# Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles.

Par

W. Sierpiński et A. Tarski (Varsovie).

Le terme *nombres inaccessibles* a été proposé par M. Kuratowski pour désigner les alephs réguliers $\aleph_\alpha$ à indices $\alpha$ de 2me espèce. Le but de cette note est d'établir une propriété caractéristique des nombres inaccessibles. Toutefois la définition de ces nombres qui va être admise ici, s'éloigne de celle de M. Kuratowski, et on ne sait prouver l'équivalence de ces définitions sans avoir recours à l'hypothèse de Cantor sur les alephs: $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$ *pour tout nombre ordinal* $\alpha$; cette hypothèse sera appelée tout court *hypothèse* $\boldsymbol{H}$.

***Définition 1.*** *Le nombre cardinal transfini* $\mathfrak{m}$ *est dit inaccessible, lorsqu'il remplit la condition suivante: étant donnée une suite de nombres cardinaux* $\mathfrak{m}_\xi$ *du type* $\mu$, *telle que* $0<\bar{\mu}<\mathfrak{m}$ [1] *et* $\mathfrak{m}_\xi<\mathfrak{m}$ *pour tout* $\xi<\mu$, *on a toujours* $\prod\limits_{\xi<\mu}\mathfrak{m}_\xi<\mathfrak{m}$.

Comme on voit aisément, un exemple d'un nombre inaccessible est fourni par $\aleph_0$. On peut démontrer par contre que le problème de l'existence des nombres inaccessibles plus grands ne se laisse résoudre par affirmative dans aucun des systèmes actuels de la Théorie des Ensembles [2]). Il semble aussi fort douteux que la solution négative du problème en question puisse être obtenue dans ces systèmes.

La définition précédente se laisse évidemment étendre aux nombres finis; on vérifie aussitôt que les nombres 0, 1 et 2 sont les seuls qui sont à la fois finis et inaccessibles.

On peut modifier légèrement la déf. 1, en utilisant le théorème suivant:

**Théorème 1.** *Pour que le nombre transfini* $\mathfrak{m}$ *soit inaccessible, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux conditions suivantes:* (1) *les formules* $\bar{\mu}<\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{m}_\xi<\mathfrak{m}$ *pour tout* $\xi<\mu$ *entraînent toujours* $\sum\limits_{\xi<\mu}\mathfrak{m}_\xi<\mathfrak{m}$; (2) *les formules* $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{p}<\mathfrak{m}$ *impliquent que* $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}<\mathfrak{m}$.

Démonstration, basée sur la déf. 1 et sur certaines formules connues de l'arithmétique des nombres cardinaux $\Big(\sum\limits_{\xi<\mu}\mathfrak{m}_\xi\leqslant\prod\limits_{\xi<\mu}\mathfrak{m}_\xi$; $\prod\limits_{\xi<\mu}\mathfrak{m}_\xi=\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$, *lorsque* $\bar{\mu}=\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{m}_\xi=\mathfrak{n}$ *pour tout* $\xi<\mu$; $\prod\limits_{\xi<\mu}\mathfrak{m}_\xi\leqslant\Big(\sum\limits_{\xi<\mu}\mathfrak{m}_\xi\Big)^{\bar{\mu}}\Big)$, n'offre pas des difficultés.

Le théorème qui va être établi met en évidence les rapports entre les deux notions de nombre inaccessible: celle de la déf. 1 et celle qui a été proposée par M. Kuratowski.

**Théorème 2.** a) *Tout nombre inaccessible* $\mathfrak{m}$ *est un aleph régulier dont l'indice est de* 2me *espèce;*

b) *l'hypothèse* $\boldsymbol{H}$ *implique que tout aleph régulier* $\aleph_\alpha$ *dont l'indice* $\alpha$ *est de* 2me *espèce, est un nombre inaccessible.*

Démonstration. a) $\mathfrak{m}$ étant un nombre cardinal transfini, on peut poser, d'après le théorème bien connu de M. Zermelo, $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$. Si $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ était un aleph singulier, on pourrait le représenter sous la forme $\mathfrak{m}=\sum\limits_{\xi<\mu}\aleph_{\varphi_\xi}$ où $\bar{\mu}<\mathfrak{m}$ et $\aleph_{\varphi_\xi}<\mathfrak{m}$ pour $\xi<\mu$, ce qui contredit évidemment la condition (1) du th. 1. De

[1]) $\mu$ étant un nombre ordinal, le symbole $\bar{\mu}$ dénote, comme d'habitude, la puissance de l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\xi<\mu$.

