Les résultats acquis dans les th. 2—4 peuvent être résumés comme suit:

Théorème 5. *α étant un nombre ordinal quelconque, les conditions suivantes sont équivalentes*: (1) $S_\alpha P_\alpha(K) = P_\alpha S_\alpha(K)$ *pour toute classe d'ensembles* K *et* (2) $\aleph_\alpha$ *est un nombre inaccessible; de plus l'hypothèse* H *implique que chacune de ces conditions équivaut à la condition*: (3) $\aleph_\alpha$ *est un aleph régulier à l'indice de* 2^{me} *espèce.*

Par un raisonnement analogue on peut établir entre autres le théorème suivant:

Si $\beta < \alpha$, les conditions suivantes sont équivalentes: (1) $S_\alpha P_\beta(K) \subset P_\alpha S_\alpha(K)$ *pour toute classe* K, (2) $P_\alpha S_\beta(K) \subset S_\alpha P_\alpha(K)$ *pour toute classe* K *et* (3) *les formules* $\mathfrak{n} < \aleph_\alpha$ *et* $\mathfrak{p} < \aleph_\alpha$ *entraînent constamment* $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} < \aleph_\alpha$; *de plus l'hypothèse* H *implique que chacune de ces conditions équivaut à la condition*: (4) α *est un nombre de* 2^{me} *espèce.*

Remarquons pour terminer que des questions connexes ont été étudiées déjà par MM. Koźniewski et Lindenbaum [1]); en particulier, le th. 4 restreint aux nombres α de 1^{re} espèce ne présente qu'une conséquence d'un résultat obtenu antérieurement par ces auteurs.

---

forme du texte sans en changer la démonstration. Cette remarque nous a permis d'établir l'équivalence des conditions (1) et (2) du th. 5 sans avoir recours à l'hypothèse H.

[1]) La note relative va paraître dans ce volume.

Sur les espaces complets [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Le célèbre théorème de Cantor sur le produit $\prod\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ d'une suite d'ensembles fermés décroissants (non-vides), le „Durchschnittsatz", peut être énoncé dans les espaces complets [2]) de deux façons différentes [3]):

I. *si le diamètre* [4]) $\delta(F_n)$ *tend vers* 0, *on a* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq 0$;

II. *si les ensembles* F_n *sont compacts* [5]) *on a* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq 0$.

On démontre ces énoncés en choisissant un point p_n de chaque F_n; le fait que la suite $p_1, p_2, \ldots$ est convergente, respectivement, qu'elle contient une sous-suite $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$ convergente, résulte dans le premier cas du critère de Cauchy, dans le second de la compacticité de l'ensemble F_1. La limite de cette suite, resp. de la sous-suite, appartient à chacun des ensembles F_n, puisque chacun d'eux est fermé.

Il est à remarquer qu'inversement, si la condition I est remplie, l'espace (mé-

[1]) Note présentée à la séance du 18. I. 1930 de la Soc. Polon. de Mathém. (Section de Lwów).

[2]) Un espace métrique (= où la distance est définie) est dit *complet*, lorsque toute suite satisfaisant au critère de Cauchy est convergente (le critère de Cauchy signifie que à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un n tel que la distance de p_n à p_{n+k} $(k = 1, 2, \ldots)$ est $< \varepsilon$). Voir: F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 315.

[3]) ibid. p. 318.

[4]) Le *diamètre* d'un ensemble est la borne supérieure de distances entre les points de cet ensemble.

[5]) Un ensemble est dit *compact*, lorsque chaque sous-ensemble infini donne lieu à, au moins, un point d'accumulation.

trique) est complet. Considérons, en effet, une suite $p_1, p_2, \ldots$ satisfaisant au critère de Cauchy et posons $E_n = (p_n, p_{n+1}, \ldots)$. Donc $\lim_{n=\infty} \delta(E_n) = 0$ et, selon I, il existe un point $p \in \prod_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$. Par conséquent, la distance de p à p_n est $\leqslant \delta(\overline{E}_n) = \delta(E_n)$, d'où: $p = \lim p_n$.

Ainsi, les espaces complets peuvent être définis comme espaces métriques satisfaisant à la condition I (où, bien entendu, $F_n \supset F_{n+1}$ et $F_n = \overline{F}_n \neq 0$).

