brable) L étant, d'après la propriété (a), de 2-ème catégorie sur lui-même, que $f(x)$ n'est pas une fonction de classe 1 de Baire.

D'autre part, la fonction $f(x)$ est évidemment une fonction de Baire relativement à l'espace L, car elle est continue sur les ensembles P et $L-P$ dont le premier est un F_σ et le second un G_δ relatif à L. Cette fonction est donc de classe 2, ce qui démontre l'égalité (1).

Pour $\alpha > 3$ le problème de M. Mazurkiewicz reste non résolu et semble être très difficile même pour $\alpha = 4$.

Sur un problème concernant les fonctions continues.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

$f(x)$ étant une fonction définie dans l'intervalle $J(0 \leqslant x \leqslant 1)$, désignons par $P(f)$ l'ensemble de tous les nombres x de cet intervalle, tels que

$$f(x) \neq f(t), \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < x$$ [1])

Théorème: *Pour qu'il existe une fonction continue $f(x)$, telle yue $E = P(f)$, il faut et il suffit que l'ensemble E s'obtienne en enlevant d'un ensemble parfait, situé dans l'intervalle J (et contenant le point 0), toutes les extrémités droites de ses intervalles contigus* (s'il y en a).

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction donnée, continue dans l'intervalle J, et soit $E = P(f)$. Nous prouverons que l'ensemble E jouit de deux propriétés suivantes:

1. Si $x_0 \in J - E$, il existe un nombre $a < x_0$, tel que $x \in J - E$, pour $a < x \leqslant x_0$.

2. Si $0 < x_0$ et $x_0 \in E$, il existe pour tout nombre $a < x_0$ un nombre $x \in E$, tel que $a < x < x_0$.

Soit x_0 un point de l'ensemble $J - E$. De la définition de l'ensemble $E = P(f)$ résulte qu'il existe un nombre x_1, tel que $0 \leqslant x_1 < x_0$ et $f(x_0) = f(x_1)$

Désignons par M, resp. par m la borne supérieure, resp. infé-

[1]) M. Mazurkiewicz a remarqué que si f est une fonction continue, $P(f)$ est un ensemble G_δ: cf. S. Banach, *Fund. Math.* t. VIII, p. 167.

rieure des nombres $f(x)$ pour $x_1 \leqslant x \leqslant x_0$. La fonction f étant continue dans l'intervalle (x_1, x_0), il existe dans cet intervalle des nombres α et β, tels que $f(\alpha) = M$ et $f(\beta) = m$.

Si $\alpha = \beta$, on a $M = m$, d'où résulte tout de suite que $f(x) = f(x_0)$, pour $x_1 \leqslant x \leqslant x_0$. On a donc dans ce cas $x \in J - E$, pour $a < x \leqslant x_0$, $(a = x_1)$, et la propriété 1 est démontrée.

Soit donc $\alpha \neq \beta$, Si $\beta = x_0$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour $x_1 \leqslant x \leqslant x_0$ et il en résulte sans peine que $x \in J - E$ pour $\alpha < x < x_0$. En effet, soit x un point intérieur à l'intervalle (α, x_0). On a donc $f(\alpha) = M \geqslant f(x) \geqslant f(x_0) = f(x_1)$. La fonction f étant continue dans l'intervalle (x_1, α), il existe dans cet intervalle un nombre t, tel que $f(t) = f(x)$. Or, de $t \leqslant \alpha < x$ résulte que $t < x$. On a donc $x \in J - E$ et la propriété 1 est vraie (pour $a = \alpha$).

Pareillement, si $\alpha = x_0$, on trouve $x \in J - E$ pour $\beta < x < x_0$ et la propriété 1 est vraie (pour $a = \beta$).

Soit enfin $\alpha \neq x_0$ et $\beta \neq x_0$. Désignons par a le plus grand de deux nombres α et β. Soit p. e. $a = \alpha > \beta$ et soit x un nombre tel que $a < x \leqslant x_0$.

On a $f(\alpha) = M \geqslant f(x) \geqslant m = f(\beta)$ et parsuite il existe dans l'intervalle (β, α) un nombre t, tel que $f(t) = f(x)$, et, d'après $t \leqslant \alpha = a < x$, on a $x \in J - E$. Pareillement, si $a = \beta > \alpha$, on trouve $x \in J - E$ pour $a < x \leqslant x_0$.

La propriété 1 est ainsi démontrée dans tous les cas.

Soit maintenant x_0 un nombre positif, appartenant à E, et soit a un nombre positif $< x_0$. Je dis qu'il existe un nombre $\delta > 0$, tel que

$$(1) \qquad |f(x) - f(x_0)| > \delta, \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant a.$$

En effet, s'il en était autrement, il existerait pour tout n naturel un nombre x_n, tel que

$$(2) \qquad |f(x_n) - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x_n \leqslant a.$$

En extrayant de la suite (bornée) x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite convergeante x_{n_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ et en posant $\lim\limits_{k=\infty} x_{n_k} = t$, on aurait d'après (2) (la fonction f étant continue):

$$f(t) = f(x_0) \quad \text{et} \quad t \leqslant a < x_0,$$

ce qui est impossible, puisque $x_0 \in E$ et $E = P(f)$.

