μ'_1, tel que $\overline{\Delta}_{\mu'_1} \cdot \overline{\Delta}_{\mu_k} = 0$. On a à fortiori $\overline{\Delta'_{\mu_s}} \cdot \overline{\Delta'_{\mu'_1}} = 0$ pour $s = 1, 2, \dots, k$.

Nous allons continuer le procédé en partant de $\overline{\Delta}_{\mu'_1}$ et en formant une suite saturée:

$$\Delta'_{\mu'_1} \subset \Delta'_{\mu'_1} \subset \dots \subset \Delta'_{\mu'_l}.$$

Remarquons que ces bases sont nécessairement disjoints à Δ'_{μ_k} puisque (3) ne peut pas être prolongée.

Soit μ''_1 le premier indice tel que $\mu''_1 > \mu'_l$ et que $\overline{\Delta}_{\mu'_l} \cdot \overline{\Delta}_{\mu''_1} = 0$. On procède ainsi indéfiniment.

Les bases Δ'_{μ_1}, $\Delta'_{\mu'_1}$, $\Delta'_{\mu''_1}$, ... sont nécessairement disjoints ce qui est impossible, d'après le lemme 2.

L'existence de la suite

$$\Delta'_{\nu_1} \subset \Delta'_{\nu_1} \subset \dots$$

est ainsi assurée.

On achève facilement la démonstration du théorème, en montrant que

$$K_{\nu_{n+1}} \text{ divise } G \text{ entre } p \text{ et } K_{\nu_n}.$$

Remarquons que la condition 1° du théorème est essentielle pour que la thèse subsiste.

Si la frontière du domaine n'est pas jordanienne, la thèse peut être en défaut et il y en est de même, si les diamètres des arcs ne sont pas supérieurs à un nombre positif fixe.

Sur le problème des courbes gauches en Topologie[1].

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

J'appelle une courbe, ou en général, un ensemble de points A, *gauche au sens topologique*, lorsque A n'est homéomorphe à aucun ensemble situé sur le plan.

Le problème consiste à caractériser les courbes gauches, ainsi conçues, de façon intrinsèque.

Dans cet ordre d'idées, le premier résultat important fut celui de M. Ważewski[2]): une courbe gauche n'est jamais une dendrite[3]).

Ce résultat fut précisé ensuite par M. Ayres, qui prouva qu'un continu Péanien gauche doit — non seulement contenir une courbe simple fermée, comme l'a prouvé M. Ważewski — mais qu'il contient toujours une courbe de la forme „θ“ (courbe composée de trois arcs coextrémaux n'ayant deux à deux que leurs extrémités en commun)[4]).

Je vais me borner dans cette note à traiter ledit problème dans

[1]) Les résultats principaux de cette note ont été communiqués à la Soc. Polonaise de Math. (Section de Varsovie) à la séance du 21 juin 1929.

[2]) Ann. de la Soc. Pol. Math. 2 (1924), p. 49—170 Cf. aussi une simple démonstration du même théorème donnée par M. Menger, Fund. Math. X (1926). Le théorème de M. Ważewski répond à un problème posé par M. Mazurkiewicz dans Fund. Math. II, p. 130.

[3]) Une *dendrite* est, par définition, un continu *Péanien* (= image continue d'un intervalle) qui ne contient aucune courbe simple fermée. C'est une généralisation de la notion de *l'arbre* de la topologie combinatoire.

[4]) Fund. Math. XIV, p. 92. M. Ayres prouve que la propriété de ne pas contenir de courbes θ caractérise les continus Péaniens qui sont homéomorphes à la *frontière d'une région* située sur le plan.

le domaine des continus Péaniens qui ne contiennent qu'un nombre fini de courbes simples fermées [1]). Je prouve qu'*un continu gauche de ce genre contient nécessairement une courbe homéomorphe à l'une des deux courbes suivantes*:

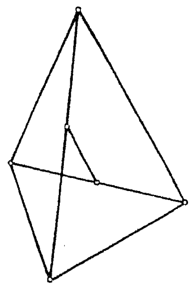

Fig. 1.

