contigus à K, converge absolument. Il existe, par conséquent, un sous-intervalle Π de (a, b) contenant dans son intérieur des points de K, et tel que

$$\Pi \times K = \Pi \times P_\mu.$$

Or, aucun intervalle situé dans l'intérieur d'un des intervalles contigus π_n, ne contient de points singuliers $\mathfrak{L}_\mu$; par conséquent, $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{L}_\mu)$ dans chaque tel intervalle et en vertu de (6), la valeur de son intégrale $(\mathfrak{L}_\mu)$ y coïncide avec celle de son intégrale $(\mathfrak{D})$. Il s'en suit facilement que $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{L}_\mu^c)$ sur chaque intervalle π_n et que

$$\mathfrak{L}_\mu^c(f; \pi_n) = (\mathfrak{D})\int_{\pi_n} f(x)\,dx,$$

et

$$O(\mathfrak{L}_\mu^c; f; \pi_n) = O(\mathfrak{D}; f; \pi_n)\ ^{1)}.$$

On a donc

$$\sum_n |\mathfrak{L}_\mu^c(f; \pi_n)| < +\infty, \tag{9}$$

et lorsque la suite $\{\pi_n\}$ est infinie, aussi

$$\lim_n O(\mathfrak{L}_\mu^c; f; \pi_n) = 0. \tag{10}$$

Or, en raison de (7), tous les points de K, (au moins ceux qui sont intérieurs à Π), sont à la fois des points singuliers $(\mathfrak{L}_\mu^c)$ de $f(x)$ dans Π. D'autre part, la fonction $f(x)$ étant sommable sur K, elle y est, à plus forte raison, intégrable $\mathfrak{L}_\mu^c$ en tant que $\mathfrak{L}_\mu^c \supset \mathfrak{L}_\mu$ contient l'intégrale lebesguienne. Il s'en suit en raison de (9) et (10) que $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{L}_\mu^{ch} = \mathfrak{L}_{\mu+1})$ dans Π ce qui est évidemment contradictoire avec l'hypothèse que Π contient dans son intérieur des points de $P_{\mu+1} = P_\mu$.

Nous avons supposé plus haut que P_μ ne se réduit pas aux extrémités de l'intervalle (a, b). Or, s'il en était ainsi, on vérifierait de suite que $f(x)$ serait intégrable $(\mathfrak{L}_\mu^c)$, donc, à plus forte raison, intégrable $(\mathfrak{L}_{\mu+1})$ dans (a, b) ce qui est aussi contradictoire avec l'hypothèse (8).

Ainsi, dans tout cas nous aboutissons avec (8) à une contradiction; il s'en suit que $P_\mu = 0$, c.-à-d. que $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{L}_\mu)$ dans (a, b).

Notre assertion est donc démontrée.

[1]) $\mathfrak{S}$ étant une intégrale et $f(x)$ une fonction quelconque intégrable $(\mathfrak{S})$ dans un intervalle I_0, $O(\mathfrak{S}; f; I_0)$ désigne l'oscillation de l'intégrale $(\mathfrak{S})$ de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle I_0; *voir* note [1]), p. 259.

Sur la décomposition du cercle ouvert en arcs simples ouverts.

Par

Stanisława Nikodym (Cracovie).

Le but de cette note consiste à démontrer une propriété de la décomposition des domaines ouverts et plans en arcs simples ouverts. Nous ne considérerons ici que le cas particulier, où le domaine est l'intérieur d'une courbe simple fermée.

Théorème[1]). *Soit G l'intérieur d'une courbe simple fermée C. Supposons qu'on ait décomposé G en des arcs simples ouverts $\{K\}$ jouissant des propriétés suivantes:*

1° leurs diamètres surpassent un nombre positif fixe ε,

2° ils sont disjoints deux à deux, même si l'on les ferme,

3° les deux bouts K de chaque arc ne coïncident jamais et ils sont des points qui se trouvent sur la frontière C du domaine G,

4° par tout point $p \in G$ passe une courbe K.

