Über rationale Kurven.

Von

Helene Reschovsky (Wien).

1. Über das Geschlecht von Kurvenpunkten und Kurven.

Die folgenden Untersuchungen knüpfen an die Menger-Urysohn-sche Kurventheorie [1]) an und zwar legen wir den Kurvenbegriff in der Fassung von Menger zugrunde, derzufolge ein Kontinuum K eine *Kurve* heisst, wenn jeder Punkt von K in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen keine Kontinua enthalten. Wir untersuchen im Folgenden speziell *rationale Kurven*, d. h. Kontinua, von welchen jeder Punkt in beliebig kleinen Umgebungen mit abzählbaren Begrenzungen enthalten ist.

Grundlegend für die Theorie der rationalen Kurven sind Mengers Begriffe von Geschlecht und Typus rationaler Kurvenpunkte [2]). Ein rationaler Kurvenpunkt p besitzt ein *Geschlecht* $\leqslant \alpha$, (wo α eine Ordinalzahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse ist), wenn beliebig kleine Umgebungen von p existieren, deren Begrenzungen leere α-te Ableitungen haben. Der Punkt p ist genau vom Geschlecht α, wenn α die kleinste Zahl dieser Eigenschaft ist. Ist die Kurve K ein Teilkontinuum eines Raumes, so ist der Punkt p vom Geschlecht α, wenn α die kleinste Zahl der Eigenschaft ist, dass p in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, die Begrenzungen haben, deren Durchschnitte mit K leere α-te Ableitungen besitzen.

[1]) Menger, *Grundzüge einer Theorie der Kurven*, Math. Ann. 95, S. 277. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes* II. Verhand. Ak. Amsterdam. XIII, Nr. 4.

[2]) Menger, *Zur allgemeinen Kurventheorie*, Fund. Math. 10, S. 111.

Zu jeder abgeschlossenen abzählbaren Menge B existiert nach dem Cantor'schen Theorem eine kleinste isolierte Ordinalzahl α, so dass ihre α-te Ableitung B^α leer ist. Trotzdem kann das Geschlecht eines Punktes auch eine *Grenzzahl* sein, wenn nämlich eine sich auf p zusammenziehende Umgebungsfolge $\{U_i(p)\}$ existiert, so dass für jedes U_i α_i die kleinste Zahl der Eigenschaft ist, dass die α_i-te Ableitung der Begrenzung $B(U_i)$ leer ist, und die isolierten Zahlen α_i wachsend gegen α konvergieren. Wenn dass Geschlecht α eines Punktes p eine *isolierte* Zahl ist, so existieren beliebig kleine Umgebungen von p, deren Begrenzungen endliche $(\alpha-1)$-te Ableitungen besitzen. Existieren zu p beliebig kleine Umgebungen, so dass die $(\alpha-1)$-ten Ableitungen ihrer Begrenzungen n Punkte enthalten und ist n die kleinste Zahl dieser Eigenschaft, so heißt p vom *Typus* (α, n). Eine Umgebung eines Punktes p vom Typus (α, n), deren Begrenzung eine n-punktige $(\alpha-1)$-te Ableitung besitzt, wollen wir eine *charakteristische Umgebung* von p nennen. Punkte vom Geschlechte α, die von keinem bestimmten endlichen Typus sind, nennen wir vom Typus (α, ω). Je zwei rationale Punkte sind ihrem Typus nach mit einander vergleichbar. Wir setzen $(\alpha, m) > > (\beta, n)$, wenn entweder $\alpha > \beta$ oder $\alpha = \beta$ und $m > n$ gilt.

Jedem Punkt einer rationalen Kurve kann man also ein bestimmtes Geschlecht zuordnen. Es drängt sich die Frage auf, ob es in einer rationalen Kurve Punkte von beliebig hohem Geschlecht geben kann, oder ob eine obere Schranke für das Geschlecht sämtlicher Kurvenpunkte existieren muss. Wir beweisen:

Satz I. *Zu jeder rationalen Kurve K gibt es eine Zahl α der ersten oder zweiten Zahlenklasse derart, dass das Geschlecht eines jeden Punktes von $K \leqq \alpha$ ist.*

Da K eine rationale Kurve ist, ist jeder Punkt von K in beliebig kleinen Umgebungen mit abzählbaren Begrenzungen enthalten. Nach dem Borel'schen Theorem überdecken endlich viele dieser Umgebungen von Durchmesser < 1 die Kurve K, etwa die Mengen $U_1^1, U_2^1, \ldots, U_{n_1}^1$, ferner endlich viele vom Durchmesser $< \frac{1}{2}$, es seien die Mengen $U_1^2, U_2^2, \ldots, U_{n_2}^2$, etc. Für jedes k, $(k = 1, 2, \ldots)$ wird die Kurve K von endlich vielen offenen Mengen $U_1^k, U_2^k, \ldots U_{n_k}^k$ mit Durchmessern $< \dfrac{1}{k}$ mit abzählbaren Begrenzungen überdeckt. Der Begrenzung von jeder dieser abzählbar vielen Umgebungen ist eine Ordinalzahl α_i zugeordnet, derart, dass ihre α_i-te

Ableitung leer ist. Zur abzählbaren Menge dieser Ordinalzahlen α_i gibt es eine grössere Ordinalzahl α der ersten oder zweiten Zahlenklasse. Jeder Punkt der Kurve ist für jedes k in mindestens einer der Umgebungen U_i^k, $(i = 1, 2, \ldots, n_k)$, also in beliebig kleinen Umgebungen enthalten, deren Begrenzungen leere α-te Ableitungen haben, da für jede der Umgebungen schon eine geringere Ableitung der Begrenzung verschwindet. Es ist also in der Tat jeder Punkt der Kurve von einem Geschlecht $\leqslant \alpha$, womit Satz I bewiesen ist.

Man kann diesen Beweis auch folgendermassen formulieren: Zu einer rationalen Kurve existiert ein unbegrenzt feines Überdeckungssystem [3]) bestehend aus offenen Mengen mit abzählbaren Begrenzungen. Nach Mengers verfeinertem Überdeckungssatz [4]) enthält dieses Überdeckungssystem ein *abzählbares* unbegrenzt feines Überdeckungssystem $\mathfrak{U}$. Jeder Menge U von $\mathfrak{U}$ ist eine Ordinalzahl $\alpha(U)$ der ersten oder zweiten Zahlenklasse zugeordnet, so dass die $\alpha(U)$-te Ableitung der Begrenzung von U leer ist. Es existiert eine Ordinalzahl α der ersten oder zweiten Zahlenklasse, welche grösser ist als die abzählbar vielen Zahlen $\alpha(U)$ für die Mengen U von $\mathfrak{U}$. Diese Zahl leistet das Gewünschte [5]).