On prouve, d'une façon analogue, que les espaces compacts sont caractérisés par le fait, que le produit de toute suite d'ensembles fermés, décroissants et non-vides n'est pas vide.

Je vais établir dans cette note le théorème suivant, qui présente une généralisation des énoncés I et II:

Théorème 1. *Soit, dans un espace complet,* $F_1 \supset F_2 \supset \ldots F_n \supset \ldots$ *une suite d'ensembles fermés non-vides; soit* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *une suite de nombres positifs tendant vers 0. L'ensemble* F_n *est somme d'un nombre fini d'ensembles de diamètres* $< \alpha_n$. *Dans ces hypothèses, on a* $\prod_{n=1}^{\infty} F_n \neq 0$.

De plus, l'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$ *est compact.*

Dans les théorèmes 2 et 3 je vais énoncer des hypothèses supplémentaires dans lesquelles l'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$ sera un continu, resp. un arc.

1. *Démonstration du théor. 1.*

Pour prouver le théor. 1, il suffit évidemment d'établir la proposition suivante: toute suite $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ de points tels que $p_n \in F_n$ contient une sous-suite convergente $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots, p_{k_n}, \ldots$ $(k_1 < k_2 < \ldots k_n < \ldots)$.

Or, on a par hypothèse:

$$F_1 = F_1^1 + \ldots + F_{m_1}^1$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$F_n = F_1^n + \ldots + F_{m_n}^n$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\delta(F_i^n) < \alpha_n, \quad \lim_{n=\infty} \alpha_n = 0.$$

Soit S_1 la suite $p_1, p_2, \ldots$ et posons $k_1 = 1$. Or

$$S_1 \subset F_1 = F_1^1 + \ldots + F_{m_1}^1;$$

les sommandes étant en nombre fini, il en existe une, soit (pour simplifier l'écriture) F_1^1 qui contient une sous-suite S_2 de S_1:

$$S_2 = p_{l_1}, p_{l_2}, \ldots; \quad k_1 < l_1 < l_2 < \ldots$$

Posons $k_2 = l_1$. La suite S_2 étant contenue dans F_2, on peut supposer, comme auparavant, que F_1^2 contient une sous-suite S_3 de S_2:

$$S_3 = p_{r_1}, p_{r_2}, \ldots; \quad k_2 < r_1 < r_2 < \ldots$$

En posant $k_3 = r_1$ et en procédant ainsi de suite, on définit la suite $S = p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$ demandée. Car, la suite $p_{k_n}, p_{k_{n+1}}, \ldots$ étant extraite de S_n donc de F_1^{n-1}, la distance de p_{k_n} à $p_{k_{n+i}}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ est $\leqslant \delta(F_1^{n-1}) < \alpha_{n-1}$. La suite S satisfait donc au critère de Cauchy et est, par conséquent, convergente, c. q. f. d.

Le théor. 1 peut être énoncé d'une façon plus simple à l'aide de la notion suivante:

Définition. *E étant un espace métrique borné* (ou un ensemble borné situé dans un espace métrique), *soit $\alpha(E)$ la borne inférieure des nombres δ tels que E soit somme d'un nombre fini d'ensembles de diamètres $< \delta$.*

Considérons, par exemple, comme espace E, la courbe $y = \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant 1$ et appelons „distance" des points p et q le diamètre de l'arc pq de cette courbe. On voit facilement que l'espace E, ainsi conçu, est complet et que $\alpha(E) = 2$.

Le théor. 1 s'énonce de cette façon:

Théor. 1'. *Si, dans un espace complet,* $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ *est une suite d'ensembles fermés, non-vides et tels que* $\lim_{n=\infty} \alpha(F_n) = 0$, *le produit* $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$ *est non-vide et compact.*

Evidemment: $\alpha(E) \leqslant \delta(E)$. Donc l'énoncé I est une conséquence directe du théor. 1.

Il en est de même de l'énoncé II. Car, si l'on suppose que l'espace E est compact, on prouve, par une simple application du théorème de Borel, que E est somme d'un nombre fini de sphères de rayon arbitrairement petit, donc que $\alpha(E) = 0$.

Ainsi, l'énoncé II est un cas particulier du théor. 1, notamment cas, où $\alpha(F_n) = 0$.