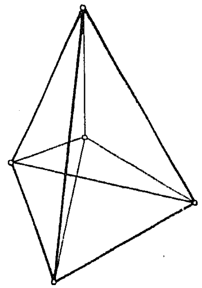

Fig. 2.

1) courbe composée des arêtes d'un tétraèdre et d'un segment unissant deux arêtes disjointes (cette courbe contient 6 points d'ordre 3):

2) courbe composée des arêtes d'un tétraèdre et des 4 segments qui unissent le centre de gravité du tétraèdre à ses sommets (cette courbe contient 5 points d'ordre 4).

Ce théorème *caractérise* les courbes gauches dans le domaine des courbes considérées, car évidemment ni la courbe de la fig. 1 ni celle de la fig. 2 n'est homéomorphe à une courbe située sur le plan.

Dans le domaine des continus Péaniens qui contiennent une infinité de courbes simples fermées ce théorème n'est pas valable [2]). Cependant il l'est encore — comme je vais prouver ici — dans une famille de *surfaces*; notamment une surface polyédrale [3]) gauche (exception faite de la surface de la sphère) contient nécessairement une courbe du type 1 ainsi qu'une autre du type 2. Ainsi, en particulier, les courbes de ces deux types peuvent être tracées sur le tore, sur la bande de Möbius, sur le plan projectif.

[1]) Ces continus peuvent être définis comme continus qui sont *localement* des dendrites. Ils présentent une généralisation des *réseaux* de la topologie combinatoire; pour ces derniers, un théorème analogue au mien fut trouvé — comme j'ai appris de M. Alexandroff — par M. Pontrjagin il y a plusieurs années mais n'a pas été publié jusqu'à présent.

[2]) Parmi ceux-ci il y a aussi deux courbes qui semblent jouer un rôle important. Pour les construire, imaginons une suite infinie de courbes C_n semblables à la courbe de le fig. 3 ou de la fig. 4 respectivement (du N 4), la courbe C_{n+1} intercalée à l'intérieur du demi-cercle droit de C_n et unie à C_n par l'arc $a_n b_{n+1}$, et élévons un segment vertical du point $p = \lim C_n$.

[3]) au sens établi par ex. chez Kerékjártó, Topologie, p. 131 ss.

1. *Définitions et notations.*

$\overline{X}$ désigne l'ensemble X augmenté de ses points d'accumulation. A et B sont dits *séparés* si $A\overline{B} = 0 = \overline{A}B$. Un ensemble est dit *connexe* s'il n'est pas somme de deux ensembles séparés et non-vides. Un ensemble connexe et ouvert est dit *région*. Une *composante* d'un ensemble est un sous-ensemble connexe qui n'est situé dans aucun autre sous-ensemble connexe. A est une *coupure* entre deux ensembles B et C, si $A(B+C) = 0$ et s'il n'existe aucun continu K tel que $KA = 0$ et $KB \neq 0 \neq KC$.

ab désigne un arc dépourvu des extrémités; $(a, b) =$ l'ensemble composé des deux points a et b. Donc $\overline{ab} = ab + (a, b)$.

Un point a est dit *accessible* d'un ensemble E, s'il existe un arc $ab \subset E$.

2. *Théorèmes préliminaires sur la séparation d'ensembles situés sur la surface sphérique.*

Rappelons d'abord les deux théorèmes suivants [1]):

(I) A et B étant deux ensembles séparés tels que $\overline{A}\,\overline{B}$ est fini [2]), il existe, pour chaque couple de points $p \in A$ et $q \in B$, une courbe simple fermée Q qui est une coupure entre p et q et que

$$Q(A+B) = 0. \tag{1}$$

(II) C_1 et C_2 étant deux continus tels que 1°: $C_1 - C_2$ est connexe, 2°: $C_1 C_2$ est fini [2]), 3°: C_1 ne coupe la surface sphérique entre aucun couple de points de $C_2 - C_1$, il existe une courbe simple fermée qui est une coupure entre $C_1 - C_2$ et $C_2 - C_1$.

[1]) Voir ma note de Fund. Math. XII, p. 221 et p. 232 (corollaire). Dans la même note je renvoie le lecteur à des ouvrages de MM. R. L. Moore et Lubben qui s'y rattachent.