Die kleinste Ordinalzahl, die nicht übertroffen wird von dem Geschlecht irgend eines Punktes, wollen wir das *Geschlecht der Kurve* nennen. Die regulären Kurven, das sind diejenigen Kurven, die zu jedem Punkt beliebig kleine Umgebungen mit endlichen Begrenzungen besitzen, sind demnach identisch mit den Kurven vom Geschlecht 1.

2. Über die Summe rationaler Kurven.

Wir beweisen zunächst einen im Folgenden öfters verwendeten ***Hilfssatz:*** *Voraussetzungen*: 1) A, B, $\{B_k\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ *sind*

[3]) So heisst nach Menger ein System von offenen Mengen eines Raumes, das zu jedem Punkt des Raumes beliebig kleine Umgebungen enthält.

[4]) Menger, *Dimensionstheorie* (bei Teubner 1928), S. 46.

[5]) Ein Raum heisst *im Punkt p höchstens α-dimensional*, wo α eine Ordinalzahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse ist, wenn p in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen weniger als α-dimensional sind. In derselben Weise wie Satz I lässt sich dann beweisen: *Besitzt ein separabler Raum R in jedem Punkt eine Ordinalzahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse als Dimension, so existiert eine Ordinalzahl α der ersten oder zweiten Zahlenklasse, so dass der Raum in jedem seiner Punkte höchstens α-dimensional ist.* Die kleinste Ordinalzahl dieser Art kann als *Dimension des Raumes* bezeichnet werden.

abgeschlossene Mengen,

$$2) \quad B \subset \sum_{k=1}^{\infty} B_k + A,$$

$$3) \quad \mathit{lim\ sup}\ B_k \subset A \text{ [6])}.$$

Behauptung: *Es gilt* $B^\alpha \subset \sum_{k=1}^{\infty} B_k^\alpha + A$ *für jede Zahl* α *der ersten oder zweiten Zahlenklasse.*

Beweis: Sicher gilt

$$B^1 \subset \sum B_k^1 + A,$$

denn die Häufungspunkte von $\sum_{k=1}^{\infty} B_k^1$, die nicht in $\sum_{k=1}^{\infty} B_k^1$ liegen, liegen in $\limsup B_k$, also wegen 3) in A. Ebenso folgt allgemein aus

$$B^\beta \subset \sum_{k=1}^{\infty} B_k^\beta + A$$

für die nächstgrössere Zahl

$$B^{\beta+1} \subset \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{\beta+1} + A.$$

Ist α eine isolierte Zahl, so folgt also wegen der Existenz einer unmittelbar vorhergehenden Zahl aus der Annahme, dass der Satz für alle Zahlen $< \alpha$ gilt, schon die Richtigkeit für α. Wir haben noch den Satz für eine Grenzzahl $\alpha = \lim_{n=\infty} \alpha_n$ zu beweisen.

Wir behaupten also:

$$\prod_{\beta<\alpha} B^\beta \subset \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\beta<\alpha} B_k^\beta + A.$$

Da sicherlich gilt $\prod_{\beta<\alpha} B^\beta \subset \prod_{\beta<\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} B_k^\beta + A$, genügt es, dass wir zeigen:

$$\prod_{\beta<\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} B_k^\beta \subset \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\beta<\alpha} B_k^\beta + A$$

[6]) Dabei bedeutet der lim sup oder die obere Näherungsgrenze einer Mengenfolge die Menge aller Punkte, für die jede Umgebung mit unendlich vielen Mengen der Folge einen nicht leeren Durchschnitt hat.

oder

$$\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_k^{\alpha_n} \subset \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty} B_k^{\alpha_n} + A,$$

da $\lim_{n=\infty} \alpha_n = \alpha$ und $B_k^{\gamma} \subset B_k^{\beta}$ für $\gamma < \beta$.

Ein Punkt von $\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_k^{\alpha_n}$ gehört zu $\sum_{k=1}^{\infty} B_k^{\alpha_n}$, also zu mindestens einem Summanden $B_{k_n}^{\alpha_n}$. Nun sind zwei Fälle möglich:

a.) Es existiert eine feste Zahl $k_n = \bar{k}$, so dass für unendlich viele n p zu $B_{\bar{k}}^{\alpha_n}$ gehört. Dann gehört p zu $\prod_{n=1}^{\infty} B_{\bar{k}}^{\alpha_n}$, also auch zu $\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty} B_k^{\alpha_n}$.

b.) Es gibt kein solches k. Dann gehört aber p unendlich vielen B_k an, da $B_k^{\alpha_n} \subset B_k$ gilt. Wegen der Voraussetzung 3.) liegen in $\overline{U}\left(A, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, fast alle B_k, d. h. nur endlich viele nicht, daher liegt p in $\overline{U}\left(A, \frac{1}{n}\right)$ für jedes n, also in $\prod_{n=1}^{\infty} \overline{U}\left(A, \frac{1}{n}\right)$. p ist daher ein Punkt von A.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Einem Resultat der Kurventheorie [7]) zufolge ist die Summe von abzählbar vielen rationalen Kurven, wenn sie ein Kontinuum ist, wieder eine rationale Kurve. Wir beweisen über die Summe rationaler Kurven folgenden Satz:

Satz II. *Wenn die Summe endlich vieler rationaler Kurven ein Kontinuum ist, so ist das Geschlecht der Summe höchstens so gross wie die Summe der Geschlechter der einzelnen Kurven.*

Wir beweisen den Satz für zwei Summanden K und L; die Richtigkeit für endlich viele ergibt sich durch vollständige Induktion.

Es seien also K und L zwei rationale Kurven von einem Geschlecht α beziehungsweise β, $\beta \leqq \alpha$ Wir haben nachzuweisen, dass $S = K + L$ von einem Geschlecht $\leqslant \beta + \alpha$ ist [7a]).

[7]) Menger, Math. Annalen, 95, S. 290; Urysohn, Verh Ak. Amsterdam XIII, S 23.

[7a]) Da die Addition von Ordinalzahlen nicht kommutativ ist, so ist für $\beta < \alpha$ die Aussage, das Geschlecht σ von S sei $\leqslant \beta + \alpha$, im allgemeinen schärfer als die analog zu beweisende Aussage $\sigma \leqslant \alpha + \beta$.

