Sur l'intégrale de M. Denjoy.

Par

S. Saks (Varsovie).

## Introduction.

Il y a, comme on sait, deux façons de définir des intégrales („totalès") de M. Denjoy: l'une, employée par M. Denjoy, lui-même, est basée sur la théorie des nombres transfinis, l'autre, due à MM. Lusin et Khintchine, est connue sous le nom de définition déscriptive et repose sur une généralisation de la notion de fonction absolument continue.

Or, cette seconde définition s'écarte complètement de l'idée, cependant si naturelle, qui fait le fond de la définition „constructive" de M. Denjoy et qui lie le procédé de totalisation avec ceux d'intégration singulière de Cauchy et Harnack. Nous nous proposons dans cette note de montrer qu'on peut conserver l'essentiel de la définition de M. Denjoy et la débarrasser en même temps du calcul transfini.

Notre point de départ sera la théorie déscriptive de MM. Lusin et Khintchine dont nous rappellerons dans le chap. I les résultats principaux. Nous aurons à la fois l'occasion d'y apporter quelques simplifications et généralisations de détail, et d'introduire quelques termes qui mettent en evidence l'analogie entre cette théorie et celle de M Lebesgue. Mais, en général, les résultats que nous établirons ne sont point nouveaux.

Enfin, dans la dernière partie de cette note nous mettons la définition des intégrales de M. Denjoy sous une forme précise d'induction transfinie qui paraît assez claire et qui se diffère un peu de la forme originale donnée par M. Denjoy. Nous y précisons une idée qui est renfermée implicitement dans le beau mémoire de M. Hake (13).



Ajoutons que tous les raisonnements qui suivent sont tout-à-fait élémentaires et n'exigent du lecteur que la connaissance de la théorie de l'intégrale de M. Lebesgue.

### Bibliographie.

A. *Articles encyclopédiques*

**1.** Kamke, E *Neuere Theorie der rellen Funktionen* (Pascal. *Repertorium der höheren Mathematik*. 2. Aufl., I. Bd., 3 Hälfte).

**2.** Rosenthal, A. *Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen* (Sonderabdruck aus der *Enzykl. der Math. Wissensch.* II, 3). Nach der Referaten von L. Zoretti, P. Montel u. M. Fréchet, bearbeitet von...

B. *Cours, traités.*

**3.** Hobson, E. W. *The theory of functions of a real variables and the theory of Fourier's series*. 3. ed., I vol. 1927.

**4.** Lebesgue. H. *Leçons sur l'intégration*. 2. éd. 1928.

**5.** Lusin, N. *Intiegral i trigonomietriczeskij riad* (*Intégrale et série trigonométrique*). 1915. (En russe).

**6.** Kamke, E. *Das Lebesguesche Integral*. 1926.

**7.** Saks, S. *Zarys teorji calki* (*Théorie de l'intégration*). 1930. (En polonais).

C. *Mémoires, notes.*

**8.** Alexandroff, P. *Math. Zeitschr.* t. 20, (1924), p. 213.

**9.** Burkill, J. C. *Proc. Cambr. Philos. Soc.* t. 21, (1923), p. 659.

**10.** Denjoy, A. *Ann. Éc. Norm. Sup.* (3), t. 33, (1916); t. 34, (1917).

**11—12.** Denjoy, A. *Comptes Rendus*. t. 154, (1912), p. 859; t. 162. (1916), p. 377.

**13.** Hake, H. *Math. Ann.* t. 83, (1921), p. 120.

**14—15.** Khintchine, A. *Comptes Rendus*. t. 162, (1916), p. 287; t. 164, (1917), p. 142.

**16.** Khintchine, A. *Fund. Math.* t. 9, (1927), p. 254.

**17.** „ *Recueil de la Soc. Math. de Moscou*, (1918). (En russe).

**18.** Lebesgue, H. *Acta Math.* t. 49, (1926), p. 245.

**19.** Loomann, H. *Math. Ann.* t. 93, (1925), p. 153.

**20.** Lusin, N. *Comptes Rendus*. t. 284, (1912), p. 1475.

**21.** Saks, S. *Fund. Math.* t. 13, (1929), p. 218.

## § 1. Fonctions à variation bornée sur un ensemble.

Soit $F(x)$ une fonction finie dans un intervalle $I=(a, b)$. On posera

$$\varDelta(F; I)=|F(b)-F(a)|,$$

$$O(F; I)=M-m,$$

$M$ et $m$ désignant resp. les bornes supérieure et inférieure de $F$ dans $I$: le nombre $O(F; I)$ s'appelle l'oscillation de $F$ dans l'intervalle I.

Une fonction $F(x)$ finie dans un intervalle $(a, b)$ s'appelle à variation bornée $(VB)$, resp. à variation bornée au sens restreint $(VB^*)$, sur un ensemble $P$ [1]) contenu dans cet intervalle, lorsqu'il existe un nombre fini $M$ tel que pour chaque système fini d'intervalles $\{I_k\}$ n'empiétant pas et dont les extrémités appartiennent à $P$, on a

$$\sum_k \Delta(F; I_k) \leqslant M,$$

resp.

$$\sum_k O(F; I_k) \leqslant M.$$

On étend tout de suite aux fonctions $VB$ sur un ensemble le théorème connu de Jordan: *pour qu'une fonction $F(x)$ considérée dans un intervalle $(a, b)$ soit VB sur un ensemble P situé dans cet intervalle, il faut et il suffit qu'elle coïncide sur cet ensemble avec la différence de deux fonctions monotones et finies dans tout intervalle $(a, b)$.*

On peut compléter cette remarque de manière suivante:

**Théorème 1.** *$F(x)$ étant une fonction définie dans un intervalle $I_0 = (a, b)$, et VB, resp. VB*, sur un ensemble $P \subset I_0$, il existe une fonction $F_1(x)$ à variation bornée dans l'intervalle $(a, b)$ et coïncicidant avec $F(x)$ aux points de P, resp. de $\overline{P}$* [2]).

Démonstration. Dans le cas où $F(x)$ est $VB$ sur $P$ notre théorème est une conséquence immédiate de la remarque précédente; dans le second cas où $F(x)$ est $VB^*$ sur $P$, la fonction $F_1(x)$ peut être determinée par la condition d'être identique à $F(x)$ aux points de $\overline{P}$ et linéaire dans les intervalles contigus à $\overline{P}$.

Lemme. Lorsqu'une fonction $F(x)$ est $VB^*$ sur un ensemble fermé $P$ et s'annulle identiquement aux points de cet ensemble, elle admet la dérivée nulle en presque tout point $x \in P$.