[2]) ou plus généralement punctiforme, c. à d. ne contenant aucun continu qui ne se réduise pas à un seul point.

Nous déduirons du théorème (I) les conséquences suivantes:

(III') K étant une courbe simple fermée, W un des deux disques (ouverts) en lesquels K coupe la surface sphérique, M un continu Péanien et a et b deux points de K qui ne se laissent pas unir par un arc $L \subset W - M$, il existe une composante S de WM telle que

$$\overline{S}\,.\,ab \neq 0 \neq \overline{S}\,.\,ba$$

ab et ba désignant les deux arcs de la courbe K (supposée orientée).

Or, supposons qu'il n'en soit pas ainsi et posons: $A = ab +$ toutes les composantes S_i de WM telles que $\overline{S_i}\,.\,ab \neq 0$; $B = ba +$ toutes les autres composantes de WM. Il vient

$$(2) \qquad WM \subset A + B \text{ et } K \subset A + B + (a, b);$$

en posant, $F(S) = \overline{S} - S$ (frontière de S relative à M), l'inégalité $\overline{S_i}\,.\,ab \neq 0$ entraîne, par hypothèse, $\overline{S_i}\,.\,ba = 0$, d'où:

$$(3) \qquad F(S_i) \subset \overline{ab}.$$

Le continu M étant Péanien, on a $F(\sum_i S_i) \subset \overline{\sum_i F(S_i)}$ [1]), donc, selon (3): $F(\sum_i S_i) \subset \overline{ab}$, ce qui implique que $\overline{\sum_i S_i} \subset A + \overline{ab}$, donc que

$$\overline{A} = A + (a, b).$$

D'une façon analogue

$$\overline{B} = B + (a, b).$$

Les deux dernières formules rapprochées de l'égalité évidente $AB = 0$, impliquent que les ensembles A et B sont séparés et que le produit $\overline{A}\,\overline{B}$ est fini $(= (a, b))$. Soient $p \in ab$ et $q \in ba$ et considérons la courbe Q de la proposition (I).

La courbe Q, comme coupure entre p et q, contient évidemment des points situés à l'intérieur de W ainsi qu'à son extérieur. Par conséquent, Q contient un arc (ouvert) $L \subset W$ et ayant ses extrémités situées sur K. Ces extrémités ne peuvent être autres que a et b, puisque selon (1) et (2): $KQ \subset (a, b)$. Donc L unit a à b. De plus, en raison des mêmes formules: $QWM = 0$, d'où $LWM = 0$ et, par conséquent, $L \subset W - M$.

[1]) Cf. Hausdorff, Mengenlehre, p. 155 ou ma note de Fund. Math. VIII, p. 137.

(III'') Dans les mêmes hypothèses faites sur K, W et M, si Z est un ensemble fini contenu dans K et tel que, pour aucune région-composante R de $W - M$, on n'ait $Z \subset \overline{R}$, tandisque tous deux points de Z se laissent unir par un arc dans $W - M$, il existe alors, pour chaque couple $(x, y) \subset Z$, une composante S de WM telle que $(x, y) \subset \overline{S}$.

Soit, en effet, $(xy)_R$ un arc contenu dans une composante R de $W - M$. Par hypothèse, il existe un point $z \in Z$ qui n'appartient pas à $\overline{R}$. Donc, yz et zx désignant deux arcs contenus dans $W - M$, ces arcs sont situés dans des composantes différentes de R; d'où: $(xy)_R\,.\,(yz + zx) = 0$. Extrayons de $\overline{yz} + \overline{zx}$ un arc yx. On a, par conséquent: $(xy)_R\,.\,yx = 0$, ce qui prouve que la courbe $K^* = (xy)_R + \overline{xy}$ est une courbe simple fermée; en outre:

$$(4) \qquad MK^* \subset (x, y, z) \quad \text{et} \quad K^* \subset \overline{W}.$$

Soit V la région du complémentaire de K, distincte de W.