S ist in allen Punkten von $S - K.L$ von einem Geschlecht $\leqslant \alpha$. Wir haben also nur mehr das Geschlecht von S in einem Punkte p des Durchschnittes der beiden Kurven zu untersuchen. Da p ein Punkt von K ist, existiert zu jeder vorgelegten Umgebung $Z(p)$ von p eine Umgebung $U(p) \subset\subset Z(p)$, so dass $(K.B(U))^{\alpha}$ leer ist. Dabei wollen wir immer mit $B(U)$ die Begrenzung der offenen Menge U bezeichnen und $M \subset\subset N$ nach Menger gleichbedeutend mit $\overline{M} \subset N$ verwenden. Jeder Punkt von $(S - K)B(U)$ ist als Teil von L, der zu K fremd ist, in beliebig kleinen Umgebungen enthalten, deren Begrenzungen mit S Durchschnitte mit leeren β-ten Ableitungen besitzen. Diese Umgebungen bilden ein unbegrenzt feines Überdeckungssystem [8]) für die Menge $(S - K).B(U)$, die als Differenz zweier abgeschlossener Mengen ein F_{σ}, also halbkompakt ist. Nach dem Überdeckungstheorem für halbkompakte Mengen [9]) existiert eine Folge offener Mengen $\{U_k\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $(S - K).B(U) \subset \sum_{k=1}^{\infty} U_k$

b) $(S.B(U_k))^{\beta} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$

c) in jeder Umgebung von $(S - K).B(U)$ liegen fast alle U_k,

d) $U_k \subset\subset Z(p), \quad k = 1, 2, \ldots$

Betrachten wir die Menge

$$U^* = U + \sum_{k=1}^{\infty} U_k.$$

Sie ist eine Umgebung von p, denn sie ist als Summe offener Mengen offen und enthält p, weil $U \subset U^* p$ enthält. Ferner gilt $U^* \subset Z(p)$, denn jeder der Summanden von U^* ist $\subset Z(p)$. Für ihre Begrenzung B^* gilt nach dem Additionssatz für Begrenzungen offener Mengen [10]):

$$B^* \subset B(U) + B\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right).$$

[8]) Menger, *Dimensionstheorie*, Seite 46.

[9]) Menger, *Dimensionstheorie*, Seite 46.

[10]) Menger, *Dimensionstheorie*, Seite 36.

Wir bilden in dieser Beziehung den Durchschnitt mit S:

$$S.B^* \subset S.B(U) + S.B\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right).$$

Da zufolge a) $(S-K).B(U) \subset U^*$ gilt, so ist $(S-K).B(U)$ zu B^* fremd, daher

$$S.B \subset K.B(U) + S.B\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right). \tag{1}$$

Der verallgemeinerte Additionssatz für Begrenzungen [11]) angewendet auf die abgeschlossene Menge $S.B(U)$, ihre Teilmenge $(S-K).B(U)$ und die Folge $\{U_k\}$ ergibt die Beziehung

$$B\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right) \subset \sum_{k=1}^{\infty} B(U_k) + K.B(U),$$

daher

$$S.B\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right) \subset \sum_{k=1}^{\infty} S.B(U_k) + K.B(U). \tag{2}$$

Es folgt also aus (1) und (2)

$$S.B^* \subset \sum_{k=1}^{\infty} S.B(U_k) + K.B(U). \tag{3}$$

Bezeichnen wir $S.B(U_k)$ mit B_k, so ist mit Rücksicht auf a) und c) $\limsup B_k \subset K.B(U)$, ferner sind alle in (3) vorkommenden Mengen abgeschlossen. Es gilt also für die β-ten Ableitungen nach dem Hilfssatz

$$(S.B^*)^\beta \subset B_k^\beta + K \cdot B(U).$$

Wegen der Eigenschaft b) der U_k ist B_k^β leer $(k = 1, 2, \ldots)$ also

$$(S.B^*)^\beta \subset K.B(U).$$

Bilden wir die α-ten Ableitungen, so gilt

$$(S.B^*)^{\beta+\alpha} \subset (K.B(U))^\alpha.$$

[11]) Menger, *Dimensionstheorie*, Seite 37.

Nach Voraussetzung ist aber $(K.B(U))^\alpha$ leer, daher auch $(S.B^*)^{\beta+\alpha}$. Es existiert also innerhalb jeder vorgegebenen Umgebung $Z(p)$ eine Umgebung $U^*(p)$, deren Begrenzung mit S einen Durchschnitt mit leerer $(\beta+\alpha)$-ter Ableitung besitzt. S ist also in jedem ihrer Punkte von einem Geschlecht $\leqslant \beta + \alpha$, womit Satz II bewiesen ist.

Für $\alpha = \beta = 1$ angewendet, besagt Satz II, dass die Summe von zwei regulären Kurven höchstens das Geschlecht 2 besitzt. Nach einem Satz von Menger [12]) ist die Summe zweier regulärer Kurven mit diskontinuierlichem Durchschnitt wieder regulär. Allgemein lässt sich zeigen [13]), dass die Summe S zweier rationaler Kurven K, L von einem Geschlecht α bezw. β, wobei $\alpha \geqslant \beta$, deren Durchschnitt diskontinuierlich ist, das Geschlecht α besitzt. Denn die Menge aller Punkte von einem Geschlecht $> \alpha$ ist Teil des Durchschnittes beider Kurven, muss also auch diskontinuierlich sein. In jeder Kurve enthält aber die Menge aller Punkte von einem Geschlecht $> \alpha$ Kontinua, wenn sie nicht leer ist [14]). Es müssen also alle Punkte von S von einem Geschlecht $\leqslant \alpha$ sein.

Daraus sehen wir schon, dass das Geschlecht der Summe wesentlich von der Struktur des Durchschnittes der beiden Kurven abhängt. Wir beweisen nun allgemein

Satz III. *Sind K und L rationale Kurven mit dem Geschlecht α resp. β, $\beta \leqq \alpha$, und existiert eine isolierte Zahl $\gamma \leqq \beta$ und eine endliche Zahl n derart, dass der Durchschnitt $K.L$ in jedem seiner Punkte von einem Typus $\leqslant (\gamma, n)$ ist, so ist die Summe S der beiden Kurven von einem Typus $\leqslant (\alpha + \gamma, n)$.*

Beweis: p sei ein Punkt von $K.L$ und $U(p) \subset\subset Z(p)$ eine charakteristische Umgebung von p bezüglich $K.L$, so dass

$$(K.L.B(U))^{\gamma-1}$$

höchstens n Punkte enthält. Jeder Punkt von $(S-K.L).B(U)$ ist in beliebig kleinen Umgebungen enthalten, deren Begrenzungen mit S Durchschnitte mit leeren α-ten Ableitungen hat. Aus diesem un-

[12]) Menger, *Über die Summe regulärer Kurven*, Wiener akad. Anzeiger. 1929 Nr. 1.