[2]) Pour obtenir un résultat analogue sur les nombres inaccessibles dans le sens de M. Kuratowski, il nous faut admettre que l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ est compatible avec le système d'axiomes considéré. Cf. dans cet ordre d'idées: C. Kuratowski, *Sur l'état actuel de l'axiomatique de la théorie des ensembles*, Ann. de la Soc. Pol. de Math. 3, p. 146–147; A. Tarski, *Sur les principes de l'arithmétique des nombres ordinaux (transfinis)*, ibid. p. 148–149; R. Baer, *Zur Axiomatik der Kardinalzahlarithmetik*, Math. Zeitschr. 29.

même, si $\alpha$ était un nombre de 1[re] espèce, on aurait notoirement $2^{\aleph_{\alpha-1}} \geqslant \aleph_\alpha = \mathfrak{m}$ [1]), ce qui est également impossible en raison de la condition (2) du th. 1 (pour $\mathfrak{n} = 2$ et $\mathfrak{p} = \aleph_{\alpha-1}$). Donc $\mathfrak{m}$ est un aleph régulier à un indice de 2[me] espèce, c. q. f. d.

b) En posant dans le th. 1 $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$, on conclut sans peine de la régularité du nombre $\aleph_\alpha$ que la condition (1) de ce théorème est remplie; il est à prouver que $\aleph_\alpha$ vérifie de plus la condition (2). Envisageons dans ce but deux nombres cardinaux $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{p}$ tels que $\mathfrak{n} < \aleph_\alpha$ et $\mathfrak{p} < \aleph_\alpha$, d'où $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p} < \aleph_\alpha$. En omettant le cas banal où $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}$ est un nombre fini, on peut donc poser $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p} = \aleph_\beta < \aleph_\alpha$. $\alpha$ étant de 2[me] espèce, il en résulte que $\aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha$; conformément à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, on a en outre $2^{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$. Par conséquent $2^{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}} < \aleph_\alpha$; comme de plus $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \leqslant (2^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = 2^{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}}$, on obtient finalement l'inégalité cherchée $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} < \aleph_\alpha$.

Il est ainsi établi que le nombre $\aleph_\alpha$ satisfait aux conditions (1) et (2) du th. 1; c'est donc un nombre inaccessible, c. q. f. d.

Pour passer eu sujet principal de ces considérations, nous allons définir deux opérations $\boldsymbol{S}_\alpha$ et $\boldsymbol{P}_\alpha$ qui font correspondre d'une façon unique à toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ deux autres classes d'ensembles $\boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K})$ et $\boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K})$:

***Définition* 2.** *$\boldsymbol{K}$ étant une classe d'ensembles quelconques,*

*a) $\boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K})$ est la classe de tous les ensembles $X$ de la forme $X = \sum_{\xi<\mu} X_\xi$ où $0 < \bar{\mu} < \aleph_\alpha$ et $X_\xi \in \boldsymbol{K}$ pour tout $\xi < \mu$;*

*b) $\boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K})$ est la classe de tous les ensembles $X$ de la forme $X = \prod_{\xi<\mu} X_\xi$ où $0 < \bar{\mu} < \aleph_\alpha$ et $X_\xi \in \boldsymbol{K}$ pour tout $\xi < \mu$* [2]);

Le problème suivant va nous occuper ici: *quelles sont toutes les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles les opérations $\boldsymbol{S}_\alpha \boldsymbol{P}_\alpha$* [3]) *et $\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{S}_\alpha$ coïncident?*

[1]) $\alpha$ étant un nombre ordinal de 1[re] espèce, $\alpha - 1$ est le nombre qui le précède immédiatement.