La dernière inclusion implique que $VK^* = 0$, donc que V est situé dans l'une des deux régions V^* et W^* en lesquelles K^* coupe la surface sphérique. Soit $V \subset V^*$, donc, par contraposition:

$$(5) \qquad W^* + K^* \subset W + K.$$

D'autre part, l'inclusion $V \subset V^*$ entraîne $\overline{V} \subset \overline{V^*}$ et comme $K \subset \overline{V}$ et $\overline{V^*}\,.\,W^* = 0$, il vient $KW^* = 0$, donc, en vertu de (5):

$$W^* \subset W.$$

Soient: $r \in (xy)_R$ et $z' \in yx$ et, en outre, $z' = z$, en cas où $z \in yx$. Les points r et z' ne peuvent être unis par aucun arc situé dans $W - M$, car autrement on pourrait (en vertu des définitions de yz et zx) unir r à z dans $W - M$ et, comme $r \in R$, on aurait $z \in \overline{R}$, contrairement à l'hypothèse. On en conclut, en tenant compte de l'inclusion $W^* \subset W$, que les points r et z' ne se laissent pas unir par un arc $\subset W^* - M$, ce qui entraîne, en vertu de (III'), l'existence d'une composante S^* de $W^*.M$ telle que $\overline{S^*}.(rz')_{K^*} \neq 0 \neq \overline{S^*}.(z'r)_{K^*}$. Cela prouve que $\overline{S^*}.K^*$ contient deux points distincts de z. Or, comme $S^* \subset M$, on tire de (4): $\overline{S^*}\,K^* \subset (x, y, z)$ et il s'ensuit finalement: $(x, y) \subset \overline{S^*}$.

La composante S de WM qui contient S^* est la composante demandée.

Le théor. (II) implique que

(IV) M étant un continu, R une région-composante de son complémentaire et Z un sous-ensemble fini de M composé de points accessibles de R, on peut faire passer par Z une courbe simple fermée K telle, que les deux régions D et E en lesquelles K coupe la surface sphérique satisfassent aux conditions:

(6) $$D \subset R$$

(7) $$M \subset E + Z.$$

En effet, on prouve d'abord facilement (par induction finie) qu'il existe une dendrite (voir Introduction) T ayant pour points d'arrêt les points de Z et telle que

(8) $$T - R = Z; \quad \text{d'où} \quad TM = Z.$$

Par conséquent, $T - M$ est connexe. Comme, d'autre part, une dendrite n'est jamais une coupure, on peut appliquer la proposition (II) où l'on pose: $C_1 = T$, $C_2 = M$.

On en conclut l'existence d'une courbe simple fermée K telle que

(9) $$T - M \subset D$$

(10) $$M - T \subset E.$$

Comme $\overline{T - M} = T$ et $\overline{M - T} = M$, il vient selon (8)—(10):

$$Z = TM \subset \overline{D} \cdot \overline{E} = K.$$

Selon (8), $T - M = T - Z \subset R$, donc d'après (9), $DR \neq 0$. Cette inégalité implique l'inclusion (6), car, si on avait $D - R \neq 0$, on aurait (D étant connexe): $DM \neq 0$, d'où $DM - T \neq 0$ (puisque $DMT = DZ = 0$), ce qui contredit la formule (10).

L'inclusion (7) est une conséquence de (10) et du fait que $M - T = M - Z$ (form. (8)).

Nous déduirons enfin de la proposition (IV) la suivante:

(V) M étant un continu, R une région-composante de son complémentaire et G un ensemble ouvert dans M et tel que l'ensemble $\overline{G} - G$ est fini et composé de points accessibles de R, il existe un ensemble G^* tel que $G^* \subset R$ et $G^* + M - G$ est homéomorphe à M.

En effet, posons dans (IV): $Z = \overline{G} - G$ et transformons $\overline{E}$ en $\overline{D}$ à l'aide d'une fonction bicontinue $f(x)$ telle que $f(x) = x$ pour $x \in K$.

L'ensemble $G^* = f(G)$ est l'ensemble demandé, car la fonction $\varphi(x)$ égale à $f(x)$, pour $x \in G$, et à x, pour $x \in M - G$, est bicontinue. (Elle est biunivoque, car d'après (6): $G^* \cdot (M - G) = 0$, elle est continue aux points de G et de $M - \overline{G}$, car ces deux ensembles sont ouverts dans M, enfin elle est continue aux points de $\overline{G} - G = Z \subset K$, car pour ceux-ci: $f(x) = x$).