[13]) Diesen Beweis verdanke ich einer persönlichen Mitteilung von Menger.

[14]) Auf Grund eines Satzes von Menger (Math. Ann. 95, S. 287; vrgl. auch Fund. Math. 10, S. 113)

begrenzt feinen Überdeckungssystem greifen wir eine die F_σ-Menge $(S-K.L).B(U)$ überdeckende Folge $\{U_k\}$ heraus, so dass in jeder Umgebung von $(S-K.L).B(U)$ fast alle U_k liegen und jedes $U_k \subset\subset Z(p)$ ist.

$$U^* = U + \sum_{k=1}^{\infty} U_k$$

ist eine Umgebung von $p \subset Z(p)$, für deren Begrenzung B^* gilt:

$$B^* \subset B(U) + B\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right)$$

(1) $$S.B^* \subset K.L.B(U) + S.B\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right).$$

Entsprechend dem Beweis von Satz II gilt auf Grund des verallgemeinerten Additionssatzes für Begrenzungen

(2) $$S.B\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right) \subset \sum_{k=1}^{\infty} S.B(U_k) + K.L.B(U)$$

also aus (1) und (2):

(3) $$S.B^* \subset S.B(U_k) + K.L.B(U).$$

Für die α-ten Ableitungen gilt mit Anwendung des Hilfssatzes

$$(S.B^*)^\alpha \subset \sum_{k=1}^{\infty} (S.B(U_k))^\alpha + K.L.B(U).$$

Da alle $(S.B(U_k))^\alpha$, $(k = 1, 2, \ldots)$, leer sind, so ist

$$(S.B^*)^\alpha \subset K.L.B(U)$$

und

$$(S.B^*)^{\alpha+\gamma-1} \subset (K.L.B(U))^{\gamma-1}$$

$(S.B^*)^{\alpha+\gamma-1}$ enthält daher höchstens n Punkte. Innerhalb jeder vorgegebenen Umgebung $Z(p)$ existiert also eine Umgebung U^* von p, so dass die $(\alpha+\gamma-1)$-te Ableitung ihrer Begrenzung höchstens n Punkte enthält. S ist also in jedem ihrer Punkte von einem Typus $\leq (\alpha+\gamma, n)$, wie Satz III behauptet.

Ordnen wir einer diskontinuierlichen Menge das Geschlecht o zu, so ist der Satz, dass die Summe zweier Kurven mit diskontinuierlichem Durchschnitt das Geschlecht jener Kurve besitzt, die das grössere Geschlecht hat, ein Spezialfall von Satz III für $\gamma = 0$.

3. Über die Struktur rationaler Kurven.

Satz IV: *Ist eine rationale Kurve K in einem Punkt p von einem Geschlecht $\geq \alpha$, so ist die Menge aller Kurvenpunkte von einem Geschlecht $> \beta$, für $\beta < \alpha$, in p von einem Geschlecht $\geq -\beta + \alpha$.*

Wir wollen den Satz in folgender Form beweisen: Wenn die Menge aller Punkte von K von einem Geschlecht $> \beta$, die wir mit ${}^\beta K$ bezeichnen wollen, in p von einem Geschlecht $< -\beta + \alpha$ ist, so ist p ein Punkt von einem Geschlecht $< \alpha$ in K.

Wir führen den Beweis zunächst für den Fall, dass α eine isolierte Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse ist. Wir setzen also voraus, p sei in ${}^\beta K$ von einem Geschlecht $\leq -\beta + \alpha - 1$. Es existiert daher zu jeder vorgegebenen Umgebung $Z(p)$ eine Umgebung $(Up) \subset\subset Z(p)$, so dass die $(-\beta + \alpha - 1)$-te Ableitung von $K.B(U)$ leer ist.

$$B(U) = (K - {}^\beta K).B(U) + {}^\beta K.B(U)$$

ist eine Spaltung der Begrenzung von U, wobei K als Raum aufgefasst wird, in zwei fremde Teile, derart dass die Menge $(K - {}^\beta K).B(U)$ nur Punkte von einem Geschlecht $\leq \beta$ enthält und die $(-\beta + \alpha - 1)$-te Ableitung der Menge $A = {}^\beta K.B(U)$ leer ist. Die Menge $B(U) - \bar{A}$, ($\bar{A}$ bedeutet die abgeschlossene Hülle von A) ist Teil von $(K - {}^\beta K).B(U)$ und als Differenz zweier abgeschlossener Mengen ein F_σ. Für $B(U) - \bar{A}$ existiert ein unbegrenzt feines Überdeckungssystem offener Mengen, deren Begrenzungen leere β-te Ableitungen besitzen. Aus diesem greifen wir nach dem Überdeckungstheorem für halbkompakte Mengen eine Mengenfolge $\{U_k\}$ mit folgenden Eigenschaften heraus:

a) $B(U) - \bar{A} \subset \sum_{k=1}^{\infty} U_k$,

b) $B^\beta(U_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$;

c) In jeder Umgebung von $B(U) - \bar{A}$ liegen fast alle U_k,

d) $U_k \subset\subset Z(p) \quad (k = 1, 2, \ldots)$.