[1]) Cf. **5**, **16**, **14**, **15**.

[2]) $\overline{P}$ désigne la fermeture de l'ensemble $P$, c.-à-d. l'ensemble de ses points et de ses points d'accumulation.



Démonstration. Soient $\{I_k\}$ la suite des intervalles contigus à $P$ et $a, b$ les extrémités de $P$; désignons, pour chaque $k$, par $M_k$, la borne supérieure des valeurs absolues de $F(x)$ dans $I_k$. $F(x)$ étant $VB^*$ sur $P$, la fonction $\Phi(x)$ qui s'annulle aux points de $P$ et est égale, dans chaque intervalle $I_k$, au nombre correspondant $M_k$, est évidemment à variation bornée dans l'intervalle $(a, b)$. Elle est donc presque partout dérivable dans $(a, b)$ et, en particulier, sa dérivée s'annulle en presque tout point de $P$. Or, on a

$$F(x) = \Phi(x) = 0$$

dans $P$, et

$$-\Phi(x) \leqslant F(x) \leqslant \Phi(x)$$

dans l'intervalle $(a, b)$ tout entier. Il s'en suit qu'en chaque point $x \in P$ où $\Phi'(x)$ existe, $F'(x)$ existe également et s'annulle en même temps que $\Phi'(x)$, ce qui justifie notre lemme.

On en tire de suite le

**Théorème 2.** 1° *$F(x)$ étant une fonction finie et mesurable dans un intervalle I, et VB sur un ensemble $P \subset I$, elle est dérivable aproximativement* [1]) *en presque chaque point de P.*

2° *$F(x)$ étant une fonction finie dans un intervalle I, et VB* sur un ensemble $P \subset I$, elle est dérivable en presque chaque point de P.*

Démonstration. 1° $F(x)$ étant $VB$ sur $P$, elle y coïncide, en raison du th. 1, avec une fonction $F_1(x)$ à variation bornée dans l'intervalle $I$. Soit $Q$ l'ensemble de points $x$ où $F(x) = F_1(x)$. $F(x)$ étant, par hypothèse, mesurable, l'ensemble $Q$ l'est aussi. Or, $F_1(x)$ étant, en vertu du théorème de M. Lebesgue, dérivable presque partout dans $I$, elle est, à plus forte raison, dérivable presque partout dans $Q \subset I$ par rapport à $Q$ [2]); parsuite, la fonction $F(x)$, qui est égale à $F_1(x)$ en tout point de cet ensemble, est aussi presque

[1]) Une fonction $F(x)$ est dérivable aproximativement en un point $x_0$ lorsqu'il existe un ensemble mesurable $E$ dont $x_0$ est un point de densité et tel que l'expression $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ admet la limite unique et finie si $x$ tend vers $x_0$ en parcourant des points de $E$. Ceci étant, cette limite est appelée dérivée aproximative de $F(x)$ au point $x_0$ et désignée par $F'_{\text{apr.}}(x_0)$. (*Voir*: **10**, **14**, **15**, **16**, **17**.

[2]) Une fonction $F(x)$ est dérivable en un point $x_0 \in Q$ par rapport à l'ensemble $Q$ s'il existe la limite de $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ lorsque $x$ tend vers $x_0$ en parcourant des points de l'ensemble $Q$.

partout dans $Q$ dérivable par rapport à $Q$, donc elle est dérivable aproximativement presque partout dans $Q$, et, à plus forte raison en presque tout point de l'ensemble $P \subset Q$.

2°. Dans le cas où la fonction $F(x)$ est $VB^*$ sur $P$, elle est identique sur l'ensemble fermé $\overline{P}$ à une fonction $F_1(x)$ à variation bornée dans $I$. La fonction $F(x) - F_1(x)$ vérifiant les conditions du lemme précédent, sa dérivée existe et s'annulle presque partout dans $\overline{P}$: la fonction $F(x)$ est donc aussi dérivable presque partout dans $\overline{P}$ et sa dérivée y coïncide presque partout avec celle de $F_1(x)$.

## § 2. Fonctions à variation bornée généralisée.

Une fonction $F(x)$, finie dans un intervalle $I$, s'appelle à variation bornée généralisée ($VBG$), resp. à variation bornée géneralisée au sens restreint ($VBG^*$), dans cet intervalle, lorsque $I$ est une somme d'une suite dénombrable d'ensembles tels que sur chacun d'eux $F(x)$ est $VB$, resp. $VB^*$.

Il s'ensuit aussitôt de cette définition, en vertu du théorème 2, l'énoncé suivant du à MM. Lusin et Khintchine [1]):

**Théorème 3.** *Une fonction $F(x)$ étant $VBG$, resp. $VBG^*$, dans un intervalle $(a, b)$, elle y est presque partout dérivable aproximativement, resp. au sens ordinaire.*

Toute fonction n'admettant qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs différentes, est évidemment $VBG$; par conséquent, une fonction $VBG$ peut être même non-mesurable. Par contre, *l'ensemble de points de discontinuité d'une fonction $VBG^*$, est toujours au plus dénombrable*, pareillement comme pour les fonctions à variation bornée au sens ordinaire (bien que des discontimités d'une fonction $VBG^*$ ne sont pas, en général, de 1e espèce). Cela découle immédiatement de la proposition suivante: *lorsqu'une fonction $F(x)$ définie dans un intervalle $(a, b)$, est $VB^*$ sur un ensemble $P$ situé dans cet intervalle, elle n'admet en $P$ qu'un nombre fini ou dénombrable de points de discontinuité.* En effet, on voit de suite que, dans chaque point de $P$ qui n'est pas isolé (par rapport à l'ensemble $P$) d'un certain côté, il existe toujours de ce côté la limite de $F(x)$. Parsuite, tout point de $P$ qui n'est isolé d'aucun côté, est forcément un point de continuité ou bien de discontinuité de 1e espèce. Or, l'ensemble de points de discontinuité de 1e espèce, ainsi que celui de points de $P$ qui sont isolés au moins d'un côté, sont au plus dénombrables, ce qui prouve notre proposition.

[1]) *Voir*: **5, 9, 10, 15, 14.**



## § 3. Fonctions absolument continues sur un ensemble.

Une fonction $F(x)$ finie dans un intervalle $I$, s'appelle absolument continue ($AC$), resp. absolument continue au sens restreint ($AC^*$), sur un ensemble $P \subset I$, lorsque à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre positif $\eta$ tel que pour chaque système fini d'intervalles $I_k$ n'empiétant pas et dont les extrémités appartiennent à $P$, l'inégalité

$$\sum_k |I_k| < \eta$$

entraîne

$$\sum_k \Delta(F; I_k) < \varepsilon,$$

resp.

$$\sum_k O(F; I_k) < \varepsilon.$$

Il est évident que toute fonction $AC$, resp. $AC^*$, sur un ensemble $P$, est à plus forte raison $VB$, resp. $VB^*$, sur cet ensemble.