Il importe de remarquer que, si $\alpha(E) = 0$, l'espace (complet) E est compact. En effet, dans cette hypothèse, on peut poser dans le théor. 1': $E = F_1 = F_2 = \dots$; donc E, comme identique à $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$, est compact.

Ainsi, *parmi les espaces complets, les espaces compacts sont caractérisés par l'égalité:* $\alpha(E) = 0$.

2. *Généralisation du théorème de M. Painlevé.*

Théorème 2. *Si, dans un espace complet,* $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$ *est une suite d'ensembles fermés, connexes* [1]) *et tels que* $\lim_{n=\infty} \alpha(C_n) = 0$, *le produit* $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ *est un continu* (= ensemble connexe, fermé et compact).

Démonstration. Ce théorème ne fut démontré jusqu'à présent [2]) que pour le cas où C_n est compact (c.-à-d. que $\alpha(C_n) = 0$). Notre démonstration ne diffère de celle-ci qu'en ce que le „Durchschnittsatz" (= énoncé II) va être remplacé par le théorème plus général 1'.

Or, supposons, par impossible, que

$$\prod_{n=1}^{\infty} C_n = A + B. \tag{1}$$

A et B étant deux ensembles fermés, disjoints et non-vides. Il existe, par conséquent, un ensemble ouvert G tel que

$$A \subset G \quad \text{et} \quad \overline{G}B = 0. \tag{2}$$

Comme $C_n A \neq 0 \neq C_n B$, il vient $C_n G \neq 0 \neq C_n - \overline{G}$ et, C_n étant connexe, on en conclut que C_n a des points communs avec la frontière de G; en symboles: $C_n(\overline{G} - G) \neq 0$. En posant dans le théor. 1': $F_n = C_n(\overline{G} - G)$ et en tenant compte de l'inégalité $\alpha(F_n) \leqslant \alpha(C_n)$, on en déduit que $\prod_{n=1}^{\infty} C_n(\overline{G} - G) \neq 0$, ce qui veut

[1]) Un ensemble A est *connexe*, s'il n'est pas somme de deux ensembles X et Y tels que: $\overline{X}Y + \overline{Y}X = 0$, $X \neq 0 \neq Y$.

[2]) Cf. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 163.

dire, selon (1) que $(A + B)\overline{G} - G \neq 0$. Cette dernière inégalité contredit la formule (2), puisque

$$(A + B)\overline{G} - G \subset (A - G) + B\overline{G} = 0.$$

3. *Application à la construction des arcs.*

Un arc pq est, par définition, une image bicontinue de l'intervalle. Il peut être caractérisé par les propriétés suivantes [1]): 1) pq est un continu, 2) à chaque point x de pq correspond une décomposition $pq = A + B$ en deux ensembles fermés tels que:

$$p \in A, \quad x = AB, \quad q \in B.$$

En nous appuyant sur cette caractérisation, nous établirons le

Théorème 3. *Si, dans un espace complet,* $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \dots$ *est une suite d'ensembles connexes tels que* $\lim_{n=\infty} \alpha(C_n) = 0$ *et* p *et* q *sont deux points fixes tels qu'à chaque point* $x \in C_n$ *correspond une décomposition* $C_n = A_n + B_n$ *assujettie aux conditions:*

1°: $p \in A_n, \quad x \in A_n B_n, \quad q \in B_n$

2°: $\lim_{n=\infty} \delta(A_n B_n) = 0$

3°: $\overline{A}_{n+1} \subset A_n$ et $\overline{B}_{n+1} \subset B_n$ (pour $x \in C_{n+1}$)

— *le produit* $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ *est un arc* pq.

Démonstration. Pour prouver que $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ est un continu, il suffit, en vertu du théor. 2, de démontrer l'égalité:

$$\prod_{n=1}^{\infty} C_n = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{C}_{n+1}. \tag{1}$$

Or, selon 3°:

$$\overline{C}_{n+1} = \overline{A}_{n+1} + \overline{B}_{n+1} \subset A_n + B_n = C_n,$$

d'où $\prod_{n=1}^{\infty} \overline{C}_{n+1} \subset \prod_{n=1}^{\infty} C_n$ et, comme évidemment $\prod_{n=1}^{\infty} C_n \subset \prod_{n=1}^{\infty} C_{n+1} \subset \prod_{n=1}^{\infty} \overline{C}_{n+1}$, l'égalité (1) en résulte.