Die Menge

$$U^* = U + \sum_{k=1}^{\infty} U_k$$

ist dann eine Umgebung von $p \subset Z(p)$, von deren Begrenzung B^* wir zeigen wollen, dass sie eine leere $(\alpha - 1)$-te Ableitung hat.

$$B^* \subset B(U) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right).$$

Bilden wir den Durchschnitt mit B^*, so ist

$$B^* \subset B(U) \,.\, B^* + B^* .\, B\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right)$$

und erst recht

(1) $$B^* \subset B(U) \,.\, B^* + B\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right).$$

Da wegen a) $B(U) - \bar{A} \subset U^*$ gilt, so ist $B^*(B(U) - \bar{A}) = 0$ und erst recht

$$B(U) B^* .\, (B(U) - \bar{A}) = 0,$$

also

(2) $$B(U) \,.\, B^* \subset \bar{A}.$$

Der mit Rücksicht auf a) und c) angewendete Additionssatz für Begrenzungen ergibt

(3) $$B\left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k\right) \subset \sum_{k=1}^{\infty} B(U_k) + \bar{A}.$$

Aus (1) folgt daher mit Rücksicht auf (2) und (3)

$$B^* \subset \sum_{k=1}^{\infty} B(U_k) + \bar{A}.$$

Unter Verwendung des Hilfssatzes gilt

$$B^{*\beta} \subset \sum_{k=1}^{\infty} B^{\beta}(U_k) + \bar{A}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} B^{\beta}(U_k)$ ist leer wegen b), daher ist

$$B^{*\beta} \subset \bar{A}.$$

Da die Menge der Häufungspunkte einer Menge A gleich der Menge der Häufungspunkte ihrer abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ ist, so gilt

$$\bar{A}^{-\beta+\alpha-1} = A^{-\beta+\alpha-1} = 0$$

also

$$B^{*\,\beta+(-\beta+\alpha-1)} = B^{*\alpha-1} \subset \bar{A}^{-\beta+\alpha-1} = 0.$$

Um p existiert also innerhalb $Z(p)$ eine Umgebung U^*, deren Begrenzung eine leere $(\alpha - 1)$-te Ableitung hat. p ist also von einem Geschlecht $< \alpha$, was wir beweisen wollten.

Es bleibt noch der Beweis zu erbringen, für den Fall, dass α eine Grenzzahl ist. Nach der Voraussetzung, dass ${}^{\beta}K$ im Punkte p von einem Geschlecht $< -\beta + \alpha$ ist, gibt es eine isolierte Zahl $\gamma < \alpha$, so dass beliebig kleine Umgebungen $U(p)$ existieren, für die die Menge $({}^{\beta}K \,.\, B(U))^{-\beta+\gamma} = 0$. Es sei $U(p) \subset\subset Z(p)$ eine Umgebung von p mit dieser Eigenschaft; wir wollen innerhalb $Z(p)$ eine Umgebung $U(p)$ aufweisen, deren Begrenzung schon eine leere γ-te Ableitung hat. Wir bezeichnen wie oben ${}^{\beta}K \,.\, B(U)$ mit A und überdecken die F_{σ}-Menge $B(U) - \bar{A}$ mit einer Folge von offenen Mengen $\{U_k\}$, deren Begrenzungen leere β-te Ableitungen besitzen und so dass in jeder Umgebung von $B(U) - \bar{A}$ fast alle U_k liegen und jedes $U_k \subset\subset Z(p)$. Wie oben folgt für die Begrenzung B^* der offenen Menge $U^* = U + \sum_{k=1}^{\infty} U_k$, die $\subset Z(p)$

$$B^{*\beta} \subset \sum_{k=1}^{\infty} B^{\beta}(U_k) + \bar{A}$$

und daraus

$$B^{*\beta} \subset \bar{A},$$

weil $\sum_{k=1}^{\infty} B^{\beta}(U_k) = 0$. Da mit $A^{-\beta+\gamma}$ auch $\bar{A}^{-\beta+\gamma}$ leer wird, so ist

$$B^{*\beta+(-\beta+\gamma)} = B^{*\gamma} = 0,$$

w. z. b. w.

Mit Hilfe derselben Methode kann man zeigen, dass ein Punkt p von K, der in K von einem Typus $\geq (\alpha, n)$ ist, in ${}^{\beta}K$ von einem

Typus $\geq(-\beta+\alpha, n)$ ist, wenn α eine isolierte Ordinalzahl und n endlich ist.

Dass in dem eben bewiesenen Satz im allgemeinen nur die Ungleichung $\geq -\beta+\alpha$ und nicht stets das $=$ Zeichen gilt, zeigt folgendes Beispiel einer ebenen Kurve K, die vom Geschlecht 2 ist, und für die doch die Menge der nichtregulären Punkte vom Geschlecht 2 ist.

$$K = S + \sum_{n=0}^{\infty} S_n + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{R}^n_{ik} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{\overline{R}}^n_{ik}$$

$$S: \varphi = 0, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$S: \varphi = \frac{\pi}{2^n}, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$\overline{R}^n_{ik}$ ist die Strecke, deren Endpunkte die Koordinaten

$$\left(\frac{(2^k-1)\pi}{2^{k+n}}, \ \frac{1}{\frac{i}{2^{2^n}}}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\pi}{2^n}, \ \frac{1}{\frac{i-1}{2^{2^n}}}\right)$$

haben, und $\overline{\overline{R}}^n_{ik}$ ist die Strecke, deren Endpunkte die Koordinaten

$$\left(\frac{(2^k-1)\pi}{2^{k+n}}, \ \frac{1}{\frac{i}{2^{2^n}}}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\pi}{2^n}, \ \frac{1}{\frac{i}{2^{2^n}}}\right)$$

haben. K ist z. B. im Koordinatenursprung 0 vom Typus (2, 1), denn die erste Ableitung der Begrenzung von U (0, 1/2) ist der Punkt mit den Koordinaten (0, 1/2). Nach Weglassung der regulären Punkte, das sind die Punkte von $\overline{R}^n_{ik}$ und $\overline{\overline{R}}^n_{ik}$, bleibt K in 0 vom Typus (2, 1).

4. Verallgemeinerungen von Sätzen über reguläre Kurven.

Im Folgenden sollen einige Sätze über reguläre Kurven von Urysohn, Whyburn und Künneth für rationale Kurven verallgemeinert werden [15]).

[15]) Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes.* Verhand. Kon. Akad. v. Wetensch. XIII, S. 105.

Whyburn, *On regular points of continua and regular curves of at most order n.* Bulletin of the Am. Math. Soc. 35, S. 218.

Künneth, *Ein Theorem der Kurventheorie.* Monatsh. f. Math. und Phys. 36, S. 149.