## § 4. Fonctions absolument continues généralisées.

Une fonction continue $F(x)$ s'appelle absolument continue généralisée ($ACG$), resp. absolument continue généralisée au sens restreint ($ACG^*$), dans un intervalle $I$, lorsque $I$ est une somme d'une suite dénombrable d'ensembles tels que sur chacun d'eux la fonction $F(x)$ est $AC$, resp. $AC^*$.

## § 5. Condition *(N)* de M. Lusin.

$F(x)$ étant une fonction et $Q$ un ensemble, on désignera par $F(Q)$ l'ensemble de valeurs admises par $F(x)$ aux points $x \in Q$.

On dit que $F(x)$ vérifie la condition $(N)$ de M. Lusin sur un ensemble $P$, lorsque pour tout ensemble $Q \subset P$ de mesure nulle, $F(Q)$ est de la même mesure [1]).

On voit aisément que toute fonction $AC$ sur un ensemble, y vérifie la condition $(N)$. Il s'en suit que toute fonction $ACG$ (et, à plus

[1]) *Voir*: **5**, p. 109.

forte raison, chaque fonction $ACG^*$) dans un intervalle, satisfait à la même condition dans cet l'intervalle.

Dans le § suivant il nous sera commode de nous appuyer sur un résultat élémentaire (non-publié) de M. Zygmund; on lui donnera l'énoncé suivant:

**Théorème 4.** *Si le nombre dérivé $\overline{F}^+(x)$ d'une fonction $F(x)$ continue dans un intervalle $I = (a, b)$, est positif en chaque point de cet intervalle excepté au plus les points d'un ensemble $Q$ tel que $F(Q)$ ne contienne aucun intervalle de longuer positive, alors $F(x)$ est une fonction monotone non-décroissante dans $I$.*

Démonstration. Soient $c < d$ deux points quelconque de $I$ et supposons, par impossible, que

$$F(c) > F(d).$$

$F(Q)$ ne contenant, par hypothèse, aucun segment de longueur positive, il existe une valeur $y_0$ telle que

$$F(c) > y_0 > F(d) \tag{1}$$

et qu'aucune des valeurs de $x$ vérifiant l'équation

$$F(x) = y_0 \tag{2}$$

n'appartienne à $Q$. Soit $x_0$ la borne droite de l'ensemble de ces valeurs; en raison de la continuité de $F(x)$, $x_0$ vérifie aussi l'équation (2) et, en vertu de (1), on a

$$\overline{F}^+(x_0) \leqslant 0,$$

d'où $x_0 \in Q$. Nous aboutissons ainsi à une contradiction qui justifie notre assertion.

## § 6. Intégrales de M. Denjoy.

On doit à MM. Lusin et Khintchine la définition suivante, dite descriptive, des intégrales de M. Denjoy: une fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{D})$, resp. $(\mathfrak{D}^*)$, dans un intervalle $(a, b)$ où elle est définie, lorsqu'il existe une fonction $F(x)$ qui est $ACG$, resp. $ACG^*$, dans $(a, b)$ et dont la dérivée aproximative, resp. ordinaire, coïncide presque partout avec $f(x)$.

Ceci étant, $F(x)$ est appelée intégrale indéfinie $(\mathfrak{D})$, resp. $(\mathfrak{D}^*)$, de $f(x)$ dans $(a, b)$. La différence $F(b) - F(a)$ est appelée intégrale définie $(\mathfrak{D})$, resp. $(\mathfrak{D}^*)$, de $f(x)$ dans $(a, b)$ et désignée par

$$(\mathfrak{D}) \int_a^b f(x)\, dx, \quad \text{resp.} \quad (\mathfrak{D}^*) \int_a^b f(x)\, dx.$$



Pour justifier cette définition, il faut établir l'unicité des procédés ainsi déterminés, c.-à-d. que toute fonction $ACG$ dont la dérivée aproximative s'annulle presque partout, est une constante. Cet énoncé rentre, en effet dans la théorie de MM. Denjoy-Khintchine; il peut être déduite aisément du résultat élémentaire de M. Zygmund qu'on a cité dans le § précédent [1]).

Soit notamment $F(x)$ une fonction $ACG$ dans un intervalle $(a, b)$ telle que presque partout

$$F'_{\text{apr.}}(x) = 0.$$

En posant, pour un nombre positif $\varepsilon$ arbitrairement petit

$$\Phi(x) = F(x) + \varepsilon x,$$

on a presque partout

$$\overline{\Phi}^+(x) \geqslant \Phi'_{\text{apr.}}(x) = \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Soit $Q$ l'ensemble de points où (1) n'a pas lieu; $Q$ est de mesure nulle, et $\Phi(x)$ étant, en même temps que $F(x)$, $ACG$, donc (§ 5) satisfaisant à la condition $(N)$, $\Phi(Q)$ est aussi de mesure nulle, et, parsuite, ne contient aucun segment de longueur positive. Donc, en vertu du théorème 4

$$\Phi(b) - \Phi(a) \geqslant 0,$$

d'où

$$F(b) - F(a) \geqslant -\varepsilon(b - a),$$

et, $\varepsilon$ étant un nombre positif arbitrairement petit,

$$F(b) \geqslant F(a).$$

[1]) Il est aussi une conséquence immédiate de la proposition suivante: *lorsque un nombre dérivé quelconque d'une fonction vérifiant la condition $(N)$ est sommable, cette fonction est absolument continue*; voir: Menchoff, *Math. Ann*, t. 95, (1926), p. 641; Saks, *Bull. Ac. Pol.*, (A), (1926), p. 103; cf. aussi des généralisations de cet énoncé: Bary, *C. R.*, t. 189, (1929), p. 218; **21**.

En changeant le signe de $F(x)$, on obtient

$$F(b) \leqslant F(a)$$

et, par conséquent,

$$F(b) = F(a),$$

c. q. f. d.

II.

## § 7. Intégrales.

Nous commencerons par quelques considérations d'ordre plus abstrait.