[2]) Les opérations $S_\alpha$ et $P_\alpha$ seront examinées dans le mémoire de M. Tarski, *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations elémentaires*, qui paraîtra dans le volume prochain de ce journal.

[3]) $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ étant des opérations quelconques, l'opération $\boldsymbol{FG}$, dite *produit relatif* de $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$, est définie par la formule: $\boldsymbol{FG}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{K}))$ *pour tout* $\boldsymbol{K}$.



On peut p. ex. se convaincre d'une façon tout à fait élémentaire que cette coïncidence a lieu pour $\alpha = 0$. Il est connu d'autre part que les opérations considérées ne coïncident pas pour $\alpha = 1$ (soit, en effet, $\boldsymbol{K}$ la classe de tous les ensembles ouverts de nombres réels; il s'en suit aussitôt que $\boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{K})$ est la classe de tous les ensembles $G_{\delta\sigma}$ et $\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{K})$ la classe de tous les $G_\delta$; par conséquent, il existe des ensembles qui appartiennent à la première de ces classes sans appartenir à la seconde).

Or, nous nous proposons de prouver que *la coïncidence des opérations $\boldsymbol{S}_\alpha \boldsymbol{P}_\alpha$ et $\boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{S}_\alpha$ est une propriété caractéristique des nombres ordinaux $\alpha$ dont les alephs correspondants $\aleph_\alpha$ sont inaccessibles.*

**Théorème 3.** *Si $\aleph_\alpha$ est un nombre inaccessible, on a $\boldsymbol{S}_\alpha \boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K})$ pour toute classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$.*

Démonstration. Soit $X$ un ensemble quelconque, tel que

$$X \in \boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K}). \tag{1}$$

Conformément à la déf. 2[b]), il résulte de (1) que l'ensemble $X$ peut être représenté sous la forme $X = \prod_{\xi<\mu} X_\xi$ où $0 < \bar{\mu} < \aleph_\alpha$ et $X_\xi \in \boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K})$ pour tout $\xi < \mu$. En vertu de la déf. 2a) (et en appliquant de plus l'axiome du choix) on peut faire correspondre à tout nombre $\xi < \mu$ un nombre $\varphi_\xi$ et une suite d'ensembles $X_{\xi,\eta}$ de façon que l'on ait $0 < \bar{\varphi}_\xi < \aleph_\alpha$, $X_\xi = \sum_{\eta<\varphi_\xi} X_{\xi,\eta}$ et $X_{\xi,\eta} \in \boldsymbol{K}$ pour tout $\eta < \varphi_\xi$. Par conséquent on obtient

$$X = \prod_{\xi<\mu} \sum_{\eta<\varphi_\xi} X_{\xi,\eta}, \tag{2}$$

où

(3) $0 < \bar{\mu} < \aleph_\alpha$, $0 < \bar{\varphi}_\xi < \aleph_\alpha$ *pour tout* $\xi < \mu$ *et* $X_{\xi,\eta} \in K$ *pour* $\xi < \mu$ et $\eta < \varphi_\xi$.

Soit

(4) *$\Psi$ la classe de tous les suites $\psi$ de nombres ordinaux du type $\mu$ vérifiant la formule $\psi_\xi < \varphi_\xi$ pour $\xi < \mu$.*

En appliquant la loi générale distributive de multiplication relativement à l'addition des ensembles, on parvient à la formule $\prod_{\xi<\mu}\sum_{\eta<\varphi_\xi} X_{\xi,\eta} = \sum_{\psi\in\Psi}\prod_{\xi<\mu} X_{\xi,\psi_\xi}$, d'où selon (2)