Soit $p_0, p_1, p_2, \ldots$ une suite infinie de points de G telle que $\lim p_n = p_0$ et telle qu'au plus un nombre fini des p_n est situé sur l'arc K_0 passant par p_0. Soit K_n l'arc de $\{K\}$ passant par p_n

[1]) L'étude de telles décompositions m'était proposée par M. O. Nikodym. Le contenu de la note était présenté au *I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves à Varsovie* (le 24. IX. 1929, Section III).

Dans ces conditions il existe une suite partielle

$$p_{\nu_1}, p_{\nu_2}, \dots$$

telle que $K_{\nu_{n+1}}$ divise G entre p_0 et K_{ν_n}.

Démonstration. Soit $\{K\}$ une décomposition (du domaine G) satisfaisant aux conditions du théorème. Tout K divise G en deux domaines et divise C en deux arcs ouverts que nous appellerons *bases de K*.

Lemme 1. Dans les conditions 1°, 2°, 3°, 4° du théorème le diamètre d'aucune base ne peut pas être $< \varepsilon$.

En effet, soit K_1 un arc de la décomposition envisagée dont la base Δ_1 possède le diamètre $\delta(\Delta_1) < \varepsilon$. Désignons par H_1 l'intérieure de la courbe simple fermée $\overline{K}_1 + \overline{\Delta}_1$.

En vertu de l'hypothèse on a

$$\delta(H_1) = \delta(\overline{H}_1) \geqslant \delta(K_1) > \varepsilon. \tag{1}$$

Rangeons tous les points de H_1 dans une suite bien ordonnée:

$$p_2, \dots, p_\omega, \dots, p_\alpha, \dots \tag{2}$$

les indices commençant par 2.

Nous allons définir pour des nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ les points t_α, les courbes K_α, leurs bases Δ_α et les domaines H_α de la manière suivante.

Posons $t_2 \underset{df}{=} p_2$ [1]).

Comme $t_2 \epsilon G$, par t_2 passe un et un seul arc de la décomposition, soit K_2. Les bouts de K_2 se trouvent nécessairement sur Δ_1, ce qui résulte du théorème de Jordan, étant donné que deux courbes de la décomposition n'ont pas de points communs, même si l'on les ferme.

Soit Δ_2 la base de K_2 déterminée par la condition $\Delta_2 \subset \Delta_1$. Désignons par H_2 l'intérieure de la courbe simple fermée

$$\overline{K}_2 + \overline{\Delta}_2.$$

On a

$$K_2 \subset H_1 \quad \text{et} \quad \overline{H}_2 \subset \overline{H}_1.$$

On démontre aisément que $\delta(\overline{H}_1) > \delta(\overline{H}_2)$.

Soient, en effet, a, b deux points de $\overline{H}_2$ tels que $\delta(\overline{H}_2)$ est égal à la distance des points a, b.

[1]) t_2 soit choisi arbitrairement sur K_1.

Ils sont nécessairement situés sur la frontière $\overline{\Delta}_2 + \overline{K}_2$.

Au moins un de ces points se trouve placé sur K_2 parce que

$$\delta(\overline{H}_2) \geqslant \delta(K_2) > \varepsilon \quad \text{et} \quad \delta(\Delta_2) \leqslant \delta(\Delta_1) < \varepsilon.$$

Soit $a \epsilon K_2$, donc $a \epsilon H_1$. Il existe un nombre $\varrho > 0$ tel que le cercle fermé $S(a, \varrho)$ se trouve dans H_1. Si l'on fait prolonger le segment rectiligne ba au delà du point a, on obtient un rayon aa' du cercle tel que

$$(aa') \cdot (ab) = 0$$

[(aa') et (ab) désignant les intervalles ouverts].

Or $b \epsilon \overline{H}_1$, $a' \epsilon \overline{H}_1$ et $\varrho(b, a')$ [1]) $> \delta(\overline{H}_2) =$ longueur (a, b).