Soit $\mathcal{S}$ une fonctionnelle: supposons que, pour chaque intervalle $I=(a, b)$, une classe $K(\mathcal{S}; I)$ de fonctions définies dans $I$ est déterminée de sorte que la fonctionnelle $\mathcal{S}$ fait correspondre à chacune de ces fonctions un nombre réel et fini qu'on désignera par $\mathcal{S}(f; I)$ ou, également, par $\mathcal{S}_b^a(f)$.

Une telle fonctionnelle $\mathcal{S}$ sera appelée intégrale lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes:

$(A)$ Si une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle $I_0$ appartient à la classe $K(\mathcal{S}; I_0)$, elle appartient à la fois à la classe $K(\mathcal{S}; I)$ pour chaque intervalle $I \subset I_0$; $\mathcal{S}(f; I)$ (déterminé ainsi pour chaque sous-intervalle $I$ de $I_0$) est une fonction additive d'intervalle $I \subset I_0$.

$(B)$ Une fonction $f(x)$ s'annulant identiquement dans un intervalle $I_0$, appartient à la classe $K(\mathcal{S}; I_0)$ et

$$\mathcal{S}(f; I_0) = 0.$$

Dans le cas où une fonctionnelle $\mathcal{S}$ satisfait aux conditions précédentes, c.-à-d. est une intégrale, les fonctions appartenant à la famille $K(\mathcal{S}; I)$ seront appelées intégrables $(\mathcal{S})$ dans l'intervalle $I$; le nombre $\mathcal{S}(f; I)$ sera dit intégrale $(\mathcal{S})$ de $f(x)$ dans l'intervalle $I$.

Soit $f(x)$ une fonction définie dans un ensemble linéaire et borné $Q$. Désignons par $f_1(x)$ la fonction coïncidant avec $f(x)$ aux points de $Q$ et s'annulant identiquement en dehors de cet ensemble. Soit ensuite $I_0$ un intervalle quelconque contenant $Q$.

La fonction $f(x)$ est appelée intégrable $(\mathcal{S})$ sur $Q$, lorsque



$f_1(x)$ est intégrable $(\mathcal{S})$ dans $I_0$; ceci étant, on pose, par définition,

$$\mathcal{S}(f; P) = \mathcal{S}(f_1; I_0).$$

Cette définition est évidemment acceptable car, si $f_1(x)$ est intégrable $(\mathcal{S})$ dans $I_0$, elle l'est également dans tout autre intervalle $I_1$ contenant $P$ et l'on a

$$\mathcal{S}(f_1; I_0) = \mathcal{S}(f_1; I_1).$$

Deux intégrales $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont dites compatibles lorsque pour chaque fonction $f(x)$ intégrable dans un intervalle $I$, à la fois par le procédé $(\mathcal{S}_1)$ et par le procédé $(\mathcal{S}_2)$, on a toujours

$$\mathcal{S}_1(f; I) = \mathcal{S}_2(f; I).$$

Nous dirons ensuite qu'une intégrale $\mathcal{S}_1$ contient une intégrale $\mathcal{S}_2$, par écrit

$$\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2;$$

lorsque ces deux intégrales sont compatibles et lorsque pour chaque intervalle $I$

$$K(\mathcal{S}_1; I) \supset K(\mathcal{S}_2; I).$$

Lorsque $\mathcal{S}_0$ est une intégrale appartenant à une famille d'intégrales et contenue en toute intégrale de cette famille, nous dirons que $\mathcal{S}_0$ est la plus faible intégrale de la famille envisagée.

## § 8. Intégrales complètes.

Une intégrale $\mathcal{S}$ est dite complète lorsqu'elle satisfait aux deux conditions suivantes.

$(C)$ Si une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle $(a, b)$ est intégrable $(\mathcal{S})$ dans chaque intervalle $(a+\varepsilon, b-\eta)$ $(a < a+\varepsilon < b-\eta < b)$ et qu'il existe la limite

$$\lim_{\varepsilon, \eta \to 0} \mathcal{S}_{a+\varepsilon}^{b-\eta}(f), \tag{1}$$

alors $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{S})$ dans l'intervalle $(a, b)$ et $\mathcal{S}_a^b(f)$ est égale à la limite (1).

$(H)$ Si $P$ est un ensemble fermé contenu dans un intervalle $(a, b)$, $\{I_k\}$ désigne la suite des intervalles contigus à $P$ dans $(a, b)$, $f(x)$ est une fonction intégrable $(\mathcal{S})$ sur $P$ et dans chaque intervalle $I_k$, et si enfin

$$(2)\qquad \sum_k |\mathcal{S}(f;\, I_k)| < +\infty \quad \text{et} \qquad \lim_k O(\mathcal{S};\, f;\, I_k) = 0,$$

alors, $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{S})$ dans $(a, b)$ et

$$\mathcal{S}_b^a(f) = \mathcal{S}(f;\, P) + \sum_k \mathcal{S}(f;\, I_k).$$

Nous apppellerons ensuite une integrale $\mathcal{S}$ complète au sens généralisé, ou complète (*), lorsqu'elle satisfait à la condition $(C)$ et, de plus, à la condition $(H^*)$ qu'on obtient en remplaçant dans la condition $(H)$ les relations (2) par la suivante

$$\sum_k |O(\mathcal{S};\, f;\, I_k)| < +\infty.$$

## § 9. Une propriété caractéristique des intégrales de M. Denjoy.

**Théorème 5.** 1° *L'intégrale $\mathcal{D}$ est complète.*
2° *L'intégrale $\mathcal{D}^*$ est complète (*).*

Démonstration. Il suffit de prouver la première partie; la seconde se démontre de manière tout-à-fait analogue.

A) L'intégrale $\mathcal{D}$ satisfait à la condition $(C)$ du § 8.

Soit, à cet effet, $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle $(a, b)$ et intégrable $(\mathcal{D})$ dans chaque intervalle $(a+\varepsilon,\, b-\eta)$ $(a < a+\varepsilon < b-\eta < b)$; on suppose qu'il existe la limite

$$(1)\qquad \lim_{\varepsilon,\, \eta \to 0} (\mathcal{D}) \int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)\, dx;$$

il faut démontrer que $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{D})$ dans $(a, b)$ et que son intégrale dans cet intervalle est égale à la limite (1).

Posons dans ce but pour chaque valeur $x$ intérieure à l'intervalle $(a, b)$

$$F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\mathcal{D}) \int_{a+\varepsilon}^{x} f(x)\, dx,$$

$F(a) = 0$ et $F(b)$ égale à la limite (1).