[1]) Cf. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 220 (condition de M. Sierpiński).

Désignons (pour x fixe): $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$, $B = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$.

En raisonnant comme tout-à-l'heure, on prouve que

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{A}_{n+1} \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{\infty} B_n = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{n+1},$$

donc que les ensembles A et B sont fermés. De plus,

$$AB = \prod_{n=1}^{\infty} (A_n B_n) = x$$

selon 1° et 2°.

Enfin, selon 3°: $A_{n+1} \subset A_n$ et $B_{n+1} \subset B_n$, d'où (selon une formule générale de la Théorie des ensembles):

$$\prod_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) = \prod_{n=1}^{\infty} A_n + \prod_{n=1}^{\infty} B_n,$$

c.-à-d. que $\prod_{n=1}^{\infty} C_n = A + B$.

Les conditions 1) et 2), qui caractérisent les arcs, étant ainsi vérifiées, l'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ est un arc pq.

4. *Application au théorème de M. Menger*[1]*:*

Dans un espace complet, connexe et localement connexe[2]*) chaque couple de points est situé sur un arc.*

Nous nous servirons dans la démonstration de la notion de *chaîne*: on appelle „chaîne de A à B" (A et B étant deux ensembles arbitraires) un système d'ensembles $R_1, \dots, R_n$ $(n \geqslant 0)$ tel qu'en posant $R_0 = A$, $R_{n+1} = B$, on a $R_i \cdot R_{i+1} \neq 0$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

La chaîne est dite *irréductible*, si elle ne contient aucune sous-

[1]) K. Menger, Monatsh. f. Math. u. Phys. 36 (1929), p. 212. Cf. aussi la note de M. Aronszajn, publiée dans ce volume.

Ce théorème présente une généralisation remarquable du théorème de Mazurkiewicz-Moore où l'on suppose l'espace compact.

[2]) = il existe, pour chaque point, des entourages connexes aussi petits que l'on veut.

chaîne de A à B; cela revient à dire que l'inégalité $R_i \cdot R_{i'} \neq 0$ équivaut à $|i - i'| \leqslant 1$.

Evidemment chaque chaîne de A à B contient une chaîne irréductible entre ces ensembles (qui peut d'ailleurs être vide, si $AB \neq 0$).

On prouve facilement[1]) que, si $\mathcal{G}$ est une famille d'ensembles ouverts qui couvre l'espace (c.-à-d. que chaque point est situé dans un ensemble appartenant à cette famille) et a un point fixe, l'ensemble de tous les points qui se laissent unir à a par une chaîne dont les chaînons appartiennent à $\mathcal{G}$ est fermé et ouvert (non-vide). De là résulte aussitôt que:

(1) *si l'espace est connexe, il existe entre chaque couple d'ensembles (non-vides) A et B une chaîne irréductible dont les chaînons appartiennent à $\mathcal{G}$.*

(On considère, en effet, comme a un point arbitraire de A).

Démonstration du théorème de M. Menger[2]).

Soient p et q deux points fixes $(p \neq q)$. L'espace étant supposé localement connexe, il existe une famille $\mathcal{G}$ de régions (= ensembles connexes ouverts) de diamètres < 1 qui couvrent l'espace. Soit, conformément à la proposition (1),

$$(2) \qquad R_1, \dots, R_k \quad (k \geqslant 1)$$

une chaîne extraite de la famille $\mathcal{G}$ et irréductible entre p et q.

Soit $\mathcal{G}^*$ la famille de régions S de diamètres $< \frac{1}{2}$ et telles que $\overline{S} \subset R_1$. La région R_1 étant localement connexe, elle est couverte par $\mathcal{G}^*$. Il existe donc dans $\mathcal{G}^*$, selon (1), une chaîne $S_1, \dots, S_{i_1}$ irréductible entre p et l'ensemble $R_1 R_2$ (si $k = 1$, $R_2 = q = R_1 R_2$).

On construit d'une façon analogue une chaîne irréductible entre $S_{i_1} \cdot R_2$ et $R_2 \cdot R_3$ etc.; enfin: entre $S_{i_{k-1}} \cdot R_k$ et q.