Cela prouve que

$$\delta(\overline{H}_2) < \delta(\overline{H}_1).$$

On a de plus:

$$\delta(\overline{H}_2) \geqslant \delta(K_2) > \varepsilon.$$

Supposons qu'on ait déjà défini les t_α, H_α, Δ_α et K_α pour tous les nombres ordinaux α inférieurs à un nombre β donné, où $\beta > 2$.

Supposons de plus que les éléments t_α, Δ_α, K_α, H_α possèdent les propriétés suivantes:

1°. Si $\alpha < \beta$, H_α est un domaine borné dont la frontière est la courbe simple fermée $\overline{K}_\alpha + \overline{\Delta}_\alpha$, Δ_α est une base de K_α,

$$H_\alpha \subset H_1 \subset G, \quad \delta(\overline{H}_\alpha) > \varepsilon,$$

K_α est un arc $\{K\}$ passant par t_α.

2°. Si $\alpha' < \alpha'' < \beta$ on a $\overline{H}_{\alpha'} \supset \overline{H}_{\alpha''}$, $K_{\alpha''} \subset H_{\alpha'}$, $\Delta_{\alpha''} \subset \Delta_{\alpha'}$.

3°. Si $\alpha' < \alpha'' < \beta$, on a $\delta(\overline{H}_{\alpha''}) < \delta(\overline{H}_{\alpha'})$.

Nous allons définir nos éléments pour l'indice β. Deux cas peuvent s'y présenter:

1) β est de 1re espèce
2) β est de 2me espèce.

Dans le cas 1) soit t_β le premier point de la suite (2) contenu dans $H_{\beta-1}$. De tels points existent en vertu de la supposition 1°).

[1]) $\varrho(b, a')$ désigne la distance de b et a'.

On a $t_\beta \epsilon H_{\beta-1}$. Comme (en vertu de 2°) $H_{\beta-1} \subset H_1$, on a $t_\beta \epsilon G$; donc par t_β il passe un arc $\{K\}$. Soit K_β cet arc. Une de ses bases Δ_β est nécessairement contenue dans $\Delta_{\beta-1}$ puisque $K_\beta \subset H_{\beta-1}$. Soit H_β le domaine intérieur de la courbe simple fermée $\overline{\Delta}_\beta + \overline{H}_\beta$. On voit que $H_\beta \subset H_{\beta-1}$ et on démontre comme plus haut que

$$\delta(\overline{H}_\beta) < \delta(\overline{H}_{\beta-1})$$

et que

$$\delta(\overline{H}_\beta) > \varepsilon.$$

Il s'ensuit que les propriétés 1°, 2°, 3° subsistent pour tous les nombres ordinaux $\leqslant \beta$.

Envisageons maintenant le cas 2), où β est un nombre limite. Il existe une suite simplement infinie $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \beta$ de nombres ordinaux, telle que $\beta = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$.

Le produit

$$H'_\beta \underset{df}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \overline{H}_{\alpha_n}$$

est indépendant du choix de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

En effet, soit $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \ldots < \beta$ une deuxième suite telle que $\lim_{n\to\infty} \alpha'_n = \beta$ et soit $H''_\beta = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{H}_{\alpha'_n}$.

Quel que soit n il existe un nombre μ tel que la relation $m > \mu$ entraîne $\alpha_n < \alpha'_m$. Comme $\alpha_n < \beta$ et $\alpha'_m < \beta$, on a, en vertu de la supposition 2°

$$\overline{H}_{\alpha_n} \supset \overline{H}_{\alpha'_m},$$

ce qui donne $\overline{H}_{\alpha_n} \supset H''_\beta$, d'où $H'_\beta \supset H''_\beta$.

D'une manière analogue on démontre que $H''_\beta \supset H'_\beta$ ce qui donne $H'_\beta = H''_\beta$.

L'indépendance en question est ainsi démontrée.

H'_β est un ensemble fermé et, on a $\delta(H'_\beta) \geqslant \varepsilon$, en vertu de la supposition 1°. Si H'_β ne contient pas de points de G, le procédé s'arrête. Dans le cas contraire soit t_β le premier point de la suite (2) intérieur de G. On a $t_\beta \epsilon H_\alpha$ pour tout $\alpha < \beta$.