(5) $$X=\sum_{\psi\in\Psi}\prod_{\xi<\mu}X_{\xi,\psi_\xi}.$$

D'après la déf. 2 b), il résulte de (3) et (4) que

(6) $$\prod_{\xi<\mu} X_{\xi,\psi_\xi}\in P_\alpha(K) \quad \textit{pour} \quad \psi\in\Psi.$$

En raison de la définition du produit des nombres cardinaux, (4) entraîne $\overline{\overline{\Psi}} = \prod_{\xi<\mu}\overline{\varphi}_\xi$; le nombre $\aleph_\alpha$ étant par hypothèse inaccessible, on en conclut à l'aide de la déf. 1 et en tenant compte de (3) que $\overline{\overline{\Psi}}<\aleph_\alpha$. Par conséquent toutes les suites $\psi$ de la classe $\Psi$ peuvent être ordonnées dans une suite transfinie $\psi^{(\zeta)}$ du type $\nu$, $0<\overline{\nu}<\aleph_\alpha$. En posant donc $X^{(\zeta)}=\prod_{\xi<\mu}X_{\xi,\psi_\xi^{(\zeta)}}$, on obtient suivant (5) et (6)

(7) $$X=\sum_{\zeta<\nu}X^{(\zeta)} \quad \textit{où} \quad 0<\overline{\nu}<\aleph_\alpha \quad \textit{et} \quad X^{(\zeta)}\in P_\alpha(K) \quad \textit{pour tout} \quad \zeta<\nu.$$

Conformément à la déf. 2 a), (7) donne aussitôt

(8) $$X\in S_\alpha P_\alpha(K).$$

Il est ainsi démontré que la formule (1) entraîne toujours la formule (8); cette implication peut être évidemment exprimée par la formule suivante:

(9) $$P_\alpha S_\alpha(K)\subset S_\alpha P_\alpha(K) \quad (\textit{pour toute classe } K).$$

D'une façon tout à fait analogue, en appliquant la loi générale d'addition relativement à la multiplication des ensembles, on prouve que

(10) $$S_\alpha P_\alpha(K)\subset P_\alpha S_\alpha(K)\ [1].$$

[1] D'ailleurs la formule (10) peut être déduite directement de (9) par le passage aux complémentaires.



Les inclusions (9) et (10) donnent tout de suite l'identité:

$$S_\alpha P_\alpha(K)=P_\alpha S_\alpha(K) \quad \textit{pour toute classe } K, \quad \text{c. q. f. d.}$$

L'analyse de la démonstration précédente nous conduit à la généralisation suivante du th. 3:

*Soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ des nombres ordinaux tels que les formules $0<\overline{\mu}<\aleph_\alpha$ et $\mathfrak{m}_\xi<\aleph_\beta$ pour tout $\xi<\mu$ entraînent toujours $\prod_{\xi<\mu}\mathfrak{m}_\xi<\aleph_\gamma$. On a alors $S_\alpha P_\beta(K)\subset P_\gamma S_\alpha(K)$ et $P_\alpha S_\beta(K)\subset S_\gamma P_\alpha(K)$ pour toute classe d'ensembles $K$.*

Comme de cas particuliers du théorème énoncé tout à l'heure on obtient:

$S_0E_\alpha(K)\subset M_\alpha S_0(K)$ *et* $M_0S_\alpha(K)\subset S_0M_\alpha(K)$, *quels que soient la classe d'ensembles $K$ et le nombre ordinal $\alpha$;*

*si* $\aleph_\beta^{\aleph_\alpha}=\aleph_\gamma$, *on a* $S_{\alpha+1}P_{\beta+1}(K)\subset P_{\gamma+1}S_{\alpha+1}(K)$ *et* $P_{\alpha+1}S_{\beta+1}(K)\subset S_{\gamma+1}P_{\alpha+1}(K)$ *pour toute classe d'ensembles $K$.*

**Théorème 4.** *Si $\aleph_\alpha$ n'est pas un nombre inaccessible, il existe une classe d'ensembles $K$ telle que $S_\alpha P_\alpha(K)\neq P_\alpha S_\alpha(K)$.*