La fonction $F(x)$ ainsi déterminée est une intégrale indéfinie $(\mathcal{D})$ de $f(x)$ dans chaque intervalle $\left(a+\frac{1}{n},\, b-\frac{1}{n}\right)$; on a parsuite, presque partout dans chaque tel intervalle, donc, presque partout dans $(a, b)$

$$(2)\qquad F'_{\text{apr.}}(x) = f(x).$$

D'autre part, la fonction $F(x)$ étant continue dans $(a, b)$ et $ACG$ dans chaque intervalle $\left(a+\frac{1}{n},\, b-\frac{1}{n}\right)$, elle l'est aussi dans l'intervalle $(a, b)$ tout entier, et, en vertu de (2), elle est une intégrale indéfinie $(\mathcal{D})$ de $f(x)$ dans $(a, b)$. Il vient donc

$$(\mathcal{D}) \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(b) = \lim_{\varepsilon,\, \eta \to 0} (\mathcal{D}) \int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} f(x)\, dx.$$

B) L'intégrale $\mathcal{D}$ satisfait à la condition $(H)$.

Soit, en ce but, $P$ un ensemble fermé contenu dans un intervalle $(a, b)$ et $\{I_k\}$ la suite des intervalles contigus à $P$ dans $(a, b)$. On suppose qu'une fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{D})$ sur $P$ et dans chaque intervalle $I_k$, que la série

$$(3)\qquad \sum_k \left| (\mathcal{D}) \int_{I_k} f(x) \right|$$

converge et que

$$(4)\qquad \lim_k O_k = 0,$$

où $O_k$ désigne l'oscillation de l'intégrale indéfinie $(\mathcal{D})$ de $f(x)$ dans l'intervalle $I_k$.

Il faut prouver que $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{D})$ dans $(a, b)$ et que

$$(\mathcal{D}) \int_a^b f(x)\, dx = (\mathcal{D}) \int_P f(x)\, dx + \sum_k (\mathcal{D}) \int_{I_k} f(x)\, dx.$$

Soit $f_1(x)$ la fonction égale à $f(x)$ aux points de $P$, et à 0 en dehors de $P$. Cette fonction est, par hypothèse, intégrable $(\mathcal{D})$ dans $(a, b)$.

Posons, pour chaque point $x$ de cet intervalle,

$$(5)\qquad F(x) = \sum_k (\mathcal{D}) \int_{I \times I_k} f(x)\, dx,$$

où $I = (a, x)$.

En vertu de (3) et (4), la fonction ainsi définie est évidemment continue dans l'intervalle $(a, b)$. Soit $\Phi(x)$ la fonction identique à $F(x)$ aux points de $P$ et linéaire dans les intervalles contigus à $P$. En raison de (3), $\Phi(x)$ est absolument continue dans $(a, b)$ et, par conséquent, $F(x)$ est $AC$ sur $P$.

D'autre part, on voit immédiatement d'après (5) que $F(x)$ est $ACG$ dans chaque intervalle $I_k$, et, parsuite, elle l'est aussi dans l'intervalle $(a, b)$ tout entier.

Comme on voit en raison de (5) la dérivée approximative de $F(x)$ est égale à $f(x)$ presque partout dans chaque intervalle $I_k$; en presque tout point de $P$ on a

$$F'_{\text{apr.}}(x) = \Phi'(x);$$

or, $\Phi(x)$ étant l'intégrale indéfinie lebesguienne d'une fonction constante dans chacun des intervalles $I_k$ et s'annulant identiquement en $P$, on a presque partout dans $P$: $\Phi'(x) = 0$, donc aussi: $F'_{\text{apr.}}(x) = 0$.

En résumant, il vient presque partout dans $(a, b)$

$$F'_{\text{apr.}}(x) = f(x) - f_1(x)$$

d'où

$$F(b) - F(a) = (\mathfrak{D}) \int_a^b [f(x) - f_1(x)]\, dx,$$

donc, en tenant compte encore de la définition (5) de $F(x)$

$$(\mathfrak{D}) \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) + (\mathfrak{D}) \int_a^b f_1(x)\, dx$$
$$= \sum_k (\mathfrak{D}) \int_{I_k} f(x)\, dx + (\mathfrak{D}) \int_P f(x)\, dx.$$

Notre théorème est ainsi démontré.

**Lemme.** $f(x)$ étant une fonction intégrable $(\mathfrak{D})$, resp. $(\mathfrak{D}^*)$, dans un intervalle $(a, b)$ et $P$ un ensemble fermé contenu dans cet intervalle, il existe toujours une portion [1]) $K$ de $P$ telle que

(6) $f(x)$ est sommable sur $K$,

[1]) On appelle portion d'un ensemble fermé $P$ chaque ensemble $P \times I$ où $I$ est un intervalle quelconque contenant dans son intérieur des points de $P$.



et que

(7) $\{I_k\}$ désignant la suite des intervalles contigus à $K$, on a

$$\sum_k \left| (\mathfrak{D}) \int_{I_k} f(x)\, dx \right| < +\infty,$$

resp.

$$\sum_k O_k < +\infty.$$

où $O_k$ désigne l'oscillation de l'intégrale de $f(x)$ dans l'intervalle $I_k$.

Démonstration. Supposons que $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{D})$ dans $(a, b)$ et soit $F(x)$ son intégrale indéfinie $(\mathfrak{D})$. $F(x)$ étant $ACG$, l'intervalle $(a, b)$ est une somme d'une suite d'ensembles fermés $P_k$ (§ 4) tels que sur chacun d'eux $F(x)$ est $AC$. Parsuite, en vertu du théorème connu, un au moins de ces ensembles contient une portion $K$ de l'ensemble donné $P$. Cette portion remplit les conditions demandées. En effet, $F(x)$ est $AC$ sur $K$, donc en raison du th. 1, il existe une fonction $F_1(x)$ à variation bornée (et, même absolument continue) dans $(a, b)$ qui coïncide avec $F(x)$ aux points de $K$. On a donc presque partout dans $P$

$$f(x) = F'_{\text{apr.}}(x) = F_1'(x),$$

donc $f(x)$ est sommable sur $P$. Ensuite, $\{(a_k, b_k)\}$ désignant la suite des intervalles contigus à $K$, on a, la fonction $F_1(x)$ étant à variation bornée,

$$\sum_k \left| (\mathfrak{D}) \int_{a_k}^{b_k} f(x)\, dx \right| = \sum_k |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_k |F_1(b_k) - F_1(a_k)| < +\infty,$$

c. q. f. d.

On procède tout de même dans le cas de l'intégrale $\mathfrak{D}^*$.

Notre lemme établi nous sommes à même de compléter la théorème 5 par l'énoncé suivant qui implique une définition nouvelle des intégrales de M. Denjoy.