En effet, le nombre α peut être toujours considéré comme un élément d'une suite infinie croissant de nombres ordinaux tendant vers β, ce qui implique $H'_\beta \subset H_\alpha$.

Soit K_β l'arc de $\{K\}$ passant par t_β. Une de ses bases Δ_β est contenue dans Δ_α, où $\alpha < \beta$ et, comme on le démontre sans peine, Δ_β est indépendant du choix du nombre α.

Soit H_β le domaine borné, déterminé par la courbe simple fermée $\overline{\Delta}_\beta + \overline{K}_\beta$. On a

$$\delta(H_\beta) \geqslant \delta(K_\beta) > \varepsilon$$

et, en outre:

$$\delta(H_\beta) < \delta(H_\alpha) \quad \text{si} \quad \alpha < \beta.$$

On voit ainsi que, si le procédé peut être poussé jusqu'au nombre β, les propriétés 1°, 2°, 3° subsistent.

Mais le procédé défini ainsi s'arrête nécessairement parce que dans le cas contraire on aurait une suite transfinie non dénombrable de nombres positifs:

$$\delta(H_1),\ \delta(H_2), \ldots,\ \delta(H_\omega), \ldots,\ \delta(H_\alpha), \ldots,$$

où la relation $\alpha' < \alpha''$ entraîne $\delta(H_{\alpha'}) < \delta(H_{\alpha''})$.

Il existe donc un nombre $\alpha < \Omega$ tel que les relations

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha,$$

$$\lim \alpha_n = \alpha$$

entraînent

$$H' \underset{df}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \overline{H}_{\alpha_n} \subset C.$$

Par conséquent $H' \subset \Delta_1$.

Mais cela implique une contradiction puisque on a $\delta(H') \geqslant \varepsilon$ (étant donné que $\delta(H_{\alpha_n}) > \varepsilon$) et d'autre part $\delta(\Delta_1) < \varepsilon$.

Le lemme 1 est ainsi démontré.

Lemme 2. Dans, les conditions du théorème il n'existe pas une infinité de bases qui soient disjoints deux à deux après la fermeture.

En effet, supposons que les bases $\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \ldots, \overline{\Delta}_n, \ldots$ des arcs $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ appartenant à $\{K\}$ sont disjoints. En vertu du lemme 1 on a $\delta(\overline{\Delta}_n) \geqslant \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

D'après le théorème de M. Ważewski[1]) il existe une suite infinie partielle $\overline{\Delta}_{n_1}, \overline{\Delta}_{n_2}, \ldots$ pour laquelle l'ensemble limite et l'ensemble d'accumulation coïncident et telle que, si l'on pose:

$$\Delta = \text{ens.} \lim_{k\to\infty} \overline{\Delta}_{n_k},$$

[1]) *Fund. Math.* T. IV. Sur un continu singulier, p. 229.

on a

$$\Delta\,.\,\overline{\Delta}_{n_k} = 0$$ [1].

Δ est un continu dont le diamètre est $\geqslant \varepsilon$.

Comme

$$C - \Delta \supset \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{n_k},$$

on trouve:

$$(C-\Delta)' \supset \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{n_k}\right)' \supset \Delta.$$

Comme d'autre part

$$(C-\Delta)' \supset C - \Delta,$$

on en obtient

$$(C-\Delta)' \supset C,$$

ce qui démontre que Δ est un continu de condensation pour C.

Mais cela est impossible, puisque C est une courbe simple fermée. Le lemme est démontré.

Les lemmes étant établis, passons à la démonstration du théorème.

Soit $p_0 \in G$ et $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ une suite infinie de points de G tendant vers p et tels que les courbes $K_0, K_1, K_2, \ldots$ de $\{K\}$ passant respectivement par $p_0, p_1, p_2, \ldots$ sont différentes.

La courbe K découpe G en deux domaines. Dans un, au moins d'eux, soit G_1, il y a une infinité de points p_n. Soient $p_1', p_2', \ldots$ tous ces points et K_n' les courbes correspondantes. On a $\lim p_n' = p_0$. Soit Δ_0 la base de K_0 correspondant à G_1. Tout K_n possède une base déterminée située dans Δ_0. Désignons la par Δ_n'.