3. *Propriétés des continus Péaniens qui ne contiennent qu'un nombre fini de courbes simples fermées.*

Soit A un continu de ce genre et K une courbe simple fermée contenue dans A. Je dis que

(I) S étant une composante de $A - K$, 1°: l'ensemble $\overline{S} - S$ est fini; 2°: chaque point de $\overline{S} - S$ est accessible de S;

(II) la famille des composantes S de $A - K$ telles que $\overline{S} - S$ ne se réduise pas à un seul point est finie.

En effet, A étant un continu Péanien, si p et q sont deux points de $\overline{S} - S$, il existe aussi près que l'on veut de p et q resp. deux points p' et q' appartenant à K et un arc $p'q' \subset S$. L'arc $p'q'$ ajouté à l'arc $\overline{(p'q')}_K$, extrait de K, constitue une courbe simple fermée. En vertu de l'hypothèse faite sur A, on en conclut que le nombre de ces arcs $p'q'$ est fini, d'où résultent les propositions I, 1° et II. La proposition I, 2° est une conséquence de I, 1°.

Supposons, à présent, que le continu A (assujetti toujours aux mêmes hypothèses) *contient une „courbe θ"* (voir Introduction). Je vais prouver que

(III) A est somme de deux continus M et N dont le produit se compose de deux points a et b qui sont situés sur une courbe simple fermée contenue dans M.

En effet, soit K une courbe simple fermée contenue dans la courbe θ. Considérons la famille $\mathcal{F}$ de tous les couples de points (x, x') extraits de K et qui peuvent être unis par un arc $xx' \subset A - K$. Cette famille n'est pas vide, puisque $K \subset \theta$. D'autre part, selon I, 1° et II, elle est finie. Il existe, par conséquent, un couple (a, a') tel que l'arc $\overline{aa'}$ de la courbe K (supposée orientée) ne contient aucun autre couple appartenant à $\mathcal{F}$. Deux cas sont à distinguer:

1) aucun couple de la famille $\mathcal{F}$ n'a des points communs avec aa'; dans ce cas, posons $b = a'$,

2) dans le cas contraire, soit $b =$ le premier point de l'arc aa' qui appartient à un couple de la famille $\mathcal{F}$ (on a donc: $a \prec b \prec \prec a' \prec b' \prec a$).

On voit aussitôt, en tenant compte de I, 2⁰, que, dans les deux cas, si S est une composante de $A-K$ et si $\overline{S} \cdot ab \neq 0$, on a $\overline{S} \cdot \overline{ba} = 0$. Donc, en posant: $M = \overline{ba} +$ toutes les composantes S de $A-K$ telles que $\overline{S} \cdot \overline{ba} \neq 0$, $N = \overline{ab} +$ toutes les autres composantes, on en conclut que M et N sont deux continus, $A = M + N$ et $MN = = \overline{ba} \cdot \overline{ab} = (a, b)$.

En outre, M contient une courbe simple fermée Q qui unit a à b. Notamment, dans le cas 1), il existe un arc $(ab)^*$ disjoint de K et il suffit de poser $Q = (ab)^* + \overline{ba}$. Dans le cas 2), il existe deux arcs $(aa')^*$ et $(bb')^*$ disjoints de K et disjoints entre eux, puisque autrement le couple (a, b) appartiendrait à la famille $\mathcal{F}$; on pose $Q = (aa')^* + \overline{ba'} + (bb')^* + \overline{b'a}$.

4. *Réduction du problème des courbes gauches à un problème de la topologie du plan.*

Le théorème que nous nous proposons d'établir est le suivant

Théorème A. *A étant un continu Péanien gauche qui ne contient qu'un nombre fini de courbes simples fermées, A contient une courbe homéomorphe à la courbe de la fig. 1 ou à celle de la fig. 2.*

Afin de réduire notre problème de la façon annoncée j'admets la définition suivante:

Définition. Les points a et b d'un continu C sont dits conjugués (relativement à C), s'il existe sur le plan un continu C^* homéomorphe à C et tel que les points a^* et b^* (qui correspondent à a et b) se laissent unir sur le plan par un arc $a^* b^*$ disjoint de C^*.