Démonstration. D'après la déf. 1, l'hypothèse du théorème implique l'existence d'une suite de nombres cardinaux $\mathfrak{m}_\xi$ du type $\mu$ vérifiant les formules $0<\overline{\mu}<\aleph_\alpha$, $\mathfrak{m}_\xi<\aleph_\alpha$ pour $\xi<\mu$ et $\prod_{\mu<\xi}\mathfrak{m}_\xi\geqslant\aleph_\alpha$; à tout nombre $\mathfrak{m}_\xi<\aleph_\alpha$ correspond évidemment un nombre ordinal $\varphi_\xi$ tel que $\mathfrak{m}_\xi=\overline{\varphi}_\xi$.

On a donc

(1) $$\prod_{\xi<\mu}\overline{\varphi}_\xi\geqslant\aleph_\alpha,$$

où

(2) $$0<\overline{\mu}<\aleph_\alpha \quad \textit{et} \quad 0<\overline{\varphi}_\xi<\aleph_\alpha \quad \textit{pour tout} \quad \xi<\mu.$$

Soit

(3) $\Psi_{\xi,\eta}$ *(où $\xi<\mu$ et $\overline{\eta}<\aleph_\alpha$) l'ensemble de toutes les suites $\psi$ du type $\mu$ dont les termes sont des nombres ordinaux $<\omega_\alpha$ et qui remplissent la formule $\psi_\xi=\eta$;*

soit en outre

(4) $\boldsymbol{K}$ *la classe de tous les ensembles* $\Psi_{\xi,\eta}$ *où* $\xi<\mu$ *et* $\overline{\eta}<\aleph_\alpha$.

Posons:

$$X=\prod_{\xi<\mu}\sum_{0<\eta\leqslant\varphi_\xi}\Psi_{\xi,\eta}. \tag{5}$$

En vertu de (3) et (5) on vérifie facilement que $X$ est l'ensemble de toutes les suites $\psi$ de nombres ordinaux du type $\mu$ dont le $\xi^{\text{me}}$ terme vérifie l'inégalité double $0<\psi_\xi\leqslant\varphi_\xi$. L'ensemble de tous les nombres tels que $0<\eta\leqslant\varphi_\xi$ étant évidemment de la puissance $\overline{\varphi}_\xi$, on en conclut à l'aide de la définition du produit des nombres cardinaux que $\overline{\overline{X}}=\prod_{\xi<\mu}\overline{\varphi}_\xi$, d'où selon (1)

$$\overline{\overline{X}}\geqslant\aleph_\alpha. \tag{6}$$

Conformément à la déf. 2[a)] il résulte tout de suite de (2) et (4) que $\sum_{0<\eta\leqslant\varphi_\xi}\Psi_{\xi,\eta}\,\epsilon\,\boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K})$ pour $\xi<\mu$; en raison de la déf. 2[b)] et en tenant compte de (2) et (5) on obtient

$$X\,\epsilon\,\boldsymbol{P}_\alpha\,\boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K}). \tag{7}$$

Or, supposons que

$$X\,\epsilon\,\boldsymbol{S}_\alpha\,\boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K}); \tag{8}$$

suivant la déf. 2[a)] on en conclut que l'ensemble $X$ peut être représenté sous la forme

(9) $X=\sum_{\zeta<\nu}X_\zeta$ *où* $0<\nu<\aleph_\alpha$ *et* $X_\zeta\,\epsilon\,\boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K})$ *pour tout* $\zeta<\nu$.

Si chaque ensemble $X_\zeta$ (où $\zeta<\nu$) contenait un élément au plus, on aurait en vertu de (9) $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\nu}<\aleph_\alpha$, contrairement à (6). Il existe donc un nombre $\zeta$ tel que

$$\overline{\overline{X}}_\zeta>1 \quad \textit{et} \quad \zeta<\nu. \tag{10}$$

En raison de (9) et (10) $X_\zeta\,\epsilon\,\boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K})$. En appliquant une fois encore la déf. 2[b)] et en tenant compte de (4), on en déduit l'existence de deux suites de nombres ordinaux $\xi_\iota$ et $\eta_\iota$ du type $\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes:



(11) $X_\zeta=\prod_{\iota<\pi}\Psi_{\xi_\iota,\eta_\iota}$ *où* $0<\pi<\aleph_\alpha$ *et en outre* $\xi_\iota<\mu$ *et* $\eta_\iota<\aleph_\alpha$ *pour tout* $\iota<\pi$.