Les bases Δ_n' et Δ_m' pour $n \neq m$ ne peuvent pas s'empiéter, à cause du théorème de Jordan.

On démontre qu'il y a au plus un nombre fini d'indices m tels que $\Delta_m' \subset \Delta_n'$. Dans le cas contraire, on aurait pour une infinité de m: $K_m' \subset$ intérieur de la courbe $\overline{K_n'} + \overline{\Delta_n'}$. Donc on aurait une infinité de points p_m' dont la distance de p serait supérieure à un nombre positif.

Posons $\lambda_1 \underset{df}{=} 1$. Écartons tous les indices m pour lesquels $\Delta_m' \subset \Delta_1'$. Soit λ_2 le premier indice restant (on a $\lambda_2 > \lambda_1$). Supposons

[1] Les $\overline{\Delta}_{n_k}$ sont des arcs simples situés sur C.

qu'on ait défini les indices $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. Supposons, en outre que, 1° si $m < \lambda_n$, et si m est différent de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, au moins une des relations

$$\Delta_m^1 \subset \Delta_{\lambda_1}^1, \quad \Delta_m^1 \subset \Delta_{\lambda_2}^1, \ldots, \quad \Delta_m^1 \subset \Delta_{\lambda_{n-1}}^1$$

a lieu, 2° si $s < t \leqslant n$, on a ou $\Delta_{\lambda_s}^1 \subset \Delta_{\lambda_t}^1$, ou bien $\overline{\Delta_{\lambda_s}^1} \cdot \overline{\Delta_{\lambda_t}^1} = 0$.

Écartons tous les indices m pour lesquels au moins une des inclusions suivantes subsiste:

$$\Delta_m \subset \Delta_{\lambda_1}, \quad \Delta_m \subset \Delta_{\lambda_2}, \ldots, \quad \Delta_m \subset \Delta_{\lambda_n}.$$

Le premier indice restant sera désigné par λ_{n+1}. On a nécessairement $\lambda_{n+1} > \lambda_n$. En effet, dans le cas contraire on aurait $\lambda_{n+1} < \lambda_n$. Comme λ_{n+1} est différent de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, on aurait au moins une des relations

$$\Delta_{\lambda_{n+1}}' \subset \Delta_{\lambda_1}', \quad \Delta_{\lambda_{n+1}}' \subset \Delta_{\lambda_2}', \ldots, \quad \Delta_{\lambda_{n+1}}' \subset \Delta_{\lambda_{n-1}}';$$

ce qui est impossible.

On voit aisément que les propriétés 1° et 2° mentionnées ci-dessus subsistent pour les indices $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$.

On obtient ainsi une suite infinie d'indices $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ qui jouit de la propriété suivante:

Si $n' < n''$, les bases $\overline{\Delta}_{\lambda_{n'}}$, $\overline{\Delta}_{\lambda_{n''}}$ sont ou disjoints ou bien on a $\Delta_{\lambda_{n'}} \subset \Delta_{\lambda_{n''}}$.

On démontre qu'il existe une suite infinie partielle $\{\nu_n\}$ de $\{\lambda_n\}$, telle que:

$$\Delta_{\nu_1}' \subset \Delta_{\nu_2}' \subset \Delta_{\nu_3}' \subset \ldots$$

En effet, supposons que cela ne soit pas vrai. Posons $\mu_1 \underset{df}{=} 1$. Soit μ_2 le premier indice différent de μ_1 (donc $> \mu_1$) tel que $\Delta_{\mu_1} \subset \Delta_{\mu_2}$, μ_3 le premier indice différent de μ_2 (donc $> \mu_2$) tel que $\Delta_{\mu_2} \subset \Delta_{\mu_3}$ etc. Le procédé se définit facilement par induction. Mais il s'arrête, en vertu de la supposition, soit pour k.