Je vais prouver que

M et N étant deux continus dont le produit se compose de deux points a et b qui sont conjugués relativement à M ainsi que relativement à N, la somme $M + N$ n'est pas un continu gauche.

En effet, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que M est situé sur la surface sphérique et que ab est un arc (situé sur la même surface) et disjoint de M. En se servant des notations de la proposition (IV), p. 276, où l'on pose $Z = (a, b)$, on a

$$DM = (D + K) M = KM = (a, b). \tag{1}$$

D'autre part, il existe, par hypothèse, sur la surface sphérique un continu N^* homéomorphe à N et un arc $a^* b^*$ disjoint de N^*. En vertu de la même proposition (IV), on conclut qu'il existe un disque E_1 qui a pour contour une courbe simple fermée K_1 et que $N^* - (a^*, b^*) \subset E_1$ et $(a^*, b^*) \subset K_1$.

Il existe évidemment une transformation homéomorphe de $\overline{E_1}$ en $\overline{D}$ qui transforme a^* en a et b^* en b. Soit N^{**} le continu qui — dans cette homéomorphie — vient correspondre à N^*. On a selon (1): $MN^{**} = (a, b)$, d'où on conclut aussitôt que $M + N^{**}$ est homéomorphe à $M + N$.

$M + N$ n'est donc pas un continu gauche.

Ceci établi, revenons au théor. A. Le continu A étant un continu gauche, il contient selon le théorème de M. Ayres (cité dans l'introduction) une courbe θ. On peut donc lui appliquer la proposition (III) du N 3. De plus, le nombre des courbes simples fermées contenues dans A étant fini, il est légitime d'admettre (en raison du procédé de l'induction finie) qu'aucun sous-continu de A qui contient un nombre inférieur de courbes simples fermées n'est gauche. Par conséquent, les deux continus M et N de la proposition précitée sont des continus non-gauches (puisque aucun d'eux ne contient la courbe simple fermée $\overline{(ab)}_M + \overline{(ab)}_N$, dont une moitié est contenue dans M et l'autre dans N). Pour la même raison, $N + (ab)_M$ n'est pas gauche, car M contient (par hypothèse) une courbe simple fermée qui n'est pas contenue dans $N + (ab)_M$, puisque $M[N + (ab)_M] = \overline{(ab)}_M$. Ceci revient à dire que les points a et b sont conjugués relativement à N. On en conclut, en vertu de la proposition que nous avons démontrée tout-à-l'heure, que *les points a et b ne sont pas conjugués relativement à M.*

Or, je vais prouver que M contient une courbe Q qui est homéomorphe à une des trois courbes suivantes (situées sur le plan) et a la même disposition des points a et b:

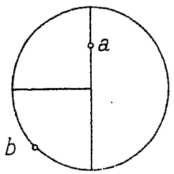

Fig. 3.

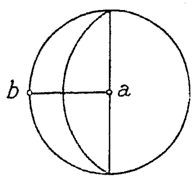

Fig. 4.

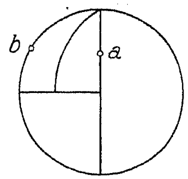

Fig. 5.

De là on conclura aussitôt que A contient une courbe du type 1 ou 2. Notamment, si Q est du type 3, la courbe $Q+(ab)_N$ est du type 1, si Q est du type 4, elle est du type 2, enfin si Q est du type 5, $Q+(ab)_N$ diminué de l'arc qui unit b au point de ramification d'ordre 4 est une courbe du type 1.

Ainsi la démonstration du théor. A se réduit à la démonstration de l'énoncé suivant:

Théorème B. *Etant donné sur le plan un continu Péanien* M *ne contenant qu'un nombre fini de courbes simples fermées et tel que* 1°: M *contient deux points non-conjugués* a *et* b, 2°: a *et* b *appartiennent à une courbe simple fermée contenue dans* M, — *alors* M *contient une courbe homéomorphe à une courbe de la fig.* 3, 4 *ou* 5.