Zunächst beweisen wir den

Hilfssatz 1: *Sei p ein nichtregulärer Kurvenpunkt von einem Typus $\leq(\alpha, n)$, wobei α eine isolierte Ordinalzahl und n endlich ist, und $U(p)$ eine hinlänglich kleine, charakteristische Umgebung von p, dann enthält ihre Begrenzung B mindestens einen Punkt q, der Häufungspunkt sowohl von U als auch von $K-\overline{U}$ ist, aber nicht der höchstens n-punktigen Menge $B^{\alpha-1}$ angehört.*

Zum Beweis zeigen wir: Wenn zu einer jeden vorgelegten Umgebung $Z(p)$ eine charakteristische Umgebung $U(p) \subset\subset Z(p)$ existiert, deren Begrenzung B keinen solchen Punkt q enthält, dann existiert auch eine Umgebung $U^*(p) \subset Z(p)$ mit höchstens endlicher Begrenzung entgegen der Voraussetzung, dass p ein nichtregulärer Punkt ist. $U(p)$ sei also eine charakteristische Umgebung von $p \subset Z(p)$, so dass jeder Punkt der Menge $B' = B - B^{\alpha-1}$ Häufungspunkt von höchstens einer der Mengen U und $K-\overline{U}$ ist. Zu jedem Punkt a von B' gibt es dann eine positive Zahl $r(a)$, derart dass entweder in U oder in $K-\overline{U}$ jeder Punkt von K einen Abstand $> r(a)$ von a hat und dass $U(a, r(a)) \subset\subset Z(p)$. Ordnen wir jedem Punkt a von B' alle Umgebungen zu, die Teil von $U(a, r(a))$ sind, so bildet die Gesamtheit dieser Umgebungen ein unbegrenzt feines Überdeckungssystem von B'. Aus diesem greifen wir eine B' überdeckende Folge von Umgebungen $\{U_n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ heraus, deren Begrenzungen zu B' fremd sind und deren Durchmesser gegen 0 konvergieren. Dazu gehen wir folgendermassen vor: wir denken uns die Punkte der abzählbaren Menge B' in eine Folge geordnet und mit $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ bezeichnet. Um jeden Punkt a_n wählen wir eine Umgebung $U_n \subset U(a_n, r(a_n))$ mit einem Durchmesser $< \frac{1}{n}$, deren Begrenzung zu B' fremd ist; das ist möglich, da B' nulldimensional ist. $U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots$ seien diejenigen der U_n, für die $\overline{U}_n . U$ leer ist und $U_{j_1} U_{j_2}, \ldots$ diejenigen, für die $\overline{U}_n . (K-\overline{U})$ leer ist. Betrachten wir die Menge

$$U^* = U + \sum_i U_{j_i} - \sum_i \overline{U}_{k_i}.$$

Um zu zeigen, dass U^* offen ist, zeigen wir die Abgeschlossenheit ihres Komplementes $K - U^* = (K - (U + \sum_i U_{j_i})) + \sum_i \overline{U}_{k_i}$. Der erste

Summand ist sicher abgeschlossen. Ein Häufungspunkt von $\sum_i \overline{U}_{k_i}$, der nicht zu $\sum_i \overline{U}_{k_i}$ gehört, liegt, da die Durchmesser der U_n gegen 0 konvergieren, in dem nicht überdeckten Teil von B, also in $B^{\alpha-1}$ und daher im ersten Summanden. U^* ist eine Umgebung von p, denn U^*, aber keine der Mengen U_{k_i} enthält p, da $\overline{U}_{k_i}\cdot U$ leer ist. Ferner ist $U^* \subset Z(p)$ und ihre Begrenzung

$$B^* \subset B + B\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n\right)$$

oder

$$B^* \subset B^{\alpha-1} + B\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n\right),$$

denn $B = B^{\alpha-1} + (B - B^{\alpha-1})$ und $B - B^{\alpha-1}$ ist als Teil von $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ fremd zu $B(\sum_{n=1}^{\infty} U_n)$, also auch zu B^*. Nach dem verallgemeinerten Additionssatz für Begrenzungen ist $B(\sum_{n=1}^{\infty} U_n) \subset \sum_{n=1}^{\infty} B(U_n) + B^{\alpha-1}$. Es ist also

$$B^* \subset B^{\alpha-1} + \sum_{n=1}^{\infty} B(U_n).$$

Für jedes n ist $B^*.\,B(U_n) = 0$, denn U^* war so konstruiert, dass jener der Teile $U.B(U_n)$ und $(K - \overline{U}).B(U_n)$ zu B^* gehört, der leer ist und die U_n wurden ausserdem so gewählt, dass $B - B^{\alpha-1}$ zu $B(U_n)$ fremd ist. Daher ist $B^* \subset B^{\alpha-1}$ und U^* eine Umgebung von $p \subset Z(p)$ mit höchstens endlicher Begrenzung.

Satz V: *In einer nichtregulären rationalen Kurve K, die in jedem ihrer Punkte höchstens vom Typus (α, n) ist, wobei α eine isolierte Ordinalzahl und n endlich ist, liegen die Punkte von einem Typus $\leqq \left(\alpha, \frac{n}{2}\right)$ dicht.*