On a:

$$\Delta_{\mu_1} \subset \Delta_{\mu_2} \subset \ldots \subset \Delta_{\mu_k} \tag{3}$$

et cette suite ne peut pas être augmentée ni par prolongation ni par l'introduction de membres intermédiaires.

Il existe au plus un nombre fini de λ_n pour lesquels $\Delta_{\lambda_n} \subset \Delta_{\mu_k}$. Par conséquent, il existe au moins un indice λ_n supérieur à μ_k, soit

μ'_1, tel que $\overline{\Delta}_{\mu'_1} \cdot \overline{\Delta}_{\mu_k} = 0$. On a à fortiori $\overline{\Delta}'_{\mu_s} \cdot \overline{\Delta}'_{\mu'_1} = 0$ pour $s = 1, 2, ..., k$.

Nous allons continuer le procédé en partant de $\overline{\Delta}_{\mu'_1}$ et en formant une suite saturée:

$$\Delta'_{\mu'_1} \subset \Delta'_{\mu'_l} \subset \dots \subset \Delta'_{\mu'_l}.$$

Remarquons que ces bases sont nécessairement disjoints à Δ'_{μ_k} puisque (3) ne peut pas être prolongée.

Soit μ''_1 le premier indice tel que $\mu''_1 > \mu'_l$ et que $\overline{\Delta}_{\mu'_l} \cdot \overline{\Delta}_{\mu''_1} = 0$. On procède ainsi indéfiniment.

Les bases Δ'_{μ_1}, $\Delta'_{\mu'_1}$, $\Delta'_{\mu''_1}$, ... sont nécessairement disjoints ce qui est impossible, d'après le lemme 2.

L'existence de la suite

$$\Delta'_{\nu_1} \subset \Delta'_{\nu_1} \subset \dots$$

est ainsi assurée.

On achève facilement la démonstration du théorème, en montrant que

$$K_{\nu_{n+1}} \text{ divise } G \text{ entre } p \text{ et } K_{\nu_n}.$$

Remarquons que la condition 1° du théorème est essentielle pour que la thèse subsiste.

Si la frontière du domaine n'est pas jordanienne, la thèse peut être en défaut et il y en est de même, si les diamètres des arcs ne sont pas supérieurs à un nombre positif fixe.

Sur le problème des courbes gauches en Topologie[1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

J'appelle une courbe, ou en général, un ensemble de points A, *gauche au sens topologique*, lorsque A n'est homéomorphe à aucun ensemble situé sur le plan.

Le problème consiste à caractériser les courbes gauches, ainsi conçues, de façon intrinsèque.

Dans cet ordre d'idées, le premier résultat important fut celui de M. Ważewski[2]): une courbe gauche n'est jamais une dendrite[3]).

Ce résultat fut précisé ensuite par M. Ayres, qui prouva qu'un continu Péanien gauche doit — non seulement contenir une courbe simple fermée, comme l'a prouvé M. Ważewski — mais qu'il contient toujours une courbe de la forme „θ" (courbe composée de trois arcs coextrémaux n'ayant deux à deux que leurs extrémités en commun)[4]).

Je vais me borner dans cette note à traiter ledit problème dans

[1]) Les résultats principaux de cette note ont été communiqués à la Soc. Polonaise de Math. (Section de Varsovie) à la séance du 21 juin 1929.

[2]) Ann. de la Soc. Pol. Math. 2 (1924), p. 49—170 Cf. aussi une simple démonstration du même théorème donnée par M. Menger, Fund. Math. X (1926). Le théorème de M. Ważewski répond à un problème posé par M. Mazurkiewicz dans Fund. Math. II, p. 130.

[3]) Une *dendrite* est, par définition, un continu *Péanien* (= image continue d'un intervalle) qui ne contient aucune courbe simple fermée. C'est une généralisation de la notion de *l'arbre* de la topologie combinatoire.

[4]) Fund. Math. XIV, p. 92. M. Ayres prouve que la propriété de ne pas contenir de courbes θ caractérise les continus Péaniens qui sont homéomorphes à la *frontière d'une région* située sur le plan.