5. *Démonstration du théorème B.*

Parmi les courbes simples fermées K contenues dans M et contenant a et b, il existe une courbe K telle que, V désignant la région bornée déterminée sur le plan par K, il n'existe aucune autre courbe K' dont la région bornée soit contenue dans V.

Car, en cas contraire, il existerait une infinité de courbes simples fermées contenues dans M.

K étant ainsi défini, *si* cd *est un arc contenu dans* VM *et ayant ses extrémités sur* K, *l'une d'elles appartient à* $(ab)_K$ *et l'autre à* $(ba)_K$ (ces symboles désignant des arcs extraits de K).

Soit W la région non-bornée déterminée sur le plan par K.

Je vais prouver que, parmi les composantes de MW, il existe une composante S telle que:

1°: $\overline{S}$ contient deux points p et q tels que $p\in(ab)_K$ et $q\in(ba)_K$,

2°: $\overline{S}K$ contient deux points s et t qui ne se laissent unir par aucun arc $st\subset V-M$.

Au préalable, je prouverai l'existence d'une composante S vérifiant la cond. 1° et la suivante:

3°: il n'existe aucune région-composante R de $V-M$, telle que $\overline{S}-S\subset\overline{R}$.

Supposons, par impossible, qu'il n'existe aucune composante S assujettie aux conditions 1° et 3°. Soit G la somme de tous les S tels que $\overline{S}.(ab)_K\neq 0\neq\overline{S}.(ba)_K$. La famille de tous ces S étant finie (selon la proposition II du $N3$, puisque S est composante de $M-K$), il existe, par conséquent, une suite finie $R_1,\dots,R_n$ de régions-composantes de $V-M$ telle que, pour chaque S, l'ensemble $\overline{S}-S$ est contenu dans l'un des ensembles $\overline{R}_i$. Posons $G_1=$ la somme de tous les S tels que $\overline{S}-S\subset\overline{R}_1$, et, en général, $G_i=$ la somme des S tels que $\overline{S}-S\subset\overline{R}_i$ et S n'entre dans aucun G_j avec $j<i$. Donc $G=G_1+\dots+G_n$, $\overline{G_i}-G_i\subset\overline{R}_i$ et les G_i sont disjoints et ouverts dans M.

Le continu M étant Péanien, chaque point de $\overline{G_1}-G_1$ est accessible de R_1. La proposition (V) du $N2$ est donc applicable. Il en résulte que M est homéomorphe à un continu $M_1=G_1^*+M-G_1$, où $G_1^*\subset R_1$.

Or, la même proposition peut être aussi appliquée au continu M_1. En effet, l'ensemble G_2, comme ouvert dans M, est ouvert M_1, car $G_2\subset W$ et $G_1^*\subset V$. D'autre part, R_2 comme composante de $V-M$, est composante de $V-M_1$, puisque l'inclusion $G_1^*\subset R_1$ entraîne $\overline{R}_2M=\overline{R}_2M_1$.

On peut donc substituer dans la proposition précitée: M_1 à M, R_2 à R et G_2 à G. En procédant ainsi de suite, on parvient à la conclusion que M est homéomorphe à un continu $M^*=G^*+M-G$ où $G^*\subset V$.

Comme $M^*.W=MW-G$, on conclut de la définition de G, que $M^*.W$ ne contient aucun ensemble connexe (et, à plus forte raison, aucune composante) S' tel que $\overline{S'}(ab)_K\neq 0\neq\overline{S'}(ba)_K$. Mais alors, en vertu de la proposition (III') du $N2$, les points a et b se laissent unir par un arc ab disjoint de M^*, contrairement à l'hypothèse que ces deux points sont non-conjugués relativement à M.

L'existence d'une composante S qui vérifie les conditions 1° et 3° est ainsi établie.