**Théorème 6.** 1° *L'intégrale $\mathfrak{D}$ est la plus faible intégrale complète contenant l'intégrale lebesguienne.*

2° *L'intégrale $\mathfrak{D}^*$ est la plus faible intégrale complète* (*) *contenant l'intégrale lebesguienne.*

Démonstration. Il suffit de prouver seulement la première partie du théorème, la seconde se démontrant d'une manière tout-à-fait analogue.

On voit tout d'abord que l'intégrale $(\mathfrak{D})$ contient l'intégrale lebesguienne et que, en vertu du th. 5, elle est complète. Il reste donc à prouver que lorsque $\mathfrak{T}$ est une autre intégrale complète contenant l'intégrale lebesguienne et $f(x)$ une fonction intégrable $(\mathfrak{D})$ dans un intervalle $(a, b)$, $f(x)$ est à la fois intégrable $(\mathfrak{T})$ et l'on a

$$\mathfrak{T}_a^b(f) = (\mathfrak{D})\int_a^b f(x)\,dx.$$

Pour le montrer, nous appellerons régulier chaque intervalle $I \subset I_0$ lorsque $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{T})$ dans $I$ et

$$\mathfrak{T}(f; I) = (\mathfrak{D})\int_I f(x)\,dx;$$

un point de $I_0$ sera dit irrégulier si dans chaque son entourage il existe d'intervalles irréguliers.

Soit $P$ l'ensemble des points irréguliers de l'intervalle $(a, b)$. Il est évident que $P$ est un ensemble fermé; on démontrera qu'il est vide.

Nous prouverons d'abord deux remarques auxiliaires:

$(\alpha)$ Chaque intervalle $I \subset I_0$ dont tous les points sont réguliers, est régulier.

En effet, supposons, par impossible, que $I$ est un intervalle irrégulier. En le divisant en deux sous-intervalles égaux, on obtient deux intervalles dont l'un au moins, soit $I_1$, est forcément irrégulier. On opère de même sur l'intervalle $I_1$, et, par induction, on obtient une suite descendant $\{I_k\}$ d'intervalles irréguliers dont le point commun est évidemment également irrégulier, ce qui contredit à l'hypothèse.

Nous compléterons cette remarque de manière suivante.

$(\beta)$ Chaque intervalle $I \subset I_0$ dont tous les points intérieurs sont réguliers, est régulier.

En effet, lorsque tous les points intérieurs d'un intervalle $(u, v)$ sont réguliers, chaque intervalle $\left(u + \frac{1}{n}, v - \frac{1}{n}\right)$ est, en vertu de $(\alpha)$, régulier; la fonction $f(x)$ est donc, dans chaque tel intervalle, intégrable $(\mathfrak{T})$ et l'on a

$$(8) \qquad \mathfrak{T}_{u+\frac{1}{n}}^{v-\frac{1}{n}}(f) = (\mathfrak{D})\int_{u+\frac{1}{n}}^{v-\frac{1}{n}} f(x)\,dx.$$

Or, l'intégrale $\mathfrak{T}$ étant complète, elle vérifie la condition $(C)$ du § 7 et, il vient de (8), en passant à la limite,

$$\mathfrak{T}_u^v(f) = (\mathfrak{D})\int_u^v f(x)\,dx.$$

ce qui montre que l'intervalle $(u, v)$ est régulier.

Nous prouverons maintenant que

$$(9) \qquad P = 0.$$

En effet, supposons par impossible que

$$(10) \qquad P \neq 0.$$

En raison du lemme précédent $P$ contient une portion $K$ vérifiant les conditions (6), (7) de ce lemme. Soit $\Pi$ un sous-intervalle de $(a, b)$ contenant dans son interieur de points de $P$ et tel que

$$\Pi \times K = \Pi \times P.$$

Soit $\pi$ un sous-intervalle quelconque de $\Pi$, et $\{\pi_n\}$ la suite des intervalles contigus à $\pi \times K = \pi \times P$ dans $\pi$. Aucun de ces intervalles ne contenant dans son intérieur de points de l'ensemble $P$, il s'ensuit de la remarque $(\beta)$ que tous les intervalles $\pi_n$ sont réguliers, donc, que pour chaque $n$

$$(11) \qquad \mathfrak{T}(f; \pi_n) = (\mathfrak{D})\int_{\pi_n} f(x)\,dx.$$

Or, $\mathfrak{T}$ contenant, par hypothèse, l'intégrale lebesguienne, et la fonction $f(x)$ étant, en vertu de (6), sommable sur $\pi \times P$, elle est, parsuite, intégrable $(\mathfrak{T})$ sur $\pi \times P$. D'autre part, en raison de (7) et (11), la série

$$\sum_n |\mathfrak{T}(f; \pi_n)| = \sum_n \left|(\mathfrak{D})\int_{\pi_n} f(x)\,dx\right|$$

converge; donc les deux intégrales $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ satisfaisant à la condition $(H)$ du § 8, on a

$$\mathfrak{C}(f;\pi)=\mathfrak{C}(f;K\times\pi)+\sum_n\mathfrak{C}(f;\pi_n)$$
$$=\int_{K\times\pi}f(x)\,dx+\sum_n(\mathfrak{D})\int_{\pi_n}f(x)\,dx$$
$$=(\mathfrak{D})\int_{\pi}f(x)\,dx.$$

Ainsi, chaque sous-intervalle $\pi$ de $\Pi$ est régulier, et, parsuite, aucun de points intérieurs de $\pi$ ne peut être irrégulier. Nous aboutissons ainsi à une contradiction en tant que l'intervalle $\Pi$ contient dans son intérieur de points de $K\subset P$. Cette contradiction justifie l'égalité (9).

L'ensemble $P$ étant vide, l'intervalle $(a, b)$ est un intervalle régulier, c.-à-d. la fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{C})$ dans $(a, b)$ et son intégrale $(\mathfrak{C})$ coïncide dans cet intervalle avec celle de M. Denjoy.

Notre théorème est ainsi prouvé.

## III.

### § 10. Points singuliers.

Nous donnerons dans ce chapitre une modification légère de la définition de M. Denjoy sous la forme précise d'induction transfinie. Dans ce but nous tirerons parti des notions abstraites exposées dans les §§ 7, 8 du chapitre précédent.