En vertu de (3) et (11) l'ensemble $X_\zeta$ se compose de suites du type $\mu$ dont les termes sont $<\omega_\alpha$; suivant (10) cet ensemble contient au moins deux éléments différents. Par conséquent il existe deux suites $\psi$ et $\psi'$ et un nombre $\xi'$ tels que

$$\psi\,\epsilon\,X_\zeta \quad \textit{et} \quad \psi'\,\epsilon\,X_\zeta, \tag{12}$$

$$\xi'<\mu \quad \textit{et} \quad \psi_{\xi'}\neq\psi'_{\xi'}. \tag{13}$$

Supposons que le nombre $\xi'$ est un des nombres $\xi_\iota$ où $\iota<\pi$, soit $\xi'=\xi_{\iota'}$. En raison de (11) et (12) on a alors $\psi\,\epsilon\,\Psi_{\xi_{\iota'},\eta_{\iota'}}$ et $\psi'\,\epsilon\,\Psi_{\xi_{\iota'},\eta_{\iota'}}$, d'où selon (3) $\psi_{\xi'}=\psi_{\xi_{\iota'}}=\eta_{\iota'}$ et de même $\psi'_{\xi'}=\psi'_{\xi_{\iota'}}=\eta_{\iota'}$. Il en résulte aussitôt que $\psi_{\xi'}=\psi'_{\xi'}$, ce qui contredit évidemment à (13). On a donc

$$\xi'\neq\xi_\iota \quad \textit{pour tout} \quad \iota<\pi. \tag{14}$$

Or, formons une nouvelle suite $\psi''$ du type $\mu$, en remplaçant dans la suite $\psi$ le terme à l'indice $\xi'$ par le nombre 0:

$$\psi''_{\xi'}=0; \tag{15}$$

$$\psi''_\xi=\psi_\xi, \quad \textit{lorsque} \quad \xi\neq\xi'. \tag{16}$$

Les formules (14) et (16) impliquent immédiatement que $\psi''_{\xi_\iota}=\psi_{\xi_\iota}$ pour $\iota<\pi$. A l'aide de (3), (11) et (12) on en conclut que $\psi''\,\epsilon\,\Psi_{\xi_\iota,\eta_\iota}$ pour tout $\iota<\pi$, donc que $\psi''\,\epsilon\,X_\zeta$ d'où en vertu de (9) et (10) $\psi''\,\epsilon\,X$. Comme, d'après (3) et (5), l'ensemble $X$ est formé exclusivement de suites du type $\mu$ aux termes $>0$, il s'en suit selon (13) que

$$\psi''_{\xi'}>0. \tag{17}$$

Les formules (15) et (17) prouvent que la supposition (8) conduit à une contradiction. Nous sommes donc contraints d'admettre que l'ensemble $X$ n'appartient pas à la classe $\boldsymbol{S}_\alpha\boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K})$; en rapprochant ce fait de (7), on parvient à la formule cherchée:

$$\boldsymbol{S}_\alpha\,\boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K})\neq\boldsymbol{P}_\alpha\,\boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K}), \quad \text{c, q f. d.}^{1)}$$

1) Le th. 4 avait été énoncé par nous dans la forme suivante:

*Si* $\aleph_\alpha$ *est un aleph singulier ou bien si* $\alpha$ *est un nombre de 1[re] espèce, il existe une classe d'ensembles* $\boldsymbol{K}$ *telle que* $\boldsymbol{S}_\alpha\boldsymbol{P}_\alpha(\boldsymbol{K})\neq\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{S}_\alpha(\boldsymbol{K})$.