Für reguläre Kurven von höchstens n-ter Ordnung gilt bloss, dass die Punkte von einer Ordnung $\leqq \frac{n}{2} + 1$ in ihnen dicht liegen. Der analoge Satz für nichtreguläre Kurven ist also schärfer.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass in jeder vorgelegten Umgebung $Z(p)$ eines Punktes p von K ein Punkt von einem Typus $\leqq \left(\alpha, \frac{n}{2}\right)$ liegt. Da p ein Punkt von einem Typus $\leqq (\alpha, n)$ ist, so gibt es nach Hilfssatz 1 eine Umgebung $U(p) \subset\subset Z(p)$, so dass $B^{\alpha-1}(U)$ höchstens n Punkte enthält und dass ein Punkt q_1 von $B(U) - B^{\alpha-1}(U)$ existiert, der Häufungspunkt sowohl von U als auch von $K - \overline{U}$ ist. Da q_1 als Punkt von K von einem Typus $\leqq (\alpha, n)$ ist, so gibt es um q_1 beliebig kleine Umgebungen $V'(q_1)$, so dass $B^{\alpha-1}(V')$ höchstens n Punkte enthält. Wir wählen eine solche Umgebung $V'(q_1)$ so klein, dass $V'(q_1) \subset\subset Z(p)$, der Durchmesser $\delta(V') < 1$ ist und dass $\overline{V}'$ keinen Punkt von $B^{\alpha-1}(U)$ enthält, was möglich ist, weil $B^{\alpha-1}(U)$ höchstens n Punkte enthält und q_1 nicht zu $B^{\alpha-1}(U)$ gehört. Wir bezeichnen mit V_1^a die offene Menge $V'(q_1).(K - \overline{U}(p))$ und mit V_1^i die offene Menge $V'(q_1).U(p)$. Die Begrenzung von jeder dieser Mengen ist enthalten in $B(V') + \overline{V}'.B(U)$. Die $(\alpha-1)$-te Ableitung der Begrenzung beider Mengen ist aber gleich $B^{\alpha-1}(V')$, da $(\overline{V}'.B(U))^{\alpha-1} = 0$. Mindestens eine der Mengen $B^{\alpha-1}(V_1^a)$ und $B^{\alpha-1}(V_1^i)$ muss also höchstens $\frac{n}{2}$ Punkte enthalten, denn enthielte jede der zu einander fremden Mengen $B^{\alpha-1}(V_1^a)$ und $B^{\alpha-1}(V_1^i)$ mehr als $\frac{n}{2}$ Punkte, so würde ihre Summe $B^{\alpha-1}(V')$ mehr als n Punkte enthalten. Wir bezeichnen mit V_1 diejenigen der Mengen V_1^a und V_1^i, für die $B^{\alpha-1}(V_1)$ höchstens $\frac{n}{2}$ Punkte enthält. Trifft es für beide zu, so wählen wir irgend eine der beiden Mengen. Da q_1 Häufungspunkt sowohl von U als auch von $K - \overline{U}$ ist, kann V_1 nicht leer sein. Wir wählen einen Punkt p_1 aus V_1, der als Punkt von K höchstens vom Typus (α, n) ist. Nach dem Hilfssatz 1 gibt es um p_1 eine Umgebung $U_1(p_1) \subset\subset V_1$, so dass $B^{\alpha-1}(U)$ höchstens n Punkte enthält und ein Punkt q_2 von $B(U_1) - B^{\alpha-1}(U_1)$ existiert, der Häufungspunkt von U_1 und $K - \overline{U}_1$ ist. Um q_2 wird eine charakteristische Umgebung V'' so klein gewählt, dass $V'' \subset\subset V_1$, $\delta(V'') < \frac{1}{2}$ und dass $V''.B^{\alpha-1}(U_1) = 0$. Wie oben schliessen wir, dass mindestens eine der nicht leeren Mengen $V''.U_1$ und $V''.(K - \overline{U}_1)$

eine Begrenzung besitzt, deren $(\alpha-1)$-te Ableitung höchstens $\frac{n}{2}$ Punkte enthält. Diejenige, für die das zutrifft, bezeichnen wir mit V_2. Es ist dann $V_2 \subset\subset V_1$ und $\delta(V_2) < \frac{1}{2}$. Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir eine monoton abnehmende Folge offener Mengen $\subset\subset Z(p)$: $V_1 \supset\supset V_2 \supset\supset V_3 \ldots$, deren Durchmesser gegen 0 konvergieren. Nach dem Cantor'schen Durchschnittssatz ist $\prod_{i=1}^{\infty} \overline{V}_i$ nicht leer und enthält einen und nur einen Punkt q, der wegen $V_{i+1} \subset\subset V_i$ auch in allen offenen Mengen V_i enthalten ist. q ist daher ein Punkt, der in beliebig kleinen Umgebungen mit Begrenzungen enthalten ist, deren $(\alpha-1)$-te Ableitungen höchstens $\frac{n}{2}$ Punkte enthalten, also ein Punkt von einem Typus $\leqq \left(\alpha, \frac{n}{2}\right)$.

Für reguläre Kurven wurde bewiesen[16]), dass für eine endliche Zahl $n > 2$ keine Kurve existiert, die in allen Punkten von gleicher Ordnung n ist. Der topologische Kreis ist demnach die einzige reguläre Kurve homogener Ordnung. Nennen wir eine rationale Kurve, deren Geschlecht α isoliert ist und die in allen Punkten vom Geschlecht α von endlichem Typus ist, eine *isolierttypige* Kurve, so können wir aus Satz V folgern:

Satz VI: *Unter den isolierttypigen Kurven ist der topologische Kreis die einzige homogentypige Kurve.*

Hilfssatz 2: *N sei ein Teilkontinuum von K, p ein Punkt von N. Die Begrenzung jeder hinlänglich kleinen charakteristischen Umgebung U von p enthält mindestens einen Punkt q von N, der Häufungspunkt sowohl von $N.U$, als auch von $N-\overline{U}$ ist.*

Wenn zu einer vorgegebenen Umgebung $Z(p)$ eine charakteristische Umgebung $U(p) \subset\subset Z(p)$ existiert, deren Begrenzung keinen solchen Punkt q enthält, so wollen wir innerhalb $Z(p)$ eine Umgebung $U^*(p)$ aufweisen, deren Begrenzung zu N fremd ist entgegen der Voraussetzung, dass N ein Kontinuum ist. $U(p)$ sei also eine charakteristische Umgebung von $p \subset\subset Z(p)$, so dass jeder Punkt von $B(U).N$ Häufungspunkt von höchstens einer der Mengen $N.U$ und $N-\overline{U}$ ist. Zu jedem Punkt a von $B(U).N$ gibt es dann eine positive Zahl $r(a)$, so dass entweder in U oder in $N-\overline{U}$ jeder Punkt von N einen Abstand $> r(a)$ von a hat und dass $U(a, r(a)) \subset\subset Z(p)$ ist. Von dem unbegrenzt feinen Überdeckungssystem für $B(U).N$ bestehend aus allen Umgebungen eines jeden Punktes a innerhalb $U(a, r(a))$, lassen wir alle jene Umgebungen weg, deren Begrenzungen mit $B(U).N$ Punkte gemeinsam haben. Da $B(U).N$ nulldimensional ist, so ist jeder Punkt in beliebig kleinen Umgebungen enthalten, deren Begrenzungen zu $B(U).N$ fremd sind; daher bleibt noch ein unbegrenzt feines Überdeckungssystem übrig. Aus diesem greifen wir nach dem Borel'sche Theorem endlich viele die abgeschlossene Menge $B(U).N$ überdeckende offene Mengen U_i: $(i = 1, 2, \ldots, n)$ heraus. Für $i = 1, 2, \ldots, j$ sei $\overline{U}_i.N.U$ und für $i = j+1, \ldots, n$ sei $U_i.(N-\overline{U})$ leer.

$$U^* = U - \sum_{i=1}^{j} \overline{U}_i + \sum_{i=j+1}^{n} U_i$$

ist eine Umgebung von $p \subset Z(p)$, deren Begrenzung B^* mit N einen leeren Durchschnitt hat, denn:

$$B^*.N \subset B(U).N + \sum_{i=1}^{n} N.B(U_i)$$

$B^*.N$ ist leer, denn $B(U).N \subset \sum_{i=1}^{n} U_i$ und daher fremd zu B^* und für jedes i ist $B^*.N.B(U_i)$ leer, da jener der Teile $N.B.B(U_i)$ und $(N-\overline{U}).B(U_i)$ zu B^* gehört, der leer ist. Ausserdem wurden die U_i so gewählt, dass ihre Begrenzungen zu $B(U).N$ fremd sind.

