Sur un problème de M. Mazurkiewicz.

Par

G. Poprougénko (Varsovie).

M. Mazurkiewicz a posé récemment le problème suivant:

α étant un nombre ordinal $< \Omega$, existe-t-il toujours un ensemble de nombres réels E_α sur lequel existent des fonctions de Baire de toutes les classes $\xi < \alpha$, mais sur lequel il n'existe aucune fonction de classe α?

Le problème est trivial pour $\alpha = 1$. Or, on voit sans peine que la réponse au problème de M. Mazurkiewicz est affirmative pour $\alpha = 2$: en effet, il suffit de prendre comme E_2 l'ensemble de tous les nombres rationnels [1]).

Le but de cette Note est de démontrer que *si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la réponse au problème de M. Mazurkiewicz est affirmative pour $\alpha = 3$.*

En effet, d'après M. Lusin [2]), il résulte de l'hypothèse du continu qu'il existe un ensemble linéaire non dénombrable L jouissant des propriétés suivantes:

(a) tous sous-ensemble de L qui est de 1-ère catégorie sur L est au plus dénombrable;

(b) tout point x de L est son point de condensation.

Or, je dis qu'on peut poser

$$E_3 = L. \tag{1}$$

Pour établir l'égalité (1), démontrerons tout d'abord que *toute fonction $f(x)$ définie sur L et remplissant la condition de Baire relativement à L est une fonction de classe $\leqslant 2$ de Baire.*

[1]) Cf. W. Sierpiński, ce volume, p. 195 (Lemme). Il est à remarquer que, d'après M. Szpilrajn, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, on pourrait prendre comme E_2 un ensemble non dénombrable. (Voir ce vol. p. 212).

[2]) C. *R.* t. 158 (note du 4 mai 1914), p. 1259.

En effet, soit $f(x)$ une fonction définie sur L et satisfaisant à la condition de Baire relativement à L. L'ensemble L étant parfait en lui-même, il résulte de la propriété (a) qu'il existe un sous-ensemble dénombrable K de L tel que la fonction $f(x)$ est continue sur $L - K$. Or, l'ensemble $L - K$ étant un G_δ relatif à L, on voit que les ensembles $\underset{x}{\mathrm{E}}[x \epsilon L, f(x) > \varrho]$ et $\underset{x}{\mathrm{E}}[x \epsilon L, f(x) \geqslant \varrho]$ peuvent être présentés pour tous ϱ réel sous la forme de la somme d'un G_δ (relatif à L) $+$ un ensemble au plus dénombrable: ce sont donc des ensembles $F_{\sigma\delta}$ et $G_{\delta\sigma}$ (relatifs à L) en même temps, ce qui donne, d'après un théorème de M. Hausdorff [1]), une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ soit de classe $\leqslant 2$ de Baire sur L, c. q. f. d.

D'après un théorème de M. Kuratowski [2]), toute fonction de Baire définie sur un ensemble séparable quelconque remplit la condition de Baire relativement à cet ensemble. Il en résulte d'après ce qui précède que toute fonction de Baire définie sur L est de classe $\leqslant 2$, ce que M. Sierpiński a trouvé sur une autre voie [3]).

Cela posé, il ne reste qu'à construire sur L une fonction de classe 2 de Baire.

Désignons à ce but par P un ensemble dénombrable dense dans L et posons

$$f(x) = 0, \quad \text{pour} \quad x \epsilon P, \tag{2}$$

et

$$f(x) = 1, \quad \text{pour} \quad x \epsilon L - P: \tag{3}$$

la fonction $f(x)$ définie par (2) et (3) est, d'après la propriété (b), discontinue à tout point de L. Or, M. Kuratowski a démontré [4]) que l'ensemble de points de discontinuité d'une fonction de classe 1 de Baire définie sur un ensemble séparable est toujours de 1-ère catégorie sur cet ensemble: il en résulte, l'ensemble (non dénom-

[1]) Hausdorff: *Mengenlehre*, 1927, § 43, 1, Théorème I (p. 259) et § 43, 2, pp. 259—260.

[2]) *Fund. Math.* t. V, p. 82. Corollaire I.

[3]) V. la note citée de M. Szpilrajn, ce vol., p. 212.

[4]) *Fund. Math.* t. V, p. 80. Théorème I.

brable) L étant, d'après la propriété (a), de 2-ème catégorie sur lui-même, que $f(x)$ n'est pas une fonction de classe 1 de Baire.

D'autre part, la fonction $f(x)$ est évidemment une fonction de Baire relativement à l'espace L, car elle est continue sur les ensembles P et $L-P$ dont le premier est un F_σ et le second un G_δ relatif à L. Cette fonction est donc de classe 2, ce qui démontre l'égalité (1).

Pour $\alpha > 3$ le problème de M. Mazurkiewicz reste non résolu et semble être très difficile même pour $\alpha = 4$.

Sur un problème concernant les fonctions continues.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

$f(x)$ étant une fonction définie dans l'intervalle $J(0 \leqslant x \leqslant 1)$, désignons par $P(f)$ l'ensemble de tous les nombres x de cet intervalle, tels que

$$f(x) \neq f(t), \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < x$$ [1])

Théorème: *Pour qu'il existe une fonction continue $f(x)$, telle yue $E = P(f)$, il faut et il suffit que l'ensemble E s'obtienne en enlevant d'un ensemble parfait, situé dans l'intervalle J (et contenant le point 0), toutes les extrémités droites de ses intervalles contigus* (s'il y en a).

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction donnée, continue dans l'intervalle J, et soit $E = P(f)$. Nous prouverons que l'ensemble E jouit de deux propriétés suivantes:

1. Si $x_0 \epsilon J - E$, il existe un nombre $a < x_0$, tel que $x \epsilon J - E$, pour $a < x \leqslant x_0$.

2. Si $0 < x_0$ et $x_0 \epsilon E$, il existe pour tout nombre $a < x_0$ un nombre $x \epsilon E$, tel que $a < x < x_0$.

Soit x_0 un point de l'ensemble $J - E$. De la définition de l'ensemble $E = P(f)$ résulte qu'il existe un nombre x_1, tel que $0 \leqslant x_1 < x_0$ et $f(x_0) = f(x_1)$

Désignons par M, resp. par m la borne supérieure, resp. infé-

[1]) M. Mazurkiewicz a remarqué que si f est une fonction continue, $P(f)$ est un ensemble G_δ: cf. S. Banach, *Fund. Math.* t. VIII, p. 167.