C'est M. Koźniewski qui a remarqué qu'on peut donner à ce théorème la

Les résultats acquis dans les th. 2—4 peuvent être résumés comme suit:

**Théorème 5.** *$\alpha$ étant un nombre ordinal quelconque, les conditions suivantes sont équivalentes*: (1) $S_\alpha P_\alpha(K) = P_\alpha S_\alpha(K)$ *pour toute classe d'ensembles* $K$ *et* (2) $\aleph_\alpha$ *est un nombre inaccessible*; *de plus l'hypothèse* $H$ *implique que chacune de ces conditions équivaut à la condition*: (3) $\aleph_\alpha$ *est un aleph régulier à l'indice de* $2^{me}$ *espèce*.

Par un raisonnement analogue on peut établir entre autres le théorème suivant:

*Si* $\beta < \alpha$, *les conditions suivantes sont équivalentes*: (1) $S_\alpha P_\beta(K) \subset \subset P_\alpha S_\alpha(K)$ *pour toute classe* $K$, (2) $P_\alpha S_\beta(K) \subset S_\alpha P_\alpha(K)$ *pour toute classe* $K$ *et* (3) *les formules* $\mathfrak{n} < \aleph_\alpha$ *et* $\mathfrak{p} < \aleph_\alpha$ *entraînent constamment* $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} < \aleph_\alpha$; *de plus l'hypothèse* $H$ *implique que chacune de ces conditions équivaut à la condition*: (4) $\alpha$ *est un nombre de* $2^{me}$ *espèce*.

Remarquons pour terminer que des questions connexes ont été étudiées déjà par MM. Koźniewski et Lindenbaum [1]); en particulier, le th. 4 restreint aux nombres $\alpha$ de $1^{re}$ espèce ne présente qu'une conséquence d'un résultat obtenu antérieurement par ces auteurs.

forme du texte sans en changer la démonstration. Cette remarque nous a permis d'établir l'équivalence des conditions (1) et (2) du th. 5 sans avoir recours à l'hypothèse $H$.

[1]) La note relative va paraître dans ce volume.

# Sur les espaces complets [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Le célèbre théorème de Cantor sur le produit $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$ d'une suite d'ensembles fermés décroissants (non-vides), le „Durchschnittsatz", peut être énoncé dans les espaces complets [2]) de deux façons différentes [3]):

I. *si le diamètre* [4]) $\delta(F_n)$ *tend vers* 0, *on a* $\prod_{n=1}^{\infty} F_n \neq 0$;

II. *si les ensembles* $F_n$ *sont compacts* [5]) *on a* $\prod_{n=1}^{\infty} F_n \neq 0$.

On démontre ces énoncés en choisissant un point $p_n$ de chaque $F_n$; le fait que la suite $p_1, p_2, \ldots$ est convergente, respectivement, qu'elle contient une sous-suite $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$ convergente, résulte dans le premier cas du critère de Cauchy, dans le second de la compacticité de l'ensemble $F_1$. La limite de cette suite, resp. de la sous-suite, appartient à chacun des ensembles $F_n$, puisque chacun d'eux est fermé.

Il est à remarquer qu'inversement, si la condition I est remplie, l'espace (mé-

[1]) Note présentée à la séance du 18. I. 1930 de la Soc. Polon. de Mathém. (Section de Lwów).

[2]) Un espace métrique (= où la distance est définie) est dit *complet*, lorsque toute suite satisfaisant au critère de Cauchy est convergente (le critère de Cauchy signifie que à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un $n$ tel que la distance de $p_n$ à $p_{n+k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ est $< \varepsilon$). Voir: F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 315.

[3]) ibid. p. 318.

[4]) Le *diamètre* d'un ensemble est la borne supérieure de distances entre les points de cet ensemble.

[5]) Un ensemble est dit *compact*, lorsque chaque sous-ensemble infini donne lieu à, au moins, un point d'accumulation.