[1]) Voir, par. ex. R. L. Moore, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), p. 135.

[2]) J'ai cru nécessaire de donner ici une démonstration détaillée — bien qu'elle ne diffère pas essentiellement de celle de M. Menger — car cette dernière n'est pas tout-à-fait exacte (la proposition de la p. 216, lignes 5—7 n'est pas vraie). L'idée de sa démonstration M. Menger a emprunté, comme il écrit, à celle de M. R. L. Moore (loc. cit.); mais celle-ci n'est nonplus correcte (v. p. 137, lignes 16—18, qui interviennent dans la suite). Il en est de même de la note de M. R. L. Moore du Bull. Amer. Math. Soc. 23, 1917.

On a ainsi:

(3) pour $l_{i-1} < j \leqslant l_i$: $S_j \subset R_i$ $(l_0 = 0)$

et on vérifie facilement que la chaîne

(4) $S_1, \ldots, S_{l_1}, \quad S_{l_1+1}, \ldots, S_{l_2}, \ldots, S_{l_{k-1}}, \quad S_{l_{k-1}+1}, \ldots, S_{l_k}$

est irréductible entre p et q.

La chaîne (2) étant irréductible, il existe, pour chaque point x qui lui appartient, deux indices α et α' (différents ou non) tels que:

(5) $\alpha \leqslant \alpha' \leqslant \alpha + 1$, $x \in R_\alpha \cdot R_{\alpha'}$, x non-$\in R_i$ pour $\alpha \neq i \neq \alpha'$.

D'une façon analogue, si x appartient à la chaîne (4), il existe deux indices β et β' tels que

$$\beta \leqslant \beta' \leqslant \beta + 1, \quad x \in S_\beta \cdot S_{\beta'}, \; x \text{ non-}\in S_j \quad \text{pour } \beta \neq j \neq \beta'.$$

La proposition (3) entraîne la relation suivante entre α et β:

(6) $$l_{\alpha-1} < \beta \leqslant \beta' \leqslant l_{\alpha'}$$

(en effet, si l'on supposait par ex. que $\beta \leqslant l_{\alpha-1}$, on aurait selon (3): $x \in S_\beta \subset R_1 + \ldots + R_{\alpha-1}$, contrairement à (5)).

Les formules (3) et (6) entraînent aussitôt les inclusions:

(7) $$\begin{cases} \overline{S}_1 + \ldots + \overline{S}_\beta + \overline{S}_{\beta'} \subset R_1 + \ldots + R_\alpha + R_{\alpha'} \\ \overline{S}_\beta + \overline{S}_{\beta'} + \ldots + \overline{S}_{l_k} \subset R_\alpha + R_{\alpha'} + \ldots R_k. \end{cases}$$

En posant:

$$A_1 = R_1 + \ldots + R_{\alpha'}, \quad B_1 = R_\alpha + \ldots + R_k, \quad C_1 = A_1 + B_1,$$

$$A_2 = S_1 + \ldots + S_{\beta'}, \quad B_2 = S_\beta + \ldots + S_{l_k}, \quad C_2 = A_2 + B_2,$$

on voit donc que la condition 1° du théor. 3 est satisfaite pour $n = 1, 2$ et la condition 3° pour $n = 1$. En outre:

$$x \in A_1 B_1 = R_\alpha + R_{\alpha'} \quad \text{et} \quad x \in A_2 B_2 = S_\beta + S_{\beta'}$$

d'où

$$\delta(A_1 B_1) \leqslant \delta(R_\alpha) + \delta(R_{\alpha'}) < 2 \quad \text{et} \quad \delta(A_2 B_2) < 1.$$

Le procédé par lequel la chaîne (4) fut obtenue de la chaîne (2)

se laisse généraliser directement par induction, de sorte qu'on parvient à une suite infinie de chaînes irréductibles entre p et q et telles qu'en désignant par C_n la somme de chaînons de chacune d'elles, toutes les hypothèses du théorème 3 se trouvent réalisées $\left(\text{en particulier: } \alpha(C_n) < \frac{1}{n}, \; \delta(A_n B_n) < \frac{2}{n}\right)$.

On en conclut que l'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ est l'arc demandé.