Soit $\mathcal{S}$ une intégrale et $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle $(a, b)$. Nous appellerons un point $x$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ point singulier $(\mathcal{S})$ de la fonction $f(x)$ dans $(a, b)$ lorsqu'il y a de sous-intervalles arbitrairement petits, où $f(x)$ ne soit pas intégrable $(\mathcal{S})$. On voit de suite que si un intervalle $(a, b)$ ne contient pas de points singuliers $(\mathcal{S})$ d'une fonction $f(x)$, cette fonction est forcément intégrable $(\mathcal{S})$ dans cet intervalle.

### § 11. Intégrale singulière de Cauchy.

Soit $\mathcal{S}$ une intégrale quelconque. Nous y rattacherons une nouvelle fonctionnelle qu'on désignera par $\mathcal{S}^c$ et qu'on définira de manière suivante:



pour chaque intervalle $I_0=(a, b)$ la classe $K(\mathcal{S}^c; I_0)$ est formée par toutes les fonctions $f(x)$ telles que

(1) l'intervalle $(a, b)$ ne contient qu'un nombre fini de points singuliers $(\mathcal{S})$ de la fonction $f(x)$;

(2) il existe une fonction $F(x)$ continue dans $I_0$ et telle que, pour chaque sous-intervalle $I=(c, d)$ de $I_0$ ne contenant pas de points singuliers $(\mathcal{S})$ de $f(x)$,

$$F(d)-F(c)=\mathcal{S}(f;I).$$

Si une telle fonction $F(x)$ existe, elle est par les conditions données déterminée complètement à une constante additive près. On pose alors, par définition, si $f(x)\in K(\mathcal{S}^c; I_0)$

$$\mathcal{S}^c(f;I_0)=F(b)-F(a).$$

La fonctionnelle $\mathcal{S}^c$ ainsi définie satisfait comme on voit de suite aux conditions $(A)$ et $(B)$ du § 7, c. à-d. elle est également une intégrale. On l'appellera intégrale singulière $(\mathcal{S})$ de Cauchy; on voit qu'elle contient l'intégrale $\mathcal{S}$ au sens propre; par écrit

$$\mathcal{S}^c\supset\mathcal{S}.$$

pour chaque intégrale $\mathcal{S}$.

### § 12. Intégrales singulières de Harnack.

On rattachera encore à chaque intégrale $\mathcal{S}$ deux intégrales qu'on nommera resp. $\mathcal{S}^h$ et $\mathcal{S}^{h*}$. La première en est définie de manière suivante:

$K(\mathcal{S}^h; I_0)$ est, pour chaque intervalle $I_0$, la famille de toutes les fonctions définies dans $I_0$ et telles que

(1) en désignant par $P$ l'ensemble des points singuliers $(\mathcal{S})$ de $f(x)$ dans $I_0$ et par $\{I_k\}$ la suite des intervalles contigus à $P$ dans $I_0$, la fonction $f(x)$ est intégrable $(\mathcal{S})$ dans chaque intervalle $I_k$ $(k\geqslant 1)$, et

(2) $$\sum_k|\mathcal{S}(f;I_k)|<+\infty,\quad \lim_k O_k=0,$$

où $O_k$ désigne l'oscillation de l'intégrale $(\mathcal{S})$ de $f(x)$ dans l'intervalle $I_k$[1]).

[1]) c.-à-d. la borne supérieure des valeurs de $\mathcal{S}(f;I)$ pour les intervalles $I\subset I_0$.

Ceci étant, on pose, par définition,

$$\mathcal{S}^h(f;\, I_0) = \mathcal{S}(f;\, P) + \sum_k \mathcal{S}(f;\, I_k).$$

On définit de façon presque identique la fonctionnelle $\mathcal{S}^{h*}$; on modifie seulement la condition (2), en la remplaçant par la suivante:

$$(2^*) \qquad \sum_k O_k < +\infty.$$

On vérifie de suite que les fonctionnelles $\mathcal{S}^h$ et $\mathcal{S}^{h*}$ sont des intégrales; on appelle $\mathcal{S}^h$ intégrale singulière ($\mathcal{S}$) de Harnack; pareillement, $\mathcal{S}^{h*}$ est dite intégrale singulière ($\mathcal{S}$) de Harnack au sens restreint.

On a, pour chaque intégrale $\mathcal{S}$,

$$\mathcal{S}^h \supset \mathcal{S}^{h*} \supset \mathcal{S}.$$

## § 13. Définition inductive des intégrales de M. Denjoy.

Soit $\{\mathcal{S}_\xi\}$ $(\xi < \nu)$ une suite transfinie quelconque d'intégrales, et supposons qu'on a toujours pour $\xi < \eta < \nu$

$$(1) \qquad \mathcal{S}_\eta \supset \mathcal{S}_\xi.$$

Nous désignerons par

$$\sum_{\xi<\alpha} \mathcal{S}_\xi$$

l'intégrale $\mathcal{S}$ définie par les conditions suivantes:

$$(2) \qquad K(\mathcal{S};\, I) = \sum_{\xi<\alpha} K(\mathcal{S}_\xi;\, I)$$

pour chaque intervalle $I$;

$$(3) \qquad \text{si} \quad f(x) \in K(\mathcal{S};\, I)$$

et $\xi_0$ est le plus petit nombre $\xi$ tel que $f(x) \in K(\mathcal{S}_\xi;\, I)$, on posera:

$$\mathcal{S}(f;\, I) = \mathcal{S}_{\xi_0}(f;\, I)$$

(on a à la fois, par la formule (1), $\mathcal{S}(f;\, I) = \mathcal{S}_\xi(f;\, I)$ pour chaque $\xi \geqslant \xi_0$).

Soit maintenant $\{\mathcal{L}_\xi\}$, $\{\mathcal{L}_\xi^*\}$ deux suites transfinies d'intégrales déterminées, par induction, de façon suivante:

(4) $\qquad \mathcal{L}_0 < \mathcal{L}_0^*$ désigne l'intégrale lebesguienne;



$$(5) \qquad \mathcal{L}_\alpha = \Big(\sum_{\xi<\alpha} \mathcal{L}_\xi\Big)^{ch}, \qquad \mathcal{L}_\alpha^* = \Big(\sum_{\xi<\alpha} \mathcal{L}_\xi^*\Big)^{ch*},$$

pour chaque $\alpha > 0$.

Nous prouverons que

$$\mathfrak{D} = \sum_{\xi<\Omega} \mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}_\Omega,$$

et

$$\mathfrak{D}^* = \sum_{\xi<\Omega} \mathcal{L}_\xi^* = \mathcal{L}_\Omega,$$

où $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}^*$ désignent, comme toujours dans cette note, les intégrales denjoyennes. Il suffit d'ailleurs prouver seulement la première relation, la seconde se démontrant de manière complètement analogue.