Il existe donc un nombre $\delta > 0$, pour lequel on a la formule (1). Or, la fonction $f(x)$ étant continue pour $x = x_0$, elle prend pour $x < x_0$ suffisamment voisins à x_0 des valeurs $f(x)$, telles que

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta:$$

soit y_1 une d'elles et soit x_1 la borne inférieure de tous les nombres x, tels que

$$0 \leqslant x < x_0 \quad \text{et} \quad f(x) = y_1:$$

nous aurons donc

$$f(x) \neq f(x_1), \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x < x_1, \quad \text{donc} \quad x_1 \in E,$$

et

$$0 \leqslant x_1 < x_0 \quad \text{et} \quad |f(x_1) - f(x_0)| \leqslant \delta,$$

ce qui donne, d'après (1): $a < x_1 < x_0$. La propriété 2 de l'ensemble E est ainsi démontrée.

Soit x_0 un point donné quelconque de l'ensemble $J - E$. D'après la propriété 1, il existe un intervalle (a, x_0) (où $a < x_0$), tel que

$$(3) \qquad x \in J - E, \quad \text{pour} \quad a < x \leqslant x_0.$$

Soit α la borne inférieure des nombres a, tels qu'on a la formule (3), et soit β la borne supérieure des nombres b, tels que

$$x \in J - E, \quad \text{pour} \quad x_0 \leqslant x \leqslant b.$$

D'après la propriété 1, on a évidemment $\alpha \in E$, et, d'après la propriété 2, on a $\beta \in J - E$.

Or, il est évident que les intervalles (α, β) correspondant ainsi aux points de $J - E$ sont disjoints.

Si l'on supprime leurs extrémités gauches (en conservant les droites), leur somme donne évidemment l'ensemble $J - E$: si l'on supprime aussi leurs extrémités droites, leur somme est un ensemble ouvert. Il en résulte tout de suite que la condition de notre théorème est nécessaire.

Or, on voit sans peine qu'elle est aussi suffisante. Soit, en effet, H un ensemble parfait, contenu dans l'intervalle J et contenant le point 0. On peut sans peine construire une fonction continue $f(x)$ ayant comme intervalle d'invariabilité chaque intervalle contigu à H, et croissante en tout autre point de l'intervalle J, et il est évident qu'on aura $P(f)=E$, où l'ensemble E s'obtient en enlevant de H toutes les extrémités droites des intervalles contigus de H.

Notre théorème est ainsi démontré complètement.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction définie dans J et continue dans J du côté droit. Ici encore, comme pour les fonctions continues, il existe pour toute valeur y que prend $f(x)$ dans J, une valeur (unique) x, telle que $x \in P(f)$ et $f(x)=y$.

Or, *l'ensemble* $P(f)$ *peut être non mesurable* B, *et même non analytique.*

En effet, soit E_1 un ensemble CA (complémentaire analytique) donné quelconque, situé dans l'intervalle $(^1/_2, 1)$, et soit E_0 le complémentaire de E_1 par rapport à l'intervalle J: ce sera donc un ensemble (A). Comme on sait, il existe une fonction $f(x)$ définie et continue dans $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ du côté droit, dont l'ensemble de valeurs est E_0 [1]). Posons encore $f(x)=x$, pour $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$. La fonction $f(x)$ est ainsi définie dans J et évidemment partout continue dans J du côté droit. Or, on voit sans peine que la portion de l'ensemble $P(f)$ contenue dans l'intervalle $(^1/_2, 1)$ est l'ensemble E_1. L'ensemble E_1 pouvant être non analytique, il en est donc de même de l'ensemble $P(f)$, c. q. f. d.

Or, on peut démontrer que $P(f)$ est un ensemble CA.

Plus généralement, on a la proposition suivante:

Si $f(x)$ *est une fonction de Baire, définie dans l'intervalle* J, $P(f)$ *est un ensemble* CA.

Soit, en effet, $f(x)$ une fonction de Baire, définie dans J, et posons $E=P(f)$. Désignons par Q l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $y=f(x)$; $f(x)$ étant une fonction de Baire, Q sera un ensemble mesurable B [2]). Or, désignons par S l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace, tels que $(x, y) \in Q$ et $z>0$: ce sera donc aussi un ensemble mesurable B, et parsuite l'ensemble T de tous les points $(x+z, y)$ du plan, où $(x, y) \in Q$ et $z>0$, comme image continue de l'ensemble S, sera

[1]) Cela résulte tout de suite du théorème que j'ai démontré dans le vol. X des *Fund. Math.*, p. 169.

[2]) Voir p. e. *Fund. Math.* t. II, p. 78.

un ensemble (A), ainsi que le produit QT. Or, QT est évidemment l'ensemble de tous les points (t, y) du plan, tels que $t=x+z$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $z>0$, $y=f(t)=f(x)$, et parsuite la projection H de QT sur l'axe OX est l'ensemble de tous les nombres t, tels que $f(x)=f(t)$, où $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $x<t$. L'ensemble H est donc un ensemble (A). Or, il est évident que $E=$ $=J-H$: L'ensemble E est donc un CA, c. q. f. d.