Über die Bogenverknüpfung in topologischen Räumen.

Von

N. Aronszajn (Warszawa).

1. In der vorliegenden Arbeit werde ich topologisch eine Klasse $\mathfrak{A}$ von Mengen (Räume) definieren, von der ich ebenfalls topologisch beweisen werde, dass jede relativ-offene und zusammenhängende Teilmenge U irgend einer lokal zusammenhängenden Menge M von $\mathfrak{A}$ *ein lokal zusammenhängendes Semikontinuum ist, dessen je zwei Punkte sich durch einen einfachen in U liegenden Bogen verbinden lassen.*

Es wird sich ausserdem erweisen, dass die Klasse $\mathfrak{A}$ unter anderen topologischen Mengen sämtliche sogenannte *absolute G_δ-Mengen* [1]) als Elemente enthält [2]).

[1]) d. h. (nach Hausdorff, Mengenlehre 1928, S. 136) solche Teilmengen irgend eines vollständigen metrischen Raumes R, die in R G_δ-Mengen sind. Die Bezeichnung „absolute" G_δ ist dadurch begründet, dass eine solche Menge in *jedem* sie enthaltenden topologischen metrisierbaren Raume eine G_δ ist.

Da die Metrisierbarkeit, insbesondere die vollständige Metrisierbarkeit eines Raumes, ferner die Eigenschaft „G_δ", offenbar topologische Eigenschaften sind, so ist der Begriff der absoluten G_δ-Menge auch ein topologischer. Übrigens lässt sich diese Mengenklasse topologisch auch dadurch charakterisieren, dass sie mit der Klasse aller topologischen vollständig-metrisierbaren Mengen übereinstimmt (Vgl. Hausdorff, Fund Math. VI, S. 146).

[2]) Dass jede zusammenhängende und lokal-zusammenhängende absolute G_δ-Menge für je zwei ihrer Punkte a, b einen einfachen Bogen $L \supset (a, b)$ enthält, hat bereits Menger bewiesen (S. K. Menger, Monatsh. f. Math. und Phys. XXXVI, S. 210). Derselbe Satz wurde neuerlich von Härlen für eine topologische Mengenklasse (Vgl. C. R. 189, S. 389) ausgesprochen, mit der Behauptung, dass diese Klasse alle vollständige metrische Räume enthält. Diese Behauptung ist falsch trotz der Richtigkeit des Satzes. Als Gegenbeispiel möge der Hilbertsche unendlichdimensionale Raum dienen.

Ob sie schon unter metrischen (präziser: unter metrisierbaren topologischen) Mengen noch andere, d. h. von absoluten G_δ verschiedene Mengen enthält, bleibt ungelöst.

2. Sei A eine beliebige topologische Menge (ein topologischer Raum im Sinne von Hausdorff oder eine Teilmenge desselben). Dann bezeichnen wir mit $\pi_A(B)$ irgend eine Klasse von Mengen, die in A relativ-offen sind und deren Summe die Menge B bedeckt; dabei werden für konstante A und B verschiedene $\pi_A(B)$-Klassen mit verschiedenen oberen Indizes versehen.

Es ist leicht einzusehen, dass eine Klasse $\pi_A(B)$ dann und nur dann existiert, wenn $B \subset A$. Ist ferner $B_1 \subset B$, so ist jede Klasse $\pi_A(B)$ zugleich eine Klasse $\pi_A(B_1)$.

3. Eine endliche Folge von Mengen $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ möge *die Punkte a und b verbindende Mengenkette* heissen, wenn

(1) $\quad a \in U_1, \quad b \in U_n, \quad U_i \cdot U_{i+1} \neq 0 \quad$ *für* $\quad i = 1, 2, \ldots, (n-1)$

gilt.

Gehören sämtliche Kettenglieder $U_1, U_2, \ldots, U_n$ zu einer Klasse π, so wird es von einer „*Mengenkette in π*" gesprochen.

Dann gilt folgender

Hilfssatz I: *Ist die Menge B zusammenhängend, so existiert für jede Klasse $\pi_A(B)$ und für je zwei Punkte $p, q \in B$ eine Mengenkette in $\pi_A(B)$, welche die Punkte p und q verbindet.*

Beweis: Es sei eine zusammenhängende Teilmenge B von A, eine Klasse $\pi_A(B)$ und ein Punkt $p \in B$ gegeben. Wir definieren B_1 als Menge aller Punkte $x \in B$, die mit p durch eine Mengenkette in $\pi_A(B)$ verbindbar sind, und setzen $B_2 = B - B_1$.

