Remarques à propos de la note de M. Rosenthal: »Eine Bemerkung zu der Arbeit von Frl. Weinlös...« etc. [1] [2].

Par

S. Weinlös (Lwów).

Les remarques qui suivent concernent le postulat de M. Rosenthal qu'il appelle „Erfüllbarkeitsforderung".

A mon avis, il faut avoir égard à ce postulat lorsque l'on construit des axiomes pour un certain ensemble d'objets donné d'avance; il me paraît cependant inadmissible de l'employer dans un domaine plus vaste — et ceci pour les raisons suivantes:

1. *Si l'on voulait rejeter les axiomes „vacuous"* (c.-à-d. ceux dont les antécédents sont irréalisables [3]), *en considérant ceci comme naturel*, on devrait de même rejeter *les théorèmes* „vacuous", c.-à-d. il faudrait les traiter comme faux. Cette façon d'agir serait cependant incompatible avec la logique de Russell qui apprend p. ex. que la proposition

„si A alors B".

entraîne la proposition

„si A et C, alors B et C"

(bien qu'il puisse arriver que „A et C" soit déjà irréalisable), et,

[1] Voir: *Fund. Math.* t. XIII, p. 304.

[2] *Note de la Rédaction*: Le premier manuscrit de ces „Remarques" avait été obtenu par la Rédaction avant l'impression du volume XIII.

[3] Scil. dans chaque interprétation de la théorie envisagée.

en général, qu'une proposition est vraie, si son antécédent est faux. Il faudrait donc changer les règles de cette logique, ce qui aurait ses grands inconvénients.

2. D'autre part, *si l'on considére le postulat de M. R. comme un axiome distinct placé à la tête de chaque système d'axiomes et limitant ainsi le nombre des interprétations possibles à celles qui réalisent tous les axiomes du système*, il y a lieu à faire de nouvelles objections:

a) On ne pourrait plus remplacer toujours un axiome par un autre axiome, logiquement équivalent au premier (p. ex. la proposition „si P, alors Q" par la proposition „si non-Q, alors non-P").

b) Un axiome donné A ne serait pas simplement une proposition — élue parmi les théorèmes du système — qui pourrait servir à en déduire d'autres propositions, mais il serait tout à fait autre chose (on pourrait tirer de l'axiome une conclusion d'existence ce qui n'aurait pas lieu pour les théorèmes).

Quant aux axiomes géométriques de M. Hilbert, les opinions de leur auteur énoncées dans l'ouvrage: Hilbert-Ackerman: „*Grundzüge der theoretischen Logik*" paraissent ne pas être d'accord avec le postulat de M. Rosenthal. Ainsi p. ex.:

(p. 4.) „Die Beziehung wenn X so Y" ist nicht so aufzufassen, als ob damit ein Verhältniß von Grund und Folge gesagt werden soll. Vielmehr ist die Aussage $X \rightarrow Y$ immer schon dann richtig, wenn X eine falsche oder auch wenn Y eine richtige Aussage ist".

(p. 24.) „Regel IV: Ist $A \rightarrow B$ eine beweisbare Formel und C eine beliebige andere Formel, so ist auch $CA \rightarrow CB$ eine beweisbare Formel".

La note présente me fournit l'occasion de constater que c'est M. Lindenbaum qui a le premier attiré mon attention sur l'incompabilité d'un certain résultat de M. Rosenthal [1]) avec une interprétation que j'ai donnée dans ma note du v. XI de ce journal (pp. 216—217) [2]).

[1]) „Über das dritte Hilbertsche Verknüpfungsaxiom", Math. Ann. 69 (1910).

[2]) Dans ma note, je n'ai pas cité toutes les remarques importantes de M. Lindenbaum qu'il m'a bien voulu communiquer après avoir lu mon manuscrit (qui lui avait été remis par la Rédaction); je lui y ai exprimé mes remerciments pour tout le concours qu'il m'a prêté.

Je profite aussi de l'occasion pour rectifier ma démonstration (d'un théorème dû à M. Lindenbaum) publiée dans la même note (p. 219), cette démonstration contenant une lacune:

Lorsque, du fait que le point D est situé dans le plan β je conclus, d'après l'ax. I 6, que la droite $(C'D)$ coupe la droite (AB) au point E (p. 219, ligne 14) je me sers implicitement de l'inégalité $E \neq C'$, qui n'a pas été démontrée dans le texte. On peut la prouver aisément en utilisant l'axiome I 2. Si l'on avait, en effet, $E = C'$, c.-à-d. si le point C' était situé sur la droite (AB), cette droite aurait avec la droite (AC) deux points différents A, C' en commun ($A \neq C'$, d'après II 3_3), les droites (AB) et (AC) seraient donc identiques d'après I 2 et le point C serait situé sur la même droite que les points A, B — ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Remarques sur une question de la méthode axiomatique.

Par

Adolphe Lindenbaum (Varsovie).

1. Dans la note précédente [1]), M-lle Weinlös m'a bien voulu nommer comme celui qui avait attiré son attention sur l'incompatibilité d'une interprétation contenue dans sa Thèse [2]) avec un certain résultat de M. Rosenthal [3]) concernant les axiomes de la Géométrie dus à Hilbert. M. Rosenthal, étant d'avis que la remarque critique qui se trouve à ce propos dans la Thèse de M-lle Weinlös [4]) peut donner lieu à des malentendus, reprend la question [5]) pour développer son point de vue, ce qui me donne occasion d'exposer aussi le mien.

Je vais envisager la question en particulier sous son aspect méthodologique [6]); donc je vais me servir également du langage et de certains résultats de la logique mathématique, en les empruntant p. ex. (pour les raisons pratiques seulement) au livre de Hilbert et Ackermann: „*Grundzüge der theoretischen Logik*".

[1]) S. Weinlös: *A propos de la note de M. Rosenthal*... etc., ce volume pp. 310—312.

[2]) S. Weinlös: *Sur l'indépendance des axiomes de coïncidence et de parallélité*... etc., Fund. Math. **11** (1928), pp. 206—221.

[3]) A. Rosenthal: *Über das dritte Hilbertsche Axiom der Verknüpfung*, Math. Ann. **69** (1910), pp. 223—226.

[4]) p. 218.

[5]) A. Rosenthal: *Eine Bemerkung zu der Arbeit von Frl. S. Weinlös*... etc., Fund. Math. **13** (1929), pp. 304—306.

[6]) Malgré le caractère circonstanciel et transitoire de la présente note, je dois avouer que quelques points de vue exprimés ici sont sans doute un reflet bon ou mauvais de ce que j'ai appris de MM. Leśniewski et Łukasiewicz.