Cette composante vérifie aussi la condition 2°. Ceci est évident dans le cas où l'ensemble $\overline{S}-S$ se réduit à deux points. Supposons donc que $\overline{S}-S$ contienne trois points, au moins, dont deux, x et y, appartiennent à $\overline{(ab)}_K$ et supposons, en outre, que S satisfasse à la cond. 3° mais pas à 2°. On peut donc appliquer la proposition (III''), où l'on remplace W par V et Z par $\overline{S}K$ $(=\overline{S}-S)$. Il en résulte l'existence d'un arc $xy \subset VM$. Or, les extrémités de cet arc étant situées sur $(\overline{ab})_K$, on parvient à une contradiction avec la propriété de K établie au début de la démonstration.

Il est ainsi établi que S satisfait à 2°.

La condition 2° entraîne, en vertu de la proposition (III') du N 2 (où l'on remplace W par V) l'existence d'un arc $cd \subset VM$ tel que $c \epsilon (st)_K$ et $d \epsilon (ts)_K$. De plus, selon la propriété de K, citée tout-à-l'heure, on peut admettre que $c \epsilon (ab)_K$ et $d \epsilon (ba)_K$.

Nous allons extraire, à présent, de $K+S+cd$ une courbe qui est soit du type 3, soit 4, soit 5. Nous aurons 4 cas à distinguer:

1). $s \epsilon (ab)_K$ et $t \epsilon (ba)_K$.

Dans ce cas, la courbe $K+(st)_S+cd$ est du type 3.

Il est donc légitime d'admettre dans les cas suivants qu'il n'existe aucun couple s, t qui satisfasse aux conditions 2° et 1) à la fois.

2) $s=a$, $t \epsilon (ba)_K$.

Soit T la courbe de la forme „T" (triode) extraite de S et ayant les points p, s, t, pour extrémités. La courbe $K-(ac)_K+T+cd$ est du type 3.

3) $s=a$, $t=b$. Donc $p=c$ et $q=d$ (car autrement on est dans le cas 1) ou 2)).

S'il existe dans S une courbe de la forme „X" ayant pour extrémités les points a, b, c, d la courbe $K+X+cd$ est du type 4. S'il n'en est pas ainsi, soit T le triode défini comme auparavant. Soit v son „centre". Il existe dans $S-T$ un arc D qui unit d à T; cet arc aboutit donc soit sur av, soit sur bv. On peut évidemment admettre que c'est le premier cas qui a lieu; la courbe $K-(cb)_K-(da)_K+T+D+cd$ est du type 3.

4) Le seul cas qui reste à être considéré est: $s, t \epsilon (ba)_K$ et $p=c$. Dans ce cas, la courbe $K+T+cd$ est du type 5.

Le théorème $\boldsymbol{B}$ et, par conséquent, le théorème $\boldsymbol{A}$ se trouvent ainsi démontrés.

6. *Les surfaces gauches.*

Théorème C. *Toute surface polyédrale gauche* (sauf la surface sphérique) *contient une courbe homéomorphe à celle de la fig. 1 et une autre à celle de la fig. 2.*

En effet, A étant une surface de ce genre, A est donnée comme somme finie de triangles n'empiétant pas les uns sur les autres (et assujettis à certaines conditions). Cette surface étant gauche, il existe selon un théorème général [1]) — dans le raiseau formé par les contours des triangles une ligne polygonale simple fermée K qui n'est pas une coupure de A et n'est pas contenue dans le „bord" de A.

Autrement dit, il existe deux triangles abc et abd (qui appartiennent au raiseau ou non) dont le côté commun, $ab = abc \cdot K = abd \cdot K$, et un arc unissant c et d en dehors de K. Cet arc contient un arc $L = c'd'$ dont seules les extrémités appartiennent aux triangles abc et abd resp. Unissons les points c' et d' par un arc M situé à l'intérieur du quadrilatère $acbd$ et n'ayant qu'un seul point commun avec ab.

La courbe ($K+L+M+$ la ligne fermée $acbd$) est du type 2.

Pour extraire de A une courbe du type 1, désignons par p un point situé entre a et c' sur le contour (orienté) du triangle acb; soit q un point entre b et d' sur le contour de abd. Joignons les points p et q par un arc N contenu à l'intérieur de $abcd$.

La courbe $K-ab+L+N+acbd$ est bien du type 1.

[1]) Voir Kerékjártó, l. c., p. 143.