d'une théorie T peut satisfaire ou non à certaines conditions que son auteur ou une autre personne lui impose, mais ce fait n'est point capable d'intervenir comme prémisse dans les démonstrations des théorèmes de la théorie T. Donc en particulier, si le système de Hilbert remplit même ou doit remplir la condition (E), il n'en résulte point que l'on puisse démontrer — à l'aide de cette condition — l'existence de trois points non collinéaires, sans faire usage de l'axiome I 3 [19]). Autrement, on confondrait le système axiomatique avec son „métasystème".

8⁰ Il est évident qu'une règle (de procédé) donne la possibilité

[19]) En carricature, l'exemple suivant illustre cette remarque. —
Quelqu'un peut accepter le postulat:

(P) *Les axiomes doivent être aussi simples et peu exigeants que possible*,

— et puis démontrer l'axiome I 4 et même le théorème

(ω) Trois points quelconques sont situés toujours sur un plan,

comme il suit:

„En effet, l'ax. I 8 n'est pas inutilement compliqué ((P)!): si l'on pouvait dire:
I 8*: Il existe trois points qui ne sont pas situés sur un plan, on aurait pu prendre comme axiome la proposition I 8* qui est plus simple que I 8 et qui donnerait au moins la même chose que l'axiome primitif (car le quatrième point postulé dans I 8 peut être choisi arbitrairement, et son existence résulte déjà des axiomes I 1, II 1, 2, 3). Donc l'énoncé I 8* est faux (puisqu'il n'est pas pris comme axiome), c.-à-d. le théorème (ω) est vrai, q. e. d."

de déduire certaines propositions; il en serait de même avec la règle (**E**′)[20]).

Mais probablement Hilbert ne l'accepterait pas[21]) (ce que M-lle W. réplique) et d'ordinaire elle n'est pas acceptée: donc les résultats obtenus avec elle n'ont qu'une valeur spéciale.

9⁰. La remarque „[3])", p. 218, dans la Thèse de M-lle W. me paraît injuste, d'accord avec M. R., mais pour des raisons différentes, car je ne vois pas quelle est la relation entre ce fait et celui que M. R. lui oppose.

10⁰. Il est incontestable que la seconde partie de l'axiome I 3 peut subir, grâce au résultat de M. R., une simplification essentielle. On peut notamment l'énoncer comme suit:

(6) *Tout plan passe par deux points au moins.*

Je ne cite pas ici la forme originelle moins exigeante que lui donne M. R., car elle n'est pas d'un type logique autant simple (appréciation subjective!).

11⁰. Dans (4), j'ai mentionné une sorte de lacune chez Hilbert, lacune que M. Moore[10]) fut le premier à remarquer et qu'il a comblée en ajoutant l'axiome sur l'existence des plans. M. R., dans la note de 1912[22]) (qui suivait la note de 1910[3])) a lui aussi attiré l'attention sur ce fait[23]) et a indiqué un autre moyen de compléter le système.—Néanmoins, sa forme de l'axiome supplémentaire n'est pas évidemment une forme nécessaire (à mon avis — elle est même quelque peu artificielle). C'est pourquoi je ne partage pas l'opinion de M. R. que la correction du système de Hilbert à cet égard puisse justifier le point contesté du raisonnement de M. R.; — ainsi p. ex. l'axiome (tout aussi bon) proposé par M. Moore ne rend pas le raisonnement de M. R. plus rigoureux.

[20]) On pourrait encore ne pas soutenir aucune règle, mais défendre l'idée qu'à tout axiome géométrique de forme (2) soit adjoint l'axiome de forme (3). J'ai cru que ce serait trop d'examiner encore séparément cette conception; parmi les arguments du texte il y en a assez qui pourraient être appliqués ici.

[21]) Cf. encore Hilbert-Ackermann, p. 20 et 41.

[22]) A. Rosenthal: *Vereinfachungen des Hilbertschen Systems der Kongruenzaxiome*, Math. Ann. **71** (1912), pp. 257—274.

[23]) Il est à remarquer que l'existence des plans „résulte" de l'ax. V 2, mais M. R. objecte très à propos que ce n'est pas dans l'ordre d'idées du système de Hilbert.

6. En résumé, je crois donc que, si l'on peut s'entendre sur les questions de ce genre dans le système géométrique de Hilbert, le résultat de la note[3]) de M. R. ne peut pas être maintenu dans la forme que l'auteur lui a donnée. Ceci n'a, bien entendu, rien à faire avec l'axiome (6) et avec les autres résultats que l'on trouve dans la même note et qui me paraissent importants pour le système de Hilbert[24]).

[24]) Dans le système (S) étudié par M-lle W., également, je crois trouver une lacune — la proposition suivante y manque:

Lorsque A est situé entre B et C, ces trois points sont situés sur une droite (cf. d'ailleurs: S. Weinlös, l. c.[2]), p. 213, lignes 8—5 en remontant).

Chez Hilbert nous avons du moins l'„*Erklärung*" du § 3, p. 4 (voir encore Tschetweruchin, Jahresber. D. M.-V. **33** (1925), p. 66).

Après avoir ajouté cette proposition au système (S), mon théorème que M-lle W. a bien voulu réproduire (l. c.[2]), pp. 218—219; cf. dans la note de M-lle W.[1]) immédiatement précédente dans ce volume — la correction nécessaire à faire dans la démonstration qu'elle en a donnée) peut être démontré aussi (dans le système (S) d'une façon un peu moins simple que dans celui de Hilbert) d'après l'idée de M. Moore (l. c.[10]), en particulier pp. 157—158; nb. Errata, p. 501) chez lequel le théorème se trouve *implicite*: au lieu de l'axiome IV de ma démonstration (identique avec celle de M-lle W. après la correction), il y est utilisé l'axiome II 4.