Satz VII: *In einem Teilkontinuum N einer rationalen Kurve K, in dessen sämtlichen Punkten K höchstens vom Typus (α, n) ist, wobei α eine isolierte Zahl und n endlich ist, liegen die Punkte von einem Typus $\leqq \left(\alpha, \frac{n}{2}+1\right)$ dicht.*

Dass man nicht wie in Satz IV die schärfere Form beweisen kann, dass schon die Punkte von einem Typus $\leqq \left(\alpha, \frac{n}{2}\right)$ in N dicht liegen, hat seinen Grund darin, dass man im Hilfssatz 2 nicht die

[16]) Urysohn, Whyburn, Künneth, loc. cit. [15]).

einschränkende Forderung stellen kann, dass der Punkt q von $B(U).N$, der Häufungspunkt von $N.U$ und $N-\overline{U}$ ist, nicht $B^{\alpha-1}(U)$ angehöre. Denn es könnte z. B. $B(U).N$ Teil von $B^{\alpha-1}(U)$ sein.

Beweis: Wir wollen innerhalb einer beliebigen offenen Menge $Z.N$ einen Punkt von einem Typus $\leq\left(\alpha, \frac{n}{2}+1\right)$ aufweisen. Ein Punkt p von $Z.N$ ist nach Voraussetzung von einem Typus $\leq(\alpha, n)$. Nach Hilfssatz 2 existiert eine charakteristische Umgebung U von $p\subset Z$, so dass $B(U).N$ mindestens einen Punkt q_1 enthält, der Häufungspunkt sowohl von $N.U$ als auch von $N.\overline{U}$ ist. Als Punkt von N ist q_1 von einem Typus $\leq(\alpha, n)$, es gibt eine charakteristische Umgebung $V'(q_1)$ so klein, dass $V'(q_1)\subset\subset Z$, $\delta(V')<1$ und dass $\overline{V}'$ ausser q (eventuell) keinen Punkt der endlichen Menge $B^{\alpha-1}(U)$ enthält. Betrachten wir die offenen Mengen $V_1^{\prime}=V'.U$ und $V_1^{\prime\prime}=V'.(K-\overline{U})$; die Begrenzung von jeder dieser Mengen ist Teil von $B(V')+V'.B(U)$. Da $(\overline{V}'.B(U))^{\alpha-1}$ höchstens einen Punkt, nämlich q_1 enthält, so muss mindestens eine der Mengen $V_1^{\prime}$ und $V_1^{\prime\prime}$, sie heisse V_1, eine Begrenzung haben, deren $(\alpha-1)$-te Ableitung $\leq\frac{n}{2}+1$ Punkte enthält. Weil q_1 Häufungspunkt von $N.U$ sowie von $N-\overline{U}$ ist, gibt es einen Punkt p_1, von $V_1.N$. Mit p_1 wiederholen wir diesen Vorgang: wir wählen eine charakteristische Umgebung $U(p_1)\subset\subset V_1$, einen Punkt q_2 von $B(U_1)$, der Häufungspunkt von $N.U$ und $N-\overline{U}$ ist, eine charakteristische Umgebung $V''(q_2)\subset\subset V_1$ mit einem Durchmesser $<\frac{1}{2}$, so dass $\overline{V}''$ ausser q_2 keinen Punkt von $B^{\alpha-1}(U_1)$ enthält. $V_2\subset\subset V_1$ ist eine der Mengen $V''.U_1$ und $V''.(K-\overline{U}_1)$, für die die $(\alpha-1)$-te Ableitung ihrer Begrenzung höchstens $\frac{n}{2}+1$ Punkte enthält etc.

Indem wir wie beim Beweis von Satz V schliessen, erhalten wir in $\prod_{i=1}^{\infty}\overline{V}_i$ einen Punkt q von einem Typus $\leq\left(\alpha, \frac{n}{2}+1\right)$ innerhalb Z, der als Häufungspunkt der Punkte q_i der abgeschlossenen Menge N auch zu N gehört.

Satz VIII: *In einer rationalen Kurve K ist die Menge K^n aller Punkte vom Typus (α, n) für eine isolierte Zahl α und $n>2$ diskontinuierlich.*

Wäre K^n nichtdiskontinuierlich, so gäbe es in K^n ein Kontinuum N von Punkten vom Typus (α, n) in K. Nach Satz VII liegen aber die Punkte von einem Typus $\leq\left(\alpha, \frac{n}{2}+1\right)$ dicht in N. Für $n>2$ ist $\frac{n}{2}+1<n$, N sollte aber nur aus Punkten vom Typus (α, n) bestehen.

Es liegt die Vermutung nahe, dass auch für $\alpha>1$ die Menge K_α^1 aller Punkte vom Typus $(\alpha, 1)$ diskontinuierlich ist. Wenn K_α^1 nicht leer ist, so gibt es in K auch Punkte von einem Typus $>(\alpha, 1)$. Das folgt aus dem Satz, dass die Menge aller Punkte von einem Typus $>(\alpha, 1)$ in einem Punkt vom Typus $(\alpha, 1)$ mindestens von einem Typus $(1, 1)$ ist[17].

Satz IX: *Sind in einer isolierttypigen Kurve alle Punkte von einem Typus $\leq(\alpha, n)$, so ist die Menge H aller Punkte von einem Typus $>\left(\alpha, \frac{n}{2}+1\right)$ nulldimensional.*

H ist diskontinuierlich, denn enthielte H ein Kontinuum N, so wären nach Satz VII die Punkte von einem Typus $\leq\left(\alpha, \frac{n}{2}+1\right)$ in N dicht, N enthält aber als Teil von H nur Punkte von einem Typus $>\left(\alpha, \frac{n}{2}+1\right)$. Da H ein F_σ ist, so ist H nulldimensional[18].

[17]) Menger, Fund. Math. X. S. 115.
[18]) Menger, *Dimensionstheorie*, S. 213.