L'intégrale $\mathfrak{D}$ contenant l'intégrale lebesguienne et étant complète, on vérifie de suite, par induction, qu'on a, pour chaque $\xi$,

$$(6) \qquad \mathfrak{D} \supset \mathcal{L}_\xi,$$

d'où

$$\mathfrak{D} \supset \sum_{\xi<\Omega} \mathcal{L}_\xi.$$

Pour en déduire l'identité

$$\mathfrak{D} = \sum_{\xi<\Omega} \mathcal{L}_\xi,$$

il suffit de prouver que chaque fonction $f(x)$ intégrable ($\mathfrak{D}$) dans un intervalle $(a, b)$, est à la fois intégrable $\mathcal{L}_\xi$ pour un nombre $\xi < \Omega$ suffisamment grand.

Soit donc $f(x)$ une telle fonction et désignons, pour chaque nombre $\xi$, par $P_\xi$ l'ensemble de points singuliers ($\mathcal{L}_\xi$) de $f(x)$ dans $(a, b)$. Les ensembles $P_\xi$ forment une suite non-croissante d'ensembles fermés et, par conséquent, d'après le théorème connu, il existe un nombre $\mu < \Omega$ tel que

$$(7) \qquad P_\mu = P_{\mu+1}.$$

Supposons, par impossible, que

$$(8) \qquad P_{\mu+1} = P_\mu \neq 0.$$

Nous supposons d'abord que $P_\mu$ ne se réduit pas aux extrémités de l'intervalle $(a, b)$.

L'ensemble $P_\mu$ contient alors, en raison du lemme du § 9, une portion $K$ telle que $f(x)$ est sommable sur $K$ et que la série des valeurs des intégrales ($\mathfrak{D}$) de la fonction $f(x)$ sur les intervalles $\pi_n$

contigus à $K$, converge absolument. Il existe, par conséquent, un sous-intervalle $\Pi$ de $(a, b)$ contenant dans son intérieur des points de $K$, et tel que

$$\Pi \times K = \Pi \times P_\mu.$$

Or, aucun intervalle situé dans l'intérieur d'un des intervalles contigus $\pi_n$, ne contient de points singuliers $\mathfrak{L}_\mu$; par conséquent, $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{L}_\mu)$ dans chaque tel intervalle et en vertu de (6), la valeur de son intégrale $(\mathfrak{L}_\mu)$ y coïncide avec celle de son intégrale $(\mathfrak{D})$. Il s'en suit facilement que $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{L}_\mu^c)$ sur chaque intervalle $\pi_n$ et que

$$\mathfrak{L}_\mu^c(f; \pi_n) = (\mathfrak{D})\int_{\pi_n} f(x)\,dx,$$

et

$$O(\mathfrak{L}_\mu^c; f; \pi_n) = O(\mathfrak{D}; f; \pi_n)\ ^{1)}.$$

On a donc

$$\sum_n |\mathfrak{L}_\mu^c(f; \pi_n)| < +\infty, \tag{9}$$

et lorsque la suite $\{\pi_n\}$ est infinie, aussi

$$\lim_n O(\mathfrak{L}_\mu^c; f; \pi_n) = 0. \tag{10}$$

Or, en raison de (7), tous les points de $K$, (au moins ceux qui sont intérieurs à $\Pi$), sont à la fois des points singuliers $(\mathfrak{L}_\mu^c)$ de $f(x)$ dans $\Pi$. D'autre part, la fonction $f(x)$ étant sommable sur $K$, elle y est, à plus forte raison, intégrable $\mathfrak{L}_\mu^c$ en tant que $\mathfrak{L}_\mu^c \supset \mathfrak{L}_\mu$ contient l'intégrale lebesguienne. Il s'en suit en raison de (9) et (10) que $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{L}_\mu^{ch} = \mathfrak{L}_{\mu+1})$ dans $\Pi$ ce qui est évidemment contradictoire avec l'hypothèse que $\Pi$ contient dans son intérieur des points de $P_{\mu+1} = P_\mu$.

Nous avons supposé plus haut que $P_\mu$ ne se réduit pas aux extrémités de l'intervalle $(a, b)$. Or, s'il en était ainsi, on vérifierait de suite que $f(x)$ serait intégrable $(\mathfrak{L}_\mu^c)$, donc, à plus forte raison, intégrable $(\mathfrak{L}_{\mu+1})$ dans $(a, b)$ ce qui est aussi contradictoire avec l'hypothèse (8).

Ainsi, dans tout cas nous aboutissons avec (8) à une contradiction; il s'en suit que $P_\mu = 0$, c.-à-d. que $f(x)$ est intégrable $(\mathfrak{L}_\mu)$ dans $(a, b)$.

Notre assertion est donc démontrée.

[1]) $\mathfrak{S}$ étant une intégrale et $f(x)$ une fonction quelconque intégrable $(\mathfrak{S})$ dans un intervalle $I_0$, $O(\mathfrak{S}; f; I_0)$ désigne l'oscillation de l'intégrale $(\mathfrak{S})$ de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $I_0$; *voir* note [1]), p. 259.

# Sur la décomposition du cercle ouvert en arcs simples ouverts.

Par

Stanisława Nikodym (Cracovie).

Le but de cette note consiste à démontrer une propriété de la décomposition des domaines ouverts et plans en arcs simples ouverts. Nous ne considérerons ici que le cas particulier, où le domaine est l'intérieur d'une courbe simple fermée.

**Théorème** [1]). *Soit $G$ l'intérieur d'une courbe simple fermée $C$. Supposons qu'on ait décomposé $G$ en des arcs simples ouverts $\{K\}$ jouissant des propriétés suivantes:*

*1° leurs diamètres surpassent un nombre positif fixe $\varepsilon$,*

*2° ils sont disjoints deux à deux, même si l'on les ferme,*

*3° les deux bouts $K$ de chaque arc ne coïncident jamais et ils sont des points qui se trouvent sur la frontière $C$ du domaine $G$,*

*4° par tout point $p \in G$ passe une courbe $K$.*

*Soit $p_0, p_1, p_2, \ldots$ une suite infinie de points de $G$ telle que $\lim p_n = p_0$ et telle qu'au plus un nombre fini des $p_n$ est situé sur l'arc $K_0$ passant par $p_0$. Soit $K_n$ l'arc de $\{K\}$ passant par $p_n$*

[1]) L'étude de telles décompositions m'était proposée par M. O. Nikodym. Le contenu de la note était présenté au *I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves à Varsovie* (le 24. IX. 1929, Section III).