Daraus ergibt sich unmittelbar:

(2) $$p \in B_1 \neq 0, \quad B = B_1 + B_2.$$

Da B zusammenhängend ist, so besteht eine von drei Relationen:

$$\overline{B_1}\, B_2 \neq 0, \quad \text{oder} \quad B_1\, \overline{B_2} \neq 0, \quad \text{oder} \quad B_2 = 0.$$

Im ersten Falle: ist $x \in \overline{B_1}\, B_2$, so gibt es wegen $x \in B_2 \subset B$ eine in A relativ-offene Menge U, sodass

(3) $$x \in U \in \pi_A(B).$$

Aus $x \in \overline{B_1}\, B_2 \subset \overline{B_1}\, A$ ergibt sich also die Existenz eines Punktes

(4) $$y \in B_1 \cdot U.$$

Nach der Definition von B_1 gibt es ferner wegen (4) eine die Punkte p und y verbindende Mengenkette in $\pi_A(B)$, die aus Mengen $(U_1, \ldots, U_n)$ besteht. Nach (3) und (4) bildet also die Mengenfolge $(U_1, \ldots, U_n, U)$ eine Mengenkette in $\pi_A(B)$, welche die Punkte p und x verbindet, den Beziehungen $x \in \overline{B_1} \cdot B_2 \subset B_2$ zuwider.

Im zweiten Falle, gibt es ganz analog einen Punkt $x' \in B_1 \cdot \overline{B_2}$, eine Menge U', einen Punkt y' und schliesslich eine die Punkte p und x' verbindende Mengenkette $(U'_1, \ldots, U'_{n'})$ in $\pi_A(B)$, sodass

(5) $$x' \in U' \in \pi_A(B), \quad y' \in B_2 \cdot U'$$

gilt.

Es folgt daraus, dass die Mengenfolge $(U'_1, \ldots, U'_{n'}, U')$ eine p und y' verbindende Mengenkette in $\pi_A(B)$ ist. Dies aber steht im Widerspruch mit $y' \in B_2 \cdot U' \subset B_2$.

Im letzten Falle folgt aus (2)

$$B = B_1,$$

sodass in diesem Falle jeder Punkt $q \in B = B_1$ kann auf Grund der Definition von B_1 mit dem beliebig vorausgegebenen Punkte $p \in B$ durch eine Mengenkette in $\pi_A(B)$ verbunden werden, w. z. b. w.

4. Wir werden sagen, dass *eine Klasse $\pi_A(B)$ die Menge B erzeugt*, falls es für jeden Punkt $p \in B$ und für jede in A offene und den Punkt p enthaltende Menge U eine Menge $V \in \pi_A(B)$ gibt, derart, dass

(6) $$p \in V \subset U.$$

Es ist leicht zu ersehen, dass jede Klasse $\pi_A(B)$ welche B erzeugt, zugleich für jede Menge $B_1 \subset B$ eine erzeugende $\pi_A(B_1)$-Klasse ist.

Hilfssatz II: *Ist B in A offen, so existiert, für jede die Menge A erzeugende Klasse $\pi_A(A)$, eine Klasse $\pi_B(B) \subset \pi_A(A)$.*

Beweis: Wir definieren die Klasse $\pi_B(B)$ folgendermassen:

(7) *$U \in \pi_B(B)$ dann und nur dann, wenn $U \in \pi_A(A)$ und $U \subset B$.*

Demnach stimmt diese Definition mit der allgemeinen Definition von $\pi_A(B)$ aus 2. überein; denn, erstens ergibt sich aus (7) sofort, dass jede Menge $U \in \pi_B(B)$ in B offen ist; zweitens, da die Klasse $\pi_A(A)$ die Menge A erzeugt, so gibt es für jeden Punkt $p \in B \subset A$ eine Menge $U \in \pi_A(A)$, wo $p \in U \subset B$; da aber daraus nach (7) $p \in U \in \pi_B(B)$ folgt, so ist die Menge B durch die Mengen der Klasse $\pi_B(B)$ bedeckt, w. z. b. w.

5. ***Hilfssatz III:*** *Ist die Menge P lokal-zusammenhängend, so bilden für jede Klasse $\pi_P(P)$ die Komponenten aller Mengen $U \in \pi_P(P)$ ebenfalls eine Klasse $\pi'_P(P)$.*

Beweis: Es ist nach 2. zu zeigen, dass jeder Punkt $p \in P$ in einer Komponente V von einer Menge $U \in \pi_P(P)$ liegt und dass jede solche Komponente in P offen ist. Das erste ist evident, denn p ist in einer Menge $U \in \pi_P(P)$, also in einer Komponente von U, enthalten. Das zweite folgt aus einem bekannten Satze von Hahn-Kuratowski[1]). da P lokal-zusammenhängend und U in P offen ist.

6. Wir werden hier den Ausdruck „*Die Mengenfolge $\{A_n\}$ konvergiert gegen den Punkt p*" (wo $A_n \subset R$, $p \in R$ und R ein topolog. Raum ist) ausschliesslich in dem Sinne gebrauchen, dass jede in R offene und den Punkt p enthaltende Menge, enthält auch fast alle Mengen A_n. Dies wird mit $\{A_n\} \to p$ bezeichnet.

Es ist leicht zu sehen, dass wenn $\{A_n\} \to p$ und $p_n \in A_n$, so konvergiert die Punktfolge $\{p_n\}$ gegen p (in topologischem Sinne von Hausdorff). Daraus ergibt sich folgende Bemerkung:

(8) *Wenn $\{A_n\} \to p$, $\{B_n\} \to q$ und für jedes n $A_n \cdot B_n \neq 0$ ist, so ist $p = q$.*

7. Nun wollen wir die oben erwähnte Mengenklasse $\mathfrak{K}$ definieren und zwar folgendermassen:

Eine topologische Menge (Raum) R gehöre zur klasse $\mathfrak{K}$ dann und nur dann, wenn es eine unendliche Folge von Klassen $\{\pi_R^{(n)}(R)\}$ mit $n = 1, 2, \ldots$ gibt, wo

(9) Für jede natürliche Zahl n, R ist durch die Klasse $\pi_R^{(n)}(R)$ erzeugt,

[1]) Vgl. Kuratowski, Fund. Math. I, S. 43, Hahn, Fund Math. II, S. 189 auch Tietze, Monatsh. für Math. und Phys. 33, S. 15—17. In der letzten Arbeit ist dieser Satz für allgemeine topologische Räume bewiesen.

(10) Jede Mengenfolge $\{\overline{U_n}\}$, wo $U_n \supset U_{n+1}$ und $U_n \in \pi_R^{(n)}(R)$, einen aus einem Punkt p bestehenden Durchschnitt $\prod_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$ hat und gegen p im oben genannten Sinne konvergiert.

Hilfssatz IV: *Jeder Raum $R \in \mathfrak{R}$ ist regulär und genügt dem I Abzählbarkeitsaxiom von Hausdorff.*

Beweis: Für jeden Punkt $p \in R$ gibt es nach (9) eine abnehmende Folge von Mengen $U_1(p) \supset U_2(p) \supset \ldots \supset U_n(p) \supset \ldots$, wo $p \in U_n(p) \in \pi_R^{(n)}(R)$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$ und folglich $p \in \prod_{n=1}^{\infty} U_n(p)$. Nach (10) gibt es aber einen Punkt $q = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{U_n(p)}$, gegen welchen dieselbe Folge $\{\overline{U_n(p)}\}$ konvergiert. Zwei letztere Formeln ergeben unmittelbar, dass $p = q$ und also, dass die Folge $\{\overline{U_n(p)}\}$ gegen p konvergiert. Es gibt folglich für jede offene, den Punkt p enthaltende, Menge U einen Index n, sodass $p \in U_n(p) \subset \overline{U_n(p)}$ und gleichzeitig $\overline{U_n(p)} \subset U$ (auf Grund von Konvergenz der Folge $\{\overline{U_n(p)}\}$ gegen p). Die Regularität des Raumes R ist dadurch bewiesen.

Die Konvergenz der Folgen $\{\overline{U_n(p)}\}$ gegen p impliziert andererseits, dass das Umgebungssystem, welches für jeden Punkt $p \in R$ aus offenen Mengen $U_n(p)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ besteht, mit dem ursprünglichen Umgebungssystem des topologischen Raumes R gleichwertig ist. Der I Abzählbarkeitsaxiom ist demnach erfüllt.

8. ***Satz V:*** *Ist eine topologische Menge $R \in \mathfrak{R}$ lokal-zusammenhängend, so ist jede zusammenhängende und in R offene Menge U ein Semikontinuum, dessen je zwei Punkte $a, b \in U$ auf einem einfachen Bogen $L \subset U$ liegen.*

Beweis: Nach der Definition von $\mathfrak{R}$ gibt es eine Klassenfolge $\{\pi_R^{(n)}(R)\}$ die den Bedingungen (9) und (10) genügt.

Der Beweis zerfällt in zwei Teile.

In erstem Teile definieren wir durch vollständige Induktion eine Folge natürlicher Zahlen $\{N_k\}$ und für jedes System von k Indizes $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ mit $1 \leq i_m \leq N_m$, $1 \leq m \leq k$, zwei in R offene Mengen $U^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k}$ und $V^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k}$ derart, dass folgende Bedingungen bestehen:

(11) $$N_k \geq k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

(12) Jede Menge $V^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k}$ ist eine Komponente von $U^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k}$.

(13) $$U^{(k+1)}_{i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}} \subset V^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k}.$$

(14) $$U^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k} \in \pi_R^{(k)}(R).$$

(15) Ordnet man für irgend ein k alle Systeme $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ mit $1 \leq i_m \leq N_m$, $1 \leq m \leq k$ lexikographisch, so bildet die entsprechend geordnete Klasse von Mengen $V^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k}$ eine Mengenkette, welche die gegebenen Punkte a und b verbindet.

Zu diesem Zwecke betrachten wir zuerst für jeden Punkt $p \in U$ eine wegen der Regularität von R und nach (9) existierende offene Menge $U(p) \in \pi_R^{(1)}(R)$, wo $p \in U(p) \subset \overline{U(p)} \subset U$.

Alle Mengen $U(p)$ für $p \in U$ bilden eine Klasse $\pi_U(U)$ und nach Hilfssatz III auch die Komponenten aller Mengen $U(p)$ für $p \in U$ eine Klasse $\pi'_U(U)$ bilden. Da U zusammenhängend ist, so existiert eine Mengenkette $(M_1, M_2, \ldots, M_l)$ in $\pi'_U(U)$, welche die Punkte $a, b \in U$ verbindet.

Dann setzen wir:

1°. $$N_1 = l,$$

$$V^{(1)}_{i_1} = M_{i_1} \quad \text{für} \quad i_1 = 1, 2, \ldots, N_1,$$

$U^{(1)}_{i_1}$ = eine (beliebig fixierte) Menge der Klasse $\pi_U(U)$, welche $V^{(1)}_{i_1}$ als Komponente enthält.

Es ist leicht einzusehen, dass die Bedingungen (11)—(15) erfüllt sind und ausserdem, dass

(16) $$\sum_{i_1=1}^{N_1} \overline{U^{(1)}_{i_1}} \subset U$$

gilt.

2°. Es seien für $k \leq k_0$ die Zahlen N_k und die Mengen $U^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k}$ und $V^{(k)}_{i_1, \ldots, i_k}$ gegeben, welche den Bedingungen (11)—(15) genügen. Wir ordnen die Mengen $V^{(k_0)}_{i_1, \ldots, i_{k_0}}$ lexikographisch nach ihren Indizes in eine endliche Mengenfolge $(W_1^{(k_0)}, \ldots, W^{(k_0)}_{N^{(k_0)}})$, wo

(17) $$N^{(k_0)} = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_{k_0}$$

(18) Die Klasse der Mengen $W_n^{(k_0)}$, $1 \leq n \leq N^{(k_0)}$ ist identisch mit der Klasse aller Mengen $V^{(k_0)}_{i_1, \ldots, i_{k_0}}$ für jedes System $(i_1, \ldots, i_{k_0})$, wo $1 \leq i_m \leq N_m$, $1 \leq m \leq k_0$.

Nach (15) gibt es Punkte p_n $(0 \leq n \leq N^{(k_0)})$, derart dass

(19) $p_0 = a \epsilon W_1^{(k_0)}$, $p_{N^{(k_0)}} = b \epsilon W_{N^{(k_0)}}^{(k_0)}$, $p_n \epsilon W_n^{(k_0)} \cdot W_{n+1}^{(k_0)}$, $1 \leq n \leq N^{(k_0)} - 1$,

also

(19′) $$(p_n, p_{n+1}) \subset W_{n+1}^{(k_0)}, \quad 0 \leq n \leq N^{(k_0)} - 1.$$

Ist nun

(20) $$W_n^{(k_0)} = V_{i_1, \dots, i_{k_0}}^{(k_0)},$$

so ist die Menge $U_{i_1, \dots, i_{k_0}}^{(k_0)}$ nach (14) in R offen. Da R lokal-zusammenhängend vorausgesetzt wurde, so ist auch $U_{i_1, \dots, i_{k_0}}^{(k_0)}$ lokal-zusammenhängend. Nach (12) und (20) ist also $W_n^{(k_0)}$ zusammenhängend und in R offen. Daraus folgt wegen (9) auf Grund von Hilfssatz II die Existenz der Klasse

(21) $$\pi_{W_n^{(k_0)}}(W_n^{(k_0)}) \subset \pi_R^{(k_0+1)}(R)$$

und ferner, auf Grund von Hilfssatz III, die Existenz der Klasse $\pi'_{W_n^{(k_0)}}(W_n^{(k_0)})$, welche aus lauter Komponenten aller Mengen der Klasse $\pi_{W_n^{(k_0)}}(W_n^{(k_0)})$ besteht.

Andererseits, impliziert der Zusammenhang von $W_n^{(k_0)}$, auf Grund des Hilfssatzes I und wegen (19′), die Existenz einer Mengenkette $(M_1^{(n)}, \dots, M_{l_n}^{(n)})$ in $\pi'_{W_n^{(k_0)}}(W_n^{(k_0)})$, welche die Punkte p_{n-1} und p_n verbindet.

Wir setzen nun:

(22) $$N_{k_0+1} = \max. (k_0 + 1, l_1, l_2, \dots, l_{N^{(k_0)}}),$$

wodurch die Zahl N_{k_0+1} definiert ist.

In jeder Mengenkette $(M_1^{(n)}, \dots, M_{l_n}^{(n)})$, wo $1 \leq n \leq N^{(k_0)}$, schreiben wir dann die letzte Menge $M_{l_n}^{(n)}$ soviel Mal zu, dass wir eine p_{n-1} und p_n verbindende Mengenkette erhalten, die g e n a u aus N_{k_0+1} Glieder besteht.

Wir bezeichnen diese Mengenkette mit $(K_1^{(n)}, \dots, K_{N_{k_0+1}}^{(n)})$ und haben also:

(23) $$K_i^{(n)} \epsilon \pi'_{W_n^{(k_0)}}(W_n^{(k_0)}) \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq N_{k_0+1}.$$

(24) $$p_{n-1} \epsilon K_1^{(n)}, \; p_n \epsilon K_{N_{k_0+1}}^{(n)}, \; K_i^{(n)} \cdot K_{i+1}^{(n)} \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq N_{k_0+1} - 1.$$

Nach Definition von $\pi'_{W_n^{(k_0)}}(W_n^{(k_0)})$ gibt es Mengen $H_i^{(n)}$ derart, dass:

(25) $K_i^{(n)}$ ist eine Komponente von $H_i^{(n)} \epsilon \pi_{W_n^{(k_0)}}(W_n^{(k_0)})$.

Nach (21) schliessen wir daraus, dass

(26) $$H_i^{(n)} \subset W_n^{(k_0)}$$

und

(27) $$H_i^{(n)} \epsilon \pi_R^{(k_0+1)}(R).$$

Nehmen wir jetzt irgend ein System $(i_1, i_2, \dots, i_{k_0}, i_{k_0+1})$, wo $1 \leq i_m \leq N_m$ für $1 \leq m \leq k_0 + 1$, in Betracht. Nach (17) existiert ein und nur ein natürliches $n \leq N^{(k_0)}$, sodass (20) gilt. Wir setzen also

(28) $$V_{i_1, \dots, i_{k_0}, i_{k_0+1}}^{(k_0+1)} = K_{i_{k_0+1}}^{(n)}, \quad U_{i_1, \dots, i_{k_0}, i_{k_0+1}}^{(k_0+1)} = H_{i_{k_0+1}}^{(n)}.$$

Hiermit sind auch die Mengen $U_{i_1, \dots, i_{k_0+1}}^{(k_0+1)}$ und $V_{i_1, \dots, i_{k_0+1}}^{(k_0+1)}$ definiert und es ist aus (22), (28), (25), (26), (20) und (27) unmittelbar ersichtlich, dass die in (22) definierte Zahl und die in (28) definierten Mengen den Bedingungen (11), (12), (13) und (14) tatsächlich genügen.

Um die Eigenschaft (15) zu beweisen, ordnen wir die Mengen $V_{i_1, \dots, i_{k_0+1}}^{(k_0+1)}$ lexikographisch in die endliche Mengenfolge $(W_1^{(k_0+1)}, \dots, W_{N^{(k_0+1)}}^{(k_0+1)})$ an, wo $N^{(k_0+1)} = N^{(k_0)} \cdot N_{k_0+1}$ (vgl. (17)). Nach (28), (20) und nach Definition der Mengenkette $(W_1^{(k_0)}, \dots, W_{N^{(k_0)}}^{(k_0)})$ ist die Folge $(W_1^{(k_0+1)}, \dots, W_{N^{(k_0+1)}}^{(k_0+1)})$ nichts anderes als die Mengenfolge

$$(K_1^{(1)}, \dots, K_{N_{k_0+1}}^{(1)}, \; K_1^{(2)}, \dots, K_{N_{k_0+1}}^{(2)}, \; K_1^{(3)}, \dots, \dots, \; K_1^{(N^{(k_0)}-1)}, \dots, K_{N_{k_0+1}}^{(N^{(k_0)}-1)}, \; K_1^{(N^{(k_0)})}, \dots, K_{N_{k_0+1}}^{(N^{(k_0)})}).$$

Diese aber nach (24) eine $a = p_0$ und $b = p_{N^{(k_0)}}$ verbindende Mengenkette bildet. Damit ist auch die Bedingung (15) bewiesen.

Wir haben also in 1° und 2° die Zahlen N_k und die Mengen $U_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}$ und $V_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}$ gemäss den Bedingungen (11)—(15) definiert. Davon werden im Folgenden die Mengen $V_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}$, welche eigentlich nur als Hilfsmittel bei der Konstruktion von Mengen $U_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}$ eingeführt wurden, nicht mehr in Betracht gezogen. Dagegen wollen wir uns ausser den Formeln (14) und (16) noch einiger anderen Eigenschaften von Mengen $U_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}$ bedienen, mit derer Feststellung der erste Teil des Beweises abgeschlossen wird.

Nach (12) und (13) haben wir nämlich:

(29) $U_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}}^{(k+1)} \subset U_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}$ für jedes System $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1})$, wo $1 \leq i_m \leq N_m$, $1 \leq m \leq k + 1$.

Ordnen wir die Mengen $U_{i_1, \dots, i_k}^{(k)}$ (für ein festes k) lexikographisch an, so erhalten wir eine aus allen Mengen $U^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k}$ bestehende Mengenfolge, die nach (12), (15) und (14) eine a und b verbindende Mengenkette in $\pi^{(k)}_R(R)$ bildet. Nach (1) gilt also:

$$(30)\qquad a \in U^{(k)}_{1,1,\ldots,1}, \quad b \in U^{(k)}_{N_1,N_2,\ldots,N_k} \quad \text{für} \quad k=1,2,\ldots,$$

(31) $U^{(k)}_{i'_1,\ldots,i'_k} \cdot U^{(k)}_{i''_1,\ldots,i''_k} \neq 0$ für je zwei nacheinanderstehende Systeme $(i'_1,\ldots,i'_k)$ und $(i''_1,\ldots,i''_k)$.

Nach diesen Feststellungen gehen wir zum zweiten Teile des Beweises über. Es wird zunächst eine **stetige Funktion** φ eingeführt, die jeder Zahl ξ, wo $0 \leq \xi \leq 1$, einen Punkt $\varphi(\xi) \in R$ zuordnet. Zu diesem Zwecke entwickeln wir die Zahl ξ in die Reihe der bekannten Form

$$(32)\qquad \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{N_1 \cdot N_2 \cdots N_n}, \quad wo \quad 0 \leq \gamma_n \leq N_n - 1, \quad n=1,2,\ldots$$

und N_n die in 1° und 2° gegebenen natürlichen Zahlen sind.

Wir definieren nun:

$$(33)\qquad \varphi(\xi) = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{U^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n}}, \quad wo \quad i_n = \gamma_n + 1, \quad n=1,2,\ldots$$

Es ist aus (29), (14) und (10) ersichtlich, dass für jede Entwicklung von ξ der Form (32) ein solcher Punkt $\varphi(\xi)$ tatsächlich existiert und zwar ein einziger.

Da es aber im Allgemeinen für ein ξ zwei (aber auch **nur** zwei) verschiedene Entwicklungen von der Form (32) geben kann, so ist es zu zeigen, dass die beiden denselben Wert der Funktion $\varphi(\xi)$ bestimmen.

Es seien also

$$(34)\qquad \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{N_1 \ldots N_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma'_n}{N_1 \ldots N_n}, \quad \text{wo} \quad 0 \leq \gamma_n \leq N_n - 1,$$
$$0 \leq \gamma'_n \leq N_n - 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

zwei verschiedene Entwicklungen von ξ gegeben. Dann gibt es bekanntlich ein natürliches k, sodass

$$(35)\qquad \begin{cases} 0 \leq \gamma_m = \gamma'_m \leq N_m - 1 & \text{für} \quad m = 1, 2, \ldots, (k-1) \\ 0 \leq \gamma_k = \gamma'_k - 1 \leq N_k - 2 & \\ 0 = \gamma'_m < N_m - 1 = \gamma_m & \text{für} \quad m = (k+1), (k+2), \ldots \end{cases}$$

Setzen wir nun $i_m = \gamma_m + 1$, $i'_m = \gamma'_m + 1$, so erhalten wir sofort nach (35), dass

(36) $\begin{cases} \textit{für } m = 1, 2, \ldots, (k-1), \ (i_1, \ldots, i_m) \textit{ identisch mit } (i'_1, \ldots, i'_m) \textit{ ist,} \\ \textit{für } m = k, (k+1), \ldots, \ (i_1, \ldots, i_m) \textit{ und } (i'_1, \ldots, i'_m) \textit{ in der lexiko-} \\ \textit{graphischen Anordnung zwei nacheinanderstehende Systeme sind.} \end{cases}$

Wegen (36) erhalten wir also aus (31)

$$(37)\qquad U^{(m)}_{i_1,\ldots,i_m} \cdot U^{(m)}_{i'_1,\ldots,i'_m} \neq 0 \quad \text{für} \quad m = 1, 2, \ldots$$

Aus (37) und (8) folgt es leicht, dass die Punkte, gegen welche die Mengenfolgen $\{\overline{U^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n}}\}$ und $\{\overline{U^{(n)}_{i'_1,\ldots,i'_n}}\}$ nach (29), (14) und (10) konvergieren, identisch sind. Daraus folgt nach (33) und (10):

$$\varphi(\xi) = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{U^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{U^{(n)}_{i'_1,\ldots,i'_n}},$$

wodurch die Eindeutigkeit von φ bewiesen ist.

Um die Stetigkeit dieser Funktion zu beweisen, betrachten wir eine gegen ξ $(0 \leq \xi \leq 1)$ konvergierende Zahlenfolge $\{\xi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leq \xi_n \leq 1$. Bekanntlich enthält die letztere eine Teilfolge $\{\xi_{n_k}\}$ $k = 1, 2, \ldots$, wo

$$(38)\qquad \xi_{n_k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma^{(k)}_m}{N_1 \ldots N_m}, \quad 0 \leq \gamma^{(k)}_m \leq N_m - 1, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$(39)\qquad \xi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{N_1 \ldots N_m}, \quad 0 \leq \gamma_m \leq N_m - 1, \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$(40)\qquad \gamma^{(k)}_m = \gamma_m \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 1 \leq m \leq k.$$

Nun setzen wir: $i^{(k)}_m = \gamma^{(k)}_m + 1$, $i_m = \gamma_m + 1$ und erhalten nach (38), (33) und (40):

$$(41)\qquad \varphi(\xi_{n_k}) = \prod_{m=1}^{\infty} \overline{U^{(m)}_{i^{(k)}_1,\ldots,i^{(k)}_m}} \subset \overline{U^{(k)}_{i^{(k)}_1,\ldots,i^{(k)}_k}} = \overline{U^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k}} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Da die Mengenfolge $\{\overline{U^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}}\}$ nach (29), (14), (10), (39) und (33) gegen $\varphi(\xi)=\prod_{k=1}^{\infty}\overline{U^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}}$ konvergiert, so ist nach (41) und nach der Bemerkung aus **6**:

$$\{\varphi(\xi_{n_k})\}\to\varphi(\xi). \tag{42}$$

Jede gegen ξ konvergierende Zahlenfolge $\{\xi_n\}$ enthält also eine Teilfolge $\{\xi_{n_k}\}$, welche der Relation (42) genügt. Daraus aber folgt es, dass für jede gegen ξ konvergierende Folge $\{\xi_n\}$ auch die ganze Punktfolge $\{\varphi(\xi_n)\}$ gegen $\varphi(\xi)$ konvergieren muss. Dadurch ist die Stetigkeit von φ festgestellt.

Mit Hilfe von φ lässt sich nun der Beweis des Satzes folgendermassen schliessen:

Nach (33) und (16) ist die Menge C der Funktionswerten von φ in U enthalten. In Formeln:

$$C=\varphi([0;1])\subset\sum_{i_1=1}^{N_1}\overline{U}_{i_1}\subset U. \tag{43}$$

Da C ein Streckenbild (Jordan'sches Kontinuum) ist und nach (33) und (30), $a=\varphi(0)\in C$, $b=\varphi(1)\in C$ gilt, so liegen die Punkte a und b, laut einem bekannten Satze von Mazurkiewicz-Moore[1]) (welcher von Mazurkiewicz topologisch bewiesen wurde), auf einem einfachen Bogen $L\subset C$.

Wir haben also nach (43): $a,b\in L\subset C\subset U$, w. z. b. w.

9. ***Satz VI:*** *Ist R eine absolute G_δ-Menge, so gilt $R\in\mathfrak{A}$.*

Beweis: Als eine absolute G_δ-Menge, ist R nach Hausdorff mit einer vollständiger Metrik (ϱ) metrisierbar. Man kann also die Klassen $\pi^{(n)}_R(R)$ wie folgt definieren:

(44) $U\in\pi^{(n)}_R(R)$ dann und nur dann, wenn für irgendwelche $p\in R$, $0<\eta\leq\frac{1}{n}$, die Beziehung $U=S(p,\eta)$ gilt,

wo $S(p,\eta)$ die Menge aller Punkten $x\in R$ mit $\varrho(p,x)<\eta$ bezeichnet.

Nach **7.** ist es zu beweisen, dass die im (44) definierte Folge $\{\pi^{(n)}_R(R)\}$ die Bedingungen (9) und (10) erfüllt. In der Tat:

[1]) Vgl. Mazurkiewicz, Fund. Math. I, S. 166; R. L. Moore, Bulletin Americ. Math. Soc. 23, S. 233.

1) Jede Klasse $\pi^{(n)}_R(R)$ erzeugt die Menge R, da für jede in R offene Menge U und für jeden Punkt $p\in U$ eine Menge $V=S(p,\eta)$, $0<\eta\leq\frac{1}{n}$ existiert, sodass

$$p\in V\subset U,\quad V=S(p,\eta)\in\pi^{(n)}_R(R),$$

womit (9) bewiesen ist.

2) Für jede abnehmende Folge $U_1\supset U_2\supset\dots\supset U_n\supset\dots$, wo

$$U_n=S(p_n,\eta_n),\quad 0<\eta_n\leq\frac{1}{n},\quad\text{also}\quad\delta(\overline{U}_n)\leq\frac{2}{n}\ ^{1)}\ \text{ist},$$

konvergiert die Folge der abgeschlossenen Hüllen $\{\overline{U}_n\}$, wegen der Vollständigkeit der Metrik (ϱ), stets gegen einen einzigen Punkt $p=\prod_{n=1}^{\infty}U_n$. Die Bedingung (10) ist also auch erfüllt, w. z. b. w.

10. ***Schlussbemerkungen.*** 1°. Als Folgerung aus Sätzen V und VI für euklidische Räume, es ergibt sich, dass jede zwei Punkte einer im euklidischen Raum (von beliebiger Dimension) liegenden, zusammenhängenden und lokal-zusammenhängenden G_δ-Menge sich in derselben durch einen einfachen Bogen verbinden lassen, und zwar hinreichend nahe liegende Punkte durch einen beliebig kleinen Bogen.

2°. Als Beispiel eines nicht metrisierbaren topologischen Raumes welcher zur Klasse $\mathfrak{A}$ gehört, können wir die Menge T aller Ordinalzahlen der I und II Klasse benutzen, indem wir als Umgebung $U_n(\alpha)$, $n=1$ 2, ... im Falle einer isolierter Ordinalzahl α

$$U_n(\alpha)=(\alpha) \tag{45}$$

setzen, wo (α) die aus dem Element α bestehende Menge bezeichnet, und im Falle einer Limeszahl α

$$U_n(\alpha)=\mathop{\mathrm{E}}_{\zeta}[\beta_n(\alpha)<\zeta\leq\alpha],\quad\text{wo}\quad\lim_{n=\infty}\beta_n(\alpha)=\alpha \tag{46}$$

und $\mathop{\mathrm{E}}_{\zeta}[\dots]$ die Menge aller ζ von der Eigenschaft $[\dots]$ bezeichnet.

Der so erhaltene topologische Raum T ist bekanntlich nicht metrisierbar[2]).

[1]) $\delta(\overline{U}_n)$ bezeichnet das Durchmesser der Menge $\overline{U}_n$ in der Metrik (ϱ).

[2]) weil T in sich kompakt und nicht separabel ist, während jeder metrische und in sich kompakte Raum separabel ist.

Definieren wir nun die Klassen $\pi_T^{(n)}(T)$ in folgender Weise:

(47) *$U \epsilon \pi_T^{(n)}(T)$ dann und nur dann, wenn es ein $\alpha \epsilon T$ und ein natürliches $k \geqq n$ gibt, für welche $U = U_k(\alpha)$ ist,*

so können wir feststellen, dass die Bedingungen (9) und (10) erfüllt sind.

Die erste dieser Bedingungen ist eine unmittelbare Folgerung aus der Tatsache, dass die Mengen $U_n(\alpha)$ einen Umgebungssystem im topologischen Raume T bilden. Nehmen wir andererseits eine abnehmende Mengenfolge $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$, wo $U_n \epsilon \pi_T^{(n)}(T)$, in Betracht, so haben wir nach (47):

(48) $$U_n = U_{k_n}(\alpha_n). \quad \text{wo} \quad k_n \geqslant n \quad \text{und} \quad U_{k_{n+1}}(\alpha_{n+1}) \subset U_{k_n}(\alpha_n).$$

Es folgt daraus nach (45) und (46), dass: $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$. Die Folge der Ordinalzahlen $\{\alpha_n\}$ ist also absteigend. Infolgedessen gibt es eine natürliche Zahl m, sodass

$$\alpha_n = \alpha_m \quad \text{für} \quad n \geqslant m$$

und, da $U_n(\alpha_m)$ die Klasse von Umgebungen des Punktes α_m ist, so erhalten wir nach (48):

(49) $$\prod_{n=1}^{\infty} U_n = \prod_{n=1}^{\infty} U_{k_n}(\alpha_n) = \prod_{n=m}^{\infty} U_{k_n}(\alpha_n) = \prod_{n=m}^{\infty} U_{k_n}(\alpha_m) = \alpha_m.$$

Da aber bekanntlich der Raum T regulär ist[1]), so folgt aus (49):

$$\prod_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{U_{k_n}(\alpha_n)} = \prod_{n=m}^{\infty} \overline{U_{k_n}(\alpha_m)} = \alpha_m,$$

wobei die Mengenfolge $\{\overline{U}_n\}$ gegen α_m konvergiert. Dadurch ist auch die Eigenschaft (10) bewiesen, also der Raum T tatsächlich zur Klasse $\mathfrak{R}$ gehört.

3°. Bezeichnen wir mit ω_1 die erste Ordinalzahl von nichtabzählbarer Mächtigkeit, so besitzt die Menge T den Ordnugstypus ω_1. Nehmen wir jetzt eine geordnete Menge T_1 vom Typus $(1 + \lambda) . \omega_1$, wo λ der Ordnungstypus der Menge aller rellen Zahlen ist, und be-

[1]) Weil die Mengen $U_n(\alpha)$ einen Umgebungssystem bilden, der mit dem üblichen in T (als in einer geordneten Menge) definierten Umgebungssystem (vgl. Hausdorff, Mengenlehre 1914, S. 214) gleichwertig ist und für alle geordneten, in üblicher Weise als topologische Räume gefassten, Mengen die Regularität von Tietze (vgl. Math. Ann. 88, S. 310) bewiesen wurde.

trachten wir T_1 in gewöhnlicher Weise[1]) als einen topologischen Raum, so kann man ganz analog beweisen, dass T_1 auch zu der Klasse $\mathfrak{R}$ gehört und ausserdem, dass T_1 zusammenhängend, lokal-zusammenhängend und nicht-metrisierbar ist.

4° Endlich kann man für die Mengen der Klasse $\mathfrak{R}$ folgende Eigenschaft beweisen:

Ist $A \subset R \epsilon \mathfrak{R}$, wo A insichdicht und in R abgeschlossen ist, so enthält A eine diadische perfekte Menge, hat also eine Mächtigkeit $\geqq \mathfrak{c}$.

[1]) Vgl. Hausdorff, l